4. Выразите скорость v спутника, движущегося по эллиптической или гиперболической орбите, и ее радиальную и поперечную составляющие v_r и v_n через K, a, ε, E (или соответственно H).

5. Орбита спутника — эллипс или гипербола. Известны параметры ε, a, K. Сколько времени (τ) займет перелет спутника от перицентра до точки с истинной аномалией θ?

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. Уравнением Кеплера (3.2.10) (в виде (3.2.16) или (3.2.19)) приходится пользоваться также в тех случаях, когда необходимо предсказать, где, в какой точке своей орбиты, будет находиться спутник в заранее указанный момент времени. В этом случае *дано* τ, искомыми же величинами являются эксцентрическая аномалия Z, а также две функции от эксцентрической аномалии: r и θ. Уравнение (3.2.10) является трансцендентным относительно Z.

Покажем сначала, что уравнение Кеплера — и в случае эллиптического движения $(0 < \varepsilon < 1)$, и в случае гиперболического движения $(\varepsilon > 1)$ — для каждого заданного τ имеет решение, и притом единственное.

а) *Эллиптическое движение.* Уравнение Кеплера может быть записано в виде

$$E - \varepsilon \sin E = M, \tag{1}$$

где $M = n\tau = n(t - t_0)$. Сначала предположим, что число M не делится нацело на π (то есть при любом целом k $M \neq k\pi$). Тогда можно подобрать такое целое число k, что

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(E) = E - \varepsilon \sin E. \tag{2}$$

Эта непрерывная функция монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, ибо

$$\frac{d\Phi}{dE} = 1 - \varepsilon \cos E = \frac{r}{a} > 0.$$

Поэтому $\Phi(E)$ принимает значение M *не более чем при* *одном* значении E. Но $\Phi(k\pi) = k\pi < M$, $\Phi[(k+1)\pi] = (k+1)\pi > M$. Поэтому функция $\Phi(E)$ *не менее чем при одном* значении E из сегмента $[k\pi, (k+1)\pi]$ принимает значение M. Следовательно, при данном M $[k\pi < M < (k+1)\pi]$ существует в точности *одно* число E, для которого $\Phi(E) = M$, причем $k\pi < E < (k+1)\pi$.

Если $M = k\pi$ (опущенный ранее случай), то единственным корнем уравнения Кеплера (1) будет число $E = M$.

Итак, уравнение (1) определяет для каждой пары чисел ε и M $(0 < \varepsilon < 1, -\infty < M < \infty)$ единственное число E, то есть неявно задает некоторую *однозначную* функцию $E = E(\varepsilon, M)$.

б) *Гиперболическое движение* $(\varepsilon > 1)$. В этом случае уравнение Кеплера приводимо к виду (3.2.19):

$$\varepsilon \operatorname{sh} H - H = M, \tag{3}$$

где $M = |n|(t - t_0)$. Функция

$$\Psi(H) = \varepsilon \operatorname{sh} H - H \tag{4}$$

монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, ибо $\Psi'(H) = \varepsilon \operatorname{ch} H - 1 > 0$ ($\varepsilon > 1$ и, кроме того, при любом H $\operatorname{ch} H \geqslant 1$). Поэтому уравнение (3) имеет (при данном M) *не более одного корня* H. Кроме того, при $H \to +\infty$

$$\Psi(H) \equiv (\varepsilon - 1) H + \frac{H^3}{3!} + \frac{H^5}{5!} + \ldots > (\varepsilon - 1) H \to \infty.$$

Поэтому найдется такое число H_2, что $\Psi(H_2) > M$. А при $H \to -\infty$ $\Psi(H) \to -\infty$, т. е. найдется такое значение H_1, что $\Psi(H_1) < M$. В силу непрерывности функция $\Psi(H)$ *по крайней мере при одном* значении H из сегмента $[H_1, H_2]$ принимает значение M. Следовательно, уравнение (3) имеет в точности *один* корень H.

Для решения уравнения Кеплера применяют приближенные методы. Если требуется найти корень уравнения Кеплера с небольшой точностью, то можно воспользоваться графическим способом. Корень E уравнения (1) можно, очевидно, найти как абсциссу точки пересечения двух линий: синусоиды $y = \sin E$ и прямой $y = (E - M)/\varepsilon$. Аналогично корень уравнения (3) можно получить как абсциссу точки встречи кривой $y = \operatorname{sh} H$ и прямой $y = (M + H)/\varepsilon$.

2. В современной математике разработаны эффективные методы нахождения корней трансцендентных уравнений с любой наперед заданной точностью. Эти методы дают возможность быстро решить (с любой требуемой точностью) такое сравнительно простое уравнение, каким является уравнение Кеплера.

В частности, для решения уравнения Кеплера часто пользуются так называемыми *итерационными методами*. В простейшем случае, который только и будет нас здесь интересовать, сущность итерационного метода заключается в следующем. Пусть уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет на каком-то интервале корень, и притом единственный; обозначим его через $\bar{x}$.

Строим по определенному рецепту (каждый итерационный метод характеризуется своим рецептом) для данной функции $\varphi(x)$ вспомогательную функцию $f(x)$ и с ее помощью — последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по формуле

$$x_{n+1} = f(x_n), \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Например, для *итерационного метода Ньютона* функция $f(x)$ выбирается по формуле

$$f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (6)$$

Что касается «нулевого приближения» x_0, то оно выбирается на основании прикидки (быть может, даже весьма грубой) или из каких-либо других соображений. Затем показывается, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к искомому корню $\bar{x}$.

Понятно, что функция $f(x)$ не может быть взята произвольно, а должна быть выбрана настолько удачно, чтобы на практике — при весьма общих предположениях — последовательность чисел $\{x_n\}$, порождаемая функцией $f(x)$, действительно сходилась к интересующему нас корню $\bar{x}$ уравнения $\varphi(x) = 0$.

Особенно важно получить оценку для погрешности n-го приближения x_n, то есть для величины $|\bar{x} - x_n|$.

Мы здесь рассмотрим применительно к уравнению Кеплера лишь один итерационный метод — метод неподвижной точки.

3. Метод неподвижной точки. Для решения по этому методу уравнение

$$\varphi(x) = 0 \tag{7}$$

заменяется равносильным ему уравнением вида *)

$$x = f(x). \tag{8}$$

После выбора нулевого приближения x_0 строится последовательность приближений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по формулам

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n),\ \ldots \tag{9}$$

Если окажется, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу $\bar{x}$, а $f(x)$ — непрерывная функция в точке $\bar{x}$, то из (9) видно, что $\bar{x} = f(\bar{x})$. А это значит, что $\bar{x}$ как раз и будет корнем уравнения (7).

Применим метод неподвижной точки для решения уравнения Кеплера в случае *эллиптического* движения:

$$E = \varepsilon \sin E + M. \tag{10}$$

За нулевое приближение E_0 искомого корня $\bar{E}$ можно, например, принять число 0 или M, или какое-либо другое число. Последовательные приближения E_n к корню $\bar{E}$ будем вычислять по формуле

$$E_{n+1} = \varepsilon \sin E_n + M. \tag{11}$$

Например, при $E_0 = 0$

$$E_1 = M,\ E_2 = \varepsilon \sin M + M,\ E_3 = \varepsilon \sin E_2 + M,\ \ldots$$

Докажем, что *последовательность* $\{E_n\}$ *сходится при любом выборе начального приближения* E_0. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать сходимость ряда

$$E_0 + (E_1 - E_0) + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots \\ \ldots + (E_{n+1} - E_n) + \ldots, \tag{12}$$

---

*) С записью (8) связано название метода: с помощью преобразования $y = f(x)$ «точка» x переходит в другую «точку» $f(x)$, и нас интересует такая «точка» $\bar{x}$, для которой $f(\bar{x}) = \bar{x}$, то есть такая «точка» $\bar{x}$, которая преобразуется функцией $y = f(x)$ сама в себя, или, как говорят, «остается неподвижной» при преобразовании $y = f(x)$.

частные суммы которого совпадают с членами последовательности $\{E_n\}$. При помощи (11) находим:

$$|E_{n+1}-E_n| = |\varepsilon\sin E_n - \varepsilon\sin E_{n-1}| =$$
$$= 2\varepsilon\left|\sin\frac{E_n-E_{n-1}}{2}\cos\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right| \leqslant \varepsilon|E_n-E_{n-1}| \qquad (13)$$

(ибо при любом вещественном α имеем $|\cos\alpha| \leqslant 1$, $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$). По формуле (13)

$$|E_2-E_1| \leqslant \varepsilon|E_1-E_0|,\ |E_3-E_2| \leqslant \varepsilon|E_2-E_1| \leqslant \leqslant \varepsilon^2|E_1-E_0|.$$

И вообще, при любом n

$$|E_{n+1}-E_n| \leqslant \varepsilon^n|E_1-E_0|.$$

Итак, члены ряда (12), начиная со второго, не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов знакоположительной геометрической прогрессии

$$|E_1-E_0| + \varepsilon|E_1-E_0| + \varepsilon^2|E_1-E_0| + \ldots \ldots + \varepsilon^n|E_1-E_0| + \ldots,$$

которая сходится, ибо $0 < \varepsilon < 1$. Следовательно, и ряд (12) сходится, а вместе с ним — последовательность $\{E_n\}$. Пусть $\bar{E}$ — предел этой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bar{E}$. Переходя в (11) к пределу при $n \to \infty$, убедимся, что

$$\bar{E} = \varepsilon\sin\bar{E} + M,$$

то есть $\bar{E}$ — корень уравнения Кеплера (10).

Оценим погрешность n-го приближения E_n:

$$|\bar{E}-E_n| = |(E_{n+1}-E_n) + (E_{n+2}-E_{n+1}) + (E_{n+3}-E_{n+2}) + \ldots|$$
$$\leqslant |E_{n+1}-E_n| + |E_{n+2}-E_{n+1}| + |E_{n+3}-E_{n+2}| + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^n|E_1-E_0| + \varepsilon^{n+1}|E_1-E_0| + \varepsilon^{n+2}|E_1-E_0| + \ldots =$$
$$= \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}|E_1-E_0|,$$

то есть

$$|\bar{E}-E_n| \leqslant \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}|E_1-E_0|. \qquad (14)$$

Аналогично можно показать, что

$$|\bar{E} - E_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} |E_n - E_{n-1}|. \tag{15}$$

Таким образом, *при любом выборе нулевого приближения* E_0, даже очень грубом, мы после конечного числа шагов получим число E_n, которое будет — в пределах допустимой погрешности — равно корню уравнения Кеплера.

Аналогичные рассуждения могут быть применены и для широкого класса уравнений вида (8), а именно: *если в некоторой окрестности корня уравнения* (8) $|f'(x)| \leqslant N < 1$, *а нулевое приближение* x_0 *выбрано из этой окрестности, то последовательные приближения, построенные по формуле* (5), *сходятся к решению уравнения* (8), *причем погрешность n-го приближения можно оценить с помощью любой из двух формул*:

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{N^n}{1-N} |x_1 - x_0|, \quad |x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{N}{1-N} |x_n - x_{n-1}|. \tag{16}$$

4. Метод неподвижной точки не может быть применен к уравнению Кеплера для *гиперболического* движения (3), записанному в виде

$$H = \varepsilon \operatorname{sh} H - M.$$

Действительно, в этом случае при любом H

$$f'(H) \equiv (\varepsilon \operatorname{sh} H - M)' = \varepsilon \operatorname{ch} H > 1.$$

Однако этот метод может быть использован для решения уравнения (3), если воспользоваться функцией

$$y = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x,$$

обратной по отношению к функции

$$x = \operatorname{sh} y.$$

Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$H = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{H + M}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Полагая $f(H) = \operatorname{Ar\,sh} x$, где $x = (H + M)/\varepsilon$, и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найдем:

$$f'(H) = \frac{d}{dx}(\operatorname{Ar\,sh} x)\frac{dx}{dH} = \frac{dy}{dx}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

ибо $\operatorname{ch} y \geqslant 1$ при любом y.

Таким образом, условие сходимости итерационного процесса выполняется.

После выбора нулевого приближения H_0 можно находить последовательные приближения по формуле

$$H_{n+1} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{H_n + M}{\varepsilon}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{18}$$

Вычисления можно выполнить с помощью таблиц гиперболического синуса (см. [0.19]). Для оценки погрешности n-го приближения получим из (16) при $N = 1/\varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} |H_n - \overline{H}| &< \frac{1}{\varepsilon^{n-1}(\varepsilon - 1)}|H_1 - H_0|, \\ |H_n - \overline{H}| &< \frac{1}{\varepsilon - 1}|H_n - H_{n-1}|. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Заметим, что при эксцентриситете ε, близком к 1, метод неподвижной точки как для эллиптического, так и для гиперболического движений сходится медленно. В таких случаях применяют другие, более тонкие методы.

В настоящее время известны различные итерационные методы, с помощью которых можно успешно решать трансцендентные уравнения, в том числе и уравнение Кеплера. Итерационные методы особенно удобны для решения уравнений на быстродействующих вычислительных машинах. В самом деле, при решении задачи таким методом для нахождения каждого следующего приближения необходимо повторить один и тот же цикл вычислений (но с различными числами). Оказывается, легко составить такую программу для математической машины, при которой машина сама выберет необходимое число циклов и прекратит вычисление тогда, когда получится такое приближение, которое отличается от точного значения корня на величину, меньшую заданной допустимой погрешности.

Имеются разнообразные таблицы, дающие значение эксцентрической аномалии в зависимости от эксцентриситета ε и средней аномалии M. Таковы, например, таблицы Астранда, Баушингера, Виртца, М. Ф. Субботина, С. П. Глазенапа и др.

Задачи

1. Искусственный спутник Земли, запущенный в качестве зонда для исследования свойств космического пространства на расстоянии нескольких десятков тысяч километров от Земли, имел такие параметры: $a = 10^5$ *км*, $\varepsilon = 0{,}5$. Требуется предсказать значения эксцентрической аномалии E, истинной аномалии θ и расстояния r спутника от центра Земли через τ *мин* после прохождения спутника через перигей. E следует вычислить с точностью до 0,01 *рад*. Рассмотрите случаи $\tau = 50$ *мин*, $\tau = 300$ *мин*.

2. Искусственный спутник Земли имел перигей на расстоянии 6600 *км* от центра Земли (то есть примерно на высоте 230 *км* над поверхностью Земли), а апогей — на расстоянии 7400 *км* от центра Земли (то есть на высоте 1030 *км*). Спутник прошел через свой перигей в 4 часа по московскому времени. В 5 часов 20 минут было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента эксцентрическую аномалию E спутника, его истинную аномалию θ и высоту H над поверхностью Земли.

3. Советская автоматическая станция «Луна-4», запущенная в сторону Луны в 1963 году, после прохождения над Луной стала обращаться вокруг Земли по траектории, которая сначала была весьма близка к эллипсу. На первом витке максимальное удаление станции от центра Земли составляло 700 000 *км*, минимальное — 90 000 *км*. На каком расстоянии от центра Земли оказалась станция через двое суток после прохождения через перигей?

4. Межпланетный зонд (то есть автоматическая станция для исследования межпланетного пространства) стартует с искусственного спутника Земли. Ровно в 12 часов по московскому времени зонд оказался на высоте 630 *км* над поверхностью Земли, причем его скорость составляла 14,0 *км/сек* и была направлена параллельно поверхности Земли. Требуется дать прогноз: на каком расстоянии от центра Земли будет находиться зонд в 10 часов вечера того же дня?

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРБИТ, БЛИЗКИХ К КРУГОВЫМ

1. Уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = M \tag{1}$$

определяет E как неявную функцию от двух переменных M и ε:

$$E = E(\varepsilon, M).$$