$$v_r \approx na\varepsilon \sin M, \tag{21}$$

$$v_n \approx na(1 + \varepsilon \cos M). \tag{22}$$

Полученные формулы позволяют легко сравнить некоторые характеристики движения спутника $P$ по орбите малого эксцентриситета с характеристиками некоторого фиктивного спутника, который двигался бы по окружности радиуса $a$ вокруг центра $O$ орбиты спутника $P$ и притом имел бы такой же период обращения, как спутник $P$.

## Задачи

1. Планета сферической структуры имеет радиус $R$ и гравитационный параметр $K$. Известны высота искусственного спутника этой планеты при его прохождении через перицентр ($H_\pi$) и через апоцентр ($H_\alpha$) и момент его прохождения через перицентр ($t_0$). Отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R < 0{,}1$. Получите приближенную формулу для вычисления высоты спутника в любой заданный момент времени $t$.

2. Относительно спутника той же планеты известны $H_\alpha$, $H_\pi$ и высота $H$ в один момент времени $t$. В предположении, что отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R$ мало, укажите способ для нахождения момента $t_0$ прохождения спутника через его перицентр.

3. Известны период $T$ обращения искусственного спутника Земли, момент $t_0$ его прохождения через свой перигей и высота $H$ в один момент времени $t$. Орбита мало отличается от окружности. Вычислите эксцентриситет орбиты.

4. Космический корабль «Восток», на котором Ю. А. Гагарин совершил первый в мире космический полет вокруг Земли, стартовал 12 апреля 1961 года в 9 часов 07 минут по московскому времени. Наибольшая высота корабля над поверхностью Земли составляла 327 *км*, наименьшая — 181 *км*. Будем считать, что корабль прошел через перигей в 9 часов 10 минут (эта цифра, возможно, весьма сильно отличается от истинного момента прохождения корабля через перигей). Тормозное устройство было включено в 10 часов 25 минут по московскому времени. Каковы были в этот момент истинная аномалия корабля и его высота над поверхностью Земли?

5. Докажите формулы (19) — (22).

## § 5. ФОРМУЛА ЛАМБЕРТА

Пусть спутник совершает перелет по известной эллиптической или гиперболической орбите. Будем считать известными главную полуось орбиты $a$, эксцентриситет орбиты $\varepsilon$, гравитационный параметр притягивающего центра $K$.

Если известны расстояния от концов дуги $\overset{\frown}{P_1P_2}$ орбиты спутника до притягивающего центра и длина хорды, соединяющей эти концы, то, оказывается, можно вычислить, сколько времени займет перелет спутника по этой дуге. Такую возможность для эллиптической или гиперболической орбиты дает формула, полученная 200 лет тому назад

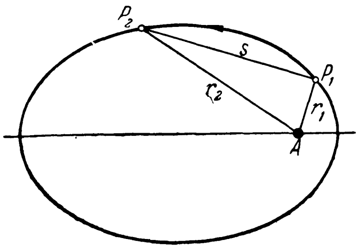



Рис. 3.3.

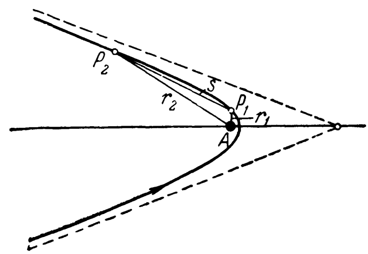



Рис. 3.4.

(в 1761 году) швейцарским математиком Иосифом Ламбертом. Различные доказательства этой формулы дали Ж. Лагранж (четыре доказательства), А. Кэли, Дж. Сильвестр и др.

Дадим здесь вывод этой формулы, принадлежащий Лагранжу. Рассуждения проведем одновременно для эллиптического и гиперболического движения.

Обозначим через $t_1$ и $t_2$ ($t_1 < t_2$) моменты прохождения спутника через точки $P_1$ и $P_2$, через $r_1$ и $r_2$ — расстояния этих точек от притягивающего центра $A$, через $s$ — длину хорды $P_1P_2$.

Чтобы избежать в дальнейшем громоздкого исследования, примем следующие дополнительные ограничения:

1) в случае эллиптической орбиты будем полагать, что спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после момента $t_0$ прохождения через перицентр, но до ближайшего после $t_0$ момента $t_0'$ прохождения через апоцентр (рис. 3.3);

2) в случае гиперболической орбиты будем полагать, что спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр (рис. 3.4).

Обозначим через $Z_1$ и $Z_2$ эксцентрические аномалии точек $P_1$ и $P_2$.

Напомним, что в случае эллипса $Z_1$ и $Z_2$ — вещественные числа (вместо $Z_1$ и $Z_2$ обычно пишут тогда $E_1$ и $E_2$); в случае гиперболы $Z_1$ и $Z_2$ — чисто мнимые числа ($Z_1 = iH_1$, $Z_2 = iH_2$). В силу дополнительных ограничений 1) и 2) будем иметь соответственно в случае эллипса

$$0 \leqslant Z_1 < Z_2 \leqslant \pi \tag{1}$$

и в случае гиперболы

$$0 \leqslant \operatorname{Im} Z_1 < \operatorname{Im} Z_2. \tag{2}$$

Если $t_0$ — момент прохождения спутника через перицентр, то в силу уравнения Кеплера

$$n(t_1 - t_0) = Z_1 - \varepsilon \sin Z_1, \quad n(t_2 - t_0) = Z_2 - \varepsilon \sin Z_2,$$

откуда

$$n(t_2 - t_1) = Z_2 - Z_1 - \varepsilon(\sin Z_2 - \sin Z_1),$$

или

$$n(t_2 - t_1) = Z_2 - Z_1 - 2\varepsilon \sin \frac{Z_2 - Z_1}{2} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2}. \tag{3}$$

Покажем, что правую часть последней формулы можно выразить через длины трех отрезков: $r_1$, $r_2$, $s$.

Всегда можно подобрать число $h$ так, чтобы имело место равенство

$$\varepsilon \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \cos h. \tag{4}$$

Мы, сверх того, потребуем в случае эллиптического движения, чтобы $h$ было заключено между нулем и $\pi$:

$$0 \leqslant h \leqslant \pi. \tag{5}$$

А в случае гиперболического движения потребуем, чтобы $h$ было чисто мнимым числом ($\operatorname{Re} h = 0$) и чтобы

$$\operatorname{Im} h \geqslant 0. \tag{6}$$

Таким выбором число $h$ определяется однозначно. Кроме того, положим

$$g = \frac{Z_2 - Z_1}{2}. \tag{7}$$

Из принятого выше дополнительного ограничения 1) видно, что в случае эллиптической орбиты

$$0 < g \leqslant \pi/2. \tag{8}$$

А из ограничения 2) ясно, что в случае гиперболической орбиты

$$\operatorname{Re} g = 0, \ \operatorname{Im} g > 0. \tag{9}$$

Привлекая вспомогательные переменные $g$ и $h$, перепишем формулу (3) так:

$$n\,(t_2 - t_1) = 2g - 2\sin g \cos h = \\ = 2g - [\sin(h+g) - \sin(h-g)]. \tag{10}$$

Введем новые вспомогательные величины $\lambda_1$ и $\lambda_2$ по формулам

$$\lambda_1 = h + g, \ \lambda_2 = h - g. \tag{11}$$

Теперь мы формулу (3) приведем к следующему виду:

$$n\,(t_2 - t_1) = (\lambda_1 - \sin\lambda_1) - (\lambda_2 - \sin\lambda_2). \tag{12}$$

Покажем, каким образом можно вычислить $\lambda_1$ и $\lambda_2$, если известны $r_1$, $r_2$, $s$, $a$, $\varepsilon$, $K$. Согласно (3.2.4)

$$r_1 = a\,(1 - \varepsilon\cos Z_1), \ r_2 = a\,(1 - \varepsilon\cos Z_2).$$

Поэтому

$$r_1 + r_2 = 2a\left[1 - \varepsilon\cos\frac{Z_1 + Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 - Z_2}{2}\right] = \\ = 2a\,(1 - \cos g\cos h),$$

откуда

$$\cos g\cos h = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2a}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$s^2 = (P_1P_2)^2 = (a\cos Z_2 - a\cos Z_1)^2 + (b\sin Z_2 - b\sin Z_1)^2 = \\ = 4a^2\sin^2\frac{Z_2 - Z_1}{2}\sin^2\frac{Z_1 + Z_2}{2} + 4b^2\sin^2\frac{Z_2 - Z_1}{2}\times \\ \times\cos^2\frac{Z_1 + Z_2}{2} = 4a^2\sin^2 g\left[\sin^2\frac{Z_1 + Z_2}{2} + \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon^2)\cos^2\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right] = 4a^2\sin^2 g\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right) = \\ = 4a^2\sin^2 g\,(1 - \cos^2 h) = 4a^2\sin^2 g\sin^2 h.$$

Отсюда

$$2a \sin g \sin h = \pm s. \tag{14}$$

Выясним знак в правой части последней формулы.

Покажем, что если выполняются дополнительные ограничения 1) или 2), то $a \sin g \sin h \geqslant 0$.

Пусть в случае эллиптической орбиты выполняется ограничение 1). Тогда $a > 0$ и из (5) и (8) видно, что

$$\sin h \geqslant 0, \sin g \geqslant 0, \sin g \sin h \geqslant 0.$$

Если же орбита — гипербола, то $a < 0$; кроме того, можно, в силу формул (6) и (9), переписать $g$ и $h$ в виде

$$g = ig', h = ih',$$

где $g'$ и $h'$ — неотрицательные числа, так что $\operatorname{sh} g' \geqslant 0$ и $\operatorname{sh} h' \geqslant 0$. Поэтому $a \sin g \sin h = a\, i \operatorname{sh} g'\, i \operatorname{sh} h' = - a \operatorname{sh} g' \operatorname{sh} h' \geqslant 0$. Таким образом, $a \sin g \sin h \geqslant 0$, и поэтому из формулы (14) следует, что $2a \sin g \sin h = + s$,

$$\sin g \sin h = \frac{s}{2a}. \tag{15}$$

Вычитая и складывая почленно (13) и (15) и учитывая (11), найдем:

$$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a}, \tag{16}$$

$$\cos \lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}. \tag{17}$$

Но существует бесконечно много чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$, удовлетворяющих последним условиям. Как же следует выбрать числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ в тех случаях, когда должны выполняться дополнительные ограничения 1) или 2)? Приведем (без доказательства) ответ на этот вопрос.

В случае *эллиптического* движения следует числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ брать из интервала $(0, \pi)$:

$$0 < \lambda_1 < \pi, 0 < \lambda_2 < \pi. \tag{18}$$

Тогда формулами (16) — (18) выбор чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ определяется однозначно.

В случае *гиперболической* орбиты следует взять числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ так, чтобы

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0 \text{ и } \operatorname{Im}\lambda_2 > 0. \qquad (19)$$

Формулами (16), (17), (19) выбор чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ тоже определяется однозначно.

Таким образом, мы видим, что *время $t_2 - t_1$, которое потребуется спутнику для перелета по дуге $\overset{\frown}{P_1P_2}$ эллиптической или гиперболической орбиты, определяется по формуле Ламберта*:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{n}\left[(\lambda_1 - \sin\lambda_1) - (\lambda_2 - \sin\lambda_2)\right],$$

*где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — корни уравнений*:

$$\cos\lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a},$$

$$\cos\lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}.$$

*В этих формулах $r_1$ и $r_2$ — расстояния от концов дуги до притягивающего центра, $s$ — длина хорды $P_1P_2$, $a$ — главная полуось орбиты ($a > 0$ в случае эллипса и $a < 0$ в случае гиперболы). Если орбита эллиптическая и спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр и до ближайшего прохождения через апоцентр, то следует брать $\lambda_1$ и $\lambda_2$ из сегмента $[0, \pi]$; если орбита гиперболическая и спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр, то следует дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие:*

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0 \text{ и } \operatorname{Im}\lambda_2 > 0.$$

Замечание 1. В случае гиперболического движения удобно перейти к вещественным гиперболическим функциям, полагая в (12) $\lambda_1 = i\lambda_1'$, $\lambda_2 = i\lambda'$ и приравнивая модули обеих частей равенства (12); формула Ламберта принимает тогда вид

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{|n|}\left[(\operatorname{sh}\lambda_1' - \lambda_1') - (\operatorname{sh}\lambda_2' - \lambda_2')\right], \qquad (20)$$

где $|n|$ можно вычислить по формуле

$$|n| = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}}. \tag{21}$$

Числа $\lambda_1'$ и $\lambda_2'$ должны удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{ch} \lambda_1' = 1 + \frac{r_1 + r_2 + s}{2|a|}, \tag{22}$$

$$\operatorname{ch} \lambda_2' = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|}. \tag{23}$$

Если спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр, то следует брать $\lambda_1' > 0$, $\lambda_2' > 0$.

Замечание 2. Формула Ламберта (12) остается в силе при любом расположении точек $P_1$ и $P_2$ на орбите спутника, но для правильного выбора чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ среди корней уравнений (16) и (17) требуется провести в каждом случае специальное исследование.

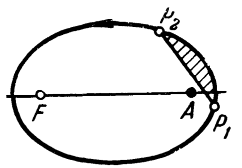
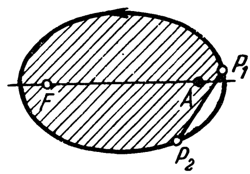
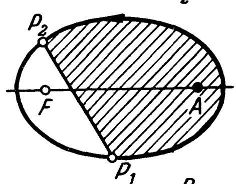
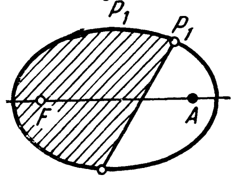
Для случая эллиптической орбиты такое исследование было впервые выполнено около 100 лет тому назад известным английским математиком А. Кэли. Результаты этого исследования приведены в таблице 1. В таблице 1 использованы следующие обозначения: $\overline{\lambda}_1$ и $\overline{\lambda}_2$ — наименьшие положительные углы, удовлетворяющие условиям (16) и (17); $A$ — фокус, в котором находится притягивающий центр; $F$ — «пустой» фокус («антифокус»); $S$ — сегмент, ограниченный хордой $P_1P_2$ и дугой $\overset{\frown}{P_1P_2}$, описанной спутником между моментами $t_1$ и $t_2$.

Замечание 3. Формула, аналогичная формуле Ламберта, была найдена для случая *параболической* орбиты Ньютоном (1687 г.) и, независимо от него, Эйлером (1743 г.).

Согласно формуле Ньютона — Эйлера время перелета $t_2 - t_1$ по дуге $\overset{\frown}{P_1P_2}$ параболической орбиты выражается следующим образом через параметр орбиты $p$, расстояние $s$ между концами хорды и расстояния $r_1$ и $r_2$ концов дуги от притягивающего центра:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{6\sqrt{K}}\left[(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \pm (r_1 + r_2 - s)^{3/2}\right]. \tag{24}$$

Таблица 1

| Возможные случаи: сегмент $S$ | Чертеж | Какие числа следует подставить в формулу Ламберта вместо | |
|---|---|---|---|
| | | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
| не содержит ни $A$, ни $F$ |   | $\bar{\lambda}_1$ | $\bar{\lambda}_2$ |
| содержит и $A$, и $F$ |   | $2\pi - \bar{\lambda}_1$ | $-\bar{\lambda}_2$ |
| содержит только $A$, но не $F$ |   | $\bar{\lambda}_1$ | $-\bar{\lambda}_2$ |
| содержит только $F$, но не $A$ |   | $2\pi - \bar{\lambda}_1$ | $\bar{\lambda}_2$ |

Знак плюс берется, если так называемая «угловая дальность» между точками $P_1$ и $P_2$ (то есть разность $\theta_2 - \theta_1$ между их истинными аномалиями) больше 180°, минус — если эта величина меньше 180°. Формула Ньютона — Эйлера может быть получена из формулы Ламберта путем предельного перехода, когда $a \to \infty$.

## Задачи

1. Космическая ракета совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса ($C$ — начало перелета, $D$ — конец; см. рис. 3.5), притом на таких расстояниях от Земли и Марса, что можно пренебречь притяжением этих планет и учитывать только тяготение ракеты к Солнцу. Расстояния перигелия и афелия орбиты от (центра) Солнца равны соответственно $120 \cdot 10^6$ *км* и $240 \cdot 10^6$ *км*. Известно, что $SC = 150 \cdot 10^6$ *км*, $SD = 228 \cdot 10^6$ *км*. Сколько времени должен занять этот перелет?

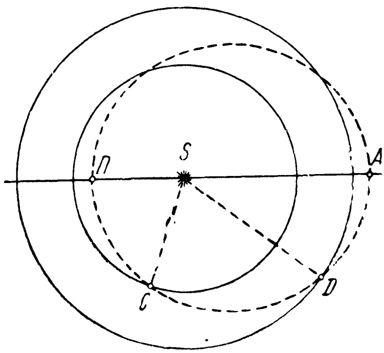



Рис. 3.5.

2. Космический снаряд получил в точке $C$ вблизи орбиты Земли на расстоянии $150 \cdot 10^6$ *км* от центра Солнца скорость (относительно Солнца) 50 *км/сек*. Через некоторое время он достигнет орбиты Юпитера (окажется в точке $D$ на расстоянии $800 \cdot 10^6$ *км* от Солнца), причем $\angle CSD = 90°$. Сколько времени должен занять этот перелет? Полет совершается в таких условиях, что можно учитывать лишь тяготение снаряда к Солнцу.

3. Космолет совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса. В точке $C$ на земной орбите скорость космолета относительно Солнца составляла 42,1 *км/сек*. Точка $D$, через которую должен пройти космолет и которая находится на орбите Марса, выбирается таким образом, чтобы $\angle CSD = 60°$. Условия перелета таковы, что можно пренебречь тяготением Земли и Марса. Сколько времени должен занять такой перелет?

4. Выведите формулу Ньютона — Эйлера (24), используя формулы параболического движения.