Имеются разнообразные таблицы, дающие значение эксцентрической аномалии в зависимости от эксцентриситета ε и средней аномалии M. Таковы, например, таблицы Астранда, Баушингера, Виртца, М. Ф. Субботина, С. П. Глазенапа и др.

Задачи

1. Искусственный спутник Земли, запущенный в качестве зонда для исследования свойств космического пространства на расстоянии нескольких десятков тысяч километров от Земли, имел такие параметры: $a = 10^5$ *км*, $\varepsilon = 0{,}5$. Требуется предсказать значения эксцентрической аномалии E, истинной аномалии θ и расстояния r спутника от центра Земли через τ *мин* после прохождения спутника через перигей. E следует вычислить с точностью до 0,01 *рад*. Рассмотрите случаи $\tau = 50$ *мин*, $\tau = 300$ *мин*.

2. Искусственный спутник Земли имел перигей на расстоянии 6600 *км* от центра Земли (то есть примерно на высоте 230 *км* над поверхностью Земли), а апогей — на расстоянии 7400 *км* от центра Земли (то есть на высоте 1030 *км*). Спутник прошел через свой перигей в 4 часа по московскому времени. В 5 часов 20 минут было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента эксцентрическую аномалию E спутника, его истинную аномалию θ и высоту H над поверхностью Земли.

3. Советская автоматическая станция «Луна-4», запущенная в сторону Луны в 1963 году, после прохождения над Луной стала обращаться вокруг Земли по траектории, которая сначала была весьма близка к эллипсу. На первом витке максимальное удаление станции от центра Земли составляло 700 000 *км*, минимальное — 90 000 *км*. На каком расстоянии от центра Земли оказалась станция через двое суток после прохождения через перигей?

4. Межпланетный зонд (то есть автоматическая станция для исследования межпланетного пространства) стартует с искусственного спутника Земли. Ровно в 12 часов по московскому времени зонд оказался на высоте 630 *км* над поверхностью Земли, причем его скорость составляла 14,0 *км/сек* и была направлена параллельно поверхности Земли. Требуется дать прогноз: на каком расстоянии от центра Земли будет находиться зонд в 10 часов вечера того же дня?

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРБИТ, БЛИЗКИХ К КРУГОВЫМ

1. Уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = M \tag{1}$$

определяет E как неявную функцию от двух переменных M и ε:

$$E = E(\varepsilon, M).$$

При фиксированном M величина E будет функцией только от ε.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением орбит, близких к круговым. Для таких орбит эксцентриситет ε близок к нулю и поэтому можно получить простые приближенные формулы для расчета эксцентрической аномалии E и других параметров орбиты. Для любой дифференцируемой функции $f(\varepsilon)$ при малых ε, как известно из математического анализа, справедлива приближенная формула

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + \varepsilon f'(0). \tag{2}$$

Положим в этой формуле

$$f(\varepsilon) = E(\varepsilon, M).$$

Из (1) следует, что при $\varepsilon = 0$ имеем $E = M$.

Дифференцируя соотношение (1) по ε (считая E функцией ε), получим

$$\frac{dE}{d\varepsilon} - \varepsilon \cos E \frac{dE}{d\varepsilon} - \sin E = 0.$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$, найдем:

$$\left(\frac{dE}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (\sin E)_{\varepsilon=0} = \sin M. \tag{3}$$

Таким образом, применение формулы (2) в данном случае приводит к приближенной формуле

$$E \approx M + \varepsilon \sin M. \tag{4}$$

2. Найдем теперь приближенную формулу для радиуса-вектора r. Как мы знаем,

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E). \tag{5}$$

Из этой формулы видно, что для того, чтобы подсчитать r с точностью до первой степени ε, следует в (5) заменить $\cos E$ приближенным значением, верным с точностью до нулевой степени ε, то есть тем его значением, которое получается при $\varepsilon = 0$:

$$(\cos E)_{\varepsilon=0} = \cos M. \tag{6}$$

Поэтому

$$r \approx a\,(1 - \varepsilon \cos M). \tag{7}$$

3. Выведем приближенную формулу для истинной аномалии θ. Согласно интегралу площадей

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma. \tag{8}$$

При помощи соотношения

$$M = n\,(t - t_0) \tag{9}$$

перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по M:

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{\sigma}{n} \frac{1}{r^2}. \tag{10}$$

Из уравнения Кеплера (1) имеем

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos E}. \tag{11}$$

Используя (5), получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \frac{dE}{dM} \tag{12}$$

Поэтому формулу (10) можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{\sigma}{na^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2, \tag{13}$$

или, так как

$$\sigma = \sqrt{Kp}, \quad p = a\,(1 - \varepsilon^2),\ n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}, \tag{14}$$

$$\frac{d\theta}{dM} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2. \tag{15}$$

Из (4) находим приближенную формулу

$$\frac{dE}{dM} \approx 1 + \varepsilon \cos M.$$

С точностью до первой степени ε справедливы формулы

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 \approx 1 + 2\varepsilon \cos M, \quad \sqrt{1-\varepsilon^2} \approx 1.$$

Поэтому из (15) имеем:

$$\frac{d\theta}{dM} \approx 1 + 2\varepsilon \cos M.$$

Интегрируя, получаем окончательно:

$$\theta \approx M + 2\varepsilon \sin M. \tag{16}$$

4. Выберем в плоскости орбиты прямоугольную систему координат следующим образом: за начало возьмем притягивающий центр A, за ось абсцисс — линию апсид (рис. 3.2). Ось ординат получается из линии апсид поворотом на $\pi/2$ радиан в направлении движения спутника. Такую систему координат называют *орбитальной*. Пусть в ней эллиптический спутник P имеет координаты (ξ, η). Тогда

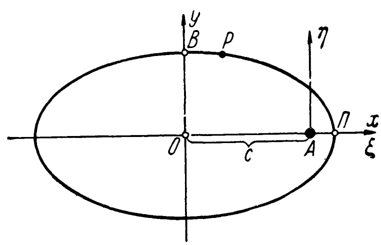

Рис. 3.2.

$$\xi = a(\cos E - \varepsilon),\ \eta = b \sin E = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin E. \tag{17}$$

Приведем еще формулы для компонент вектора скорости:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = n\frac{dr}{dM},\ v_n = r\frac{d\theta}{dt} = rn\frac{d\theta}{dM}. \tag{18}$$

Пользуясь этими формулами, можно найти приближенные формулы для функций ξ, η, v_r, v_n при малых ε:

$$\xi \approx a\left[\cos M - \frac{1}{2}\varepsilon(3 - \cos 2M)\right], \tag{19}$$

$$\eta \approx a\left[\sin M + \frac{1}{2}\varepsilon \sin 2M\right], \tag{20}$$

$$v_r \approx na\varepsilon \sin M, \tag{21}$$

$$v_n \approx na\,(1 + \varepsilon \cos M). \tag{22}$$

Полученные формулы позволяют легко сравнить некоторые характеристики движения спутника P по орбите малого эксцентриситета с характеристиками некоторого фиктивного спутника, который двигался бы по окружности радиуса a вокруг центра O орбиты спутника P и притом имел бы такой же период обращения, как спутник P.

Задачи

1. Планета сферической структуры имеет радиус R и гравитационный параметр K. Известны высота искусственного спутника этой планеты при его прохождении через перицентр (H_π) и через апоцентр (H_α) и момент его прохождения через перицентр (t_0). Отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R < 0{,}1$. Получите приближенную формулу для вычисления высоты спутника в любой заданный момент времени t.

2. Относительно спутника той же планеты известны H_α, H_π и высота H в один момент времени t. В предположении, что отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R$ мало, укажите способ для нахождения момента t_0 прохождения спутника через его перицентр.

3. Известны период T обращения искусственного спутника Земли, момент t_0 его прохождения через свой перигей и высота H в один момент времени t. Орбита мало отличается от окружности. Вычислите эксцентриситет орбиты.

4. Космический корабль «Восток», на котором Ю. А. Гагарин совершил первый в мире космический полет вокруг Земли, стартовал 12 апреля 1961 года в 9 часов 07 минут по московскому времени. Наибольшая высота корабля над поверхностью Земли составляла 327 *км*, наименьшая — 181 *км*. Будем считать, что корабль прошел через перигей в 9 часов 10 минут (эта цифра, возможно, весьма сильно отличается от истинного момента прохождения корабля через перигей). Тормозное устройство было включено в 10 часов 25 минут по московскому времени. Каковы были в этот момент истинная аномалия корабля и его высота над поверхностью Земли?

5. Докажите формулы (19) — (22).

§ 5. ФОРМУЛА ЛАМБЕРТА

Пусть спутник совершает перелет по известной эллиптической или гиперболической орбите. Будем считать известными главную полуось орбиты a, эксцентриситет орбиты ε, гравитационный параметр притягивающего центра K.