ГЛАВА IV

ТРАЕКТОРИЯ СПУТНИКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

1. В предыдущей главе нас интересовало, как будет меняться с течением времени положение спутника в *плоскости его орбиты*. Для этой цели в плоскости орбиты выбиралась определенная система координат (например, полярная система координат с полюсом в притягивающем центре A и с полярной осью $A\Pi$, направленной в перицентр орбиты Π, или прямоугольная система координат с началом в притягивающем центре и с осью абсцисс $A\Pi$). В такой системе отсчета мы научились находить положение (координаты) спутника в любой момент времени. Однако на практике часто возникает необходимость рассматривать движение спутника в других системах отсчета, для которых плоскость орбиты не является координатной плоскостью. Например, при исследовании движения искусственных спутников Земли обычно за одну из координатных плоскостей принимают плоскость земного экватора; при изучении движения межпланетных космических кораблей выбирают в качестве одной из координатных плоскостей плоскость эклиптики (плоскость, в которой Земля движется вокруг Солнца).

Пусть выбрана некоторая прямоугольная правоориентированная система отсчета $Axyz$ с началом в притягивающем центре A и осями, имеющими неизменную ориентацию в пространстве (рис. 4.1). Орты (единичные векторы) осей Ax, Ay, Az обозначим соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Для простоты будем полагать, что орбита спутника не прямолинейная и не круговая.

Нас сейчас интересует: каким образом можно предсказать положение спутника (то есть его координаты в избранной системе отсчета) в любой наперед заданный момент времени t?

Движение спутника описывается тремя дифференциальными уравнениями второго порядка (2.1.9) *). Порядок этой системы равен шести. Известно, что из такой системы искомые величины (x, y, z) выражаются в виде функций от независимого переменного t и шести произвольных постоянных. Следовательно, движение спутника полностью определяется заданием шести констант. Выбор этих шести констант может быть выполнен различными способами.

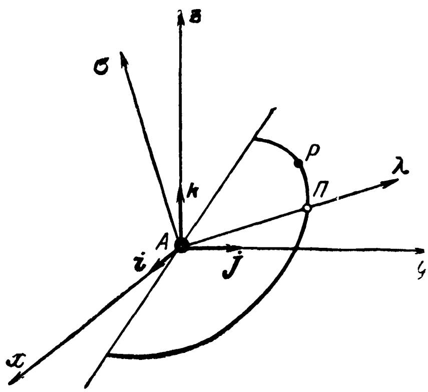

Рис. 4.1.

Движение спутника полностью определяется положением плоскости его орбиты в пространстве (то есть положением этой плоскости относительно выбранной системы координат); формой и размерами орбиты; положением орбиты в плоскости движения; моментом прохождения спутника через его перицентр (или через какую-либо другую, вполне определенную точку орбиты).

Чтобы иметь всю информацию о положении и форме орбиты, достаточно знать лишь две векторные константы: векторную константу площадей $\boldsymbol{\sigma}$ и вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$.

Действительно, в § 3 главы II было показано, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ортогонален плоскости орбиты; поэтому вектор $\boldsymbol{\sigma}$ определяет положение этой плоскости. Если вектор $\boldsymbol{\sigma}$ имеет

*) Гравитационный параметр K считаем известным.

компоненты σ_1, σ_2, σ_3, то уравнение этой плоскости записывается в виде

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0. \tag{1}$$

Фокальный параметр p и эксцентриситет орбиты ε можно вычислить по формулам из § 5 главы II:

$$p = \sigma^2/K, \ \varepsilon = \lambda/K, \tag{2}$$

где σ и λ — длины векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ направлен вдоль линии апсид орбиты; таким образом, этот вектор определяет положение самой орбиты в ее плоскости. Векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ можно задать их компонентами σ_k, λ_k ($k = 1, 2, 3$). Однако, как мы установили в § 4 главы II, векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ взаимно перпендикулярны, то есть между шестью числами σ_k, λ_k имеет место зависимость

$$\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3 = 0. \tag{3}$$

Поэтому среди этих чисел σ_k, λ_k ($k = 1, 2, 3$) только пять могут быть, вообще говоря, заданы произвольно.

Если заданы эти пять величин и момент t_0 прохождения спутника через перицентр, то положение спутника в плоскости его орбиты в любой момент времени t можно найти по формулам главы III. Таким образом, движение спутника относительно притягивающего центра с данным гравитационным параметром K полностью определяется шестью величинами:

1) пятью числами из шести: σ_1, σ_2, σ_3, λ_1, λ_2, λ_3;

2) числом t_0.

Такие шесть величин, которые позволяют однозначно определить положение спутника в любой момент времени, называют *элементами орбиты спутника*. Мы сейчас рассмотрели один способ выбора шести элементов орбиты. Однако существует и много других способов.

2. В астрономии элементы орбиты обычно выбираются следующим образом (рис. 4.2).

Если плоскость орбиты спутника не совпадает с плоскостью Axy, то эти плоскости пересекаются по некоторой прямой l, которую называют *линией узлов* орбиты относительно выбранной системы отсчета. На этой прямой лежат точки пересечения орбиты с плоскостью Axy, называемые *узлами* орбиты. При прохождении через один из узлов спутник переходит из области отрицательных аппликат ($z < 0$) в область положительных аппликат ($z > 0$), а при прохождении через второй узел — наоборот. Первый из узлов называется *восходящим узлом*, мы его будем обозначать ☊; второй узел называется *нисходящим* и обозначается через ☋.

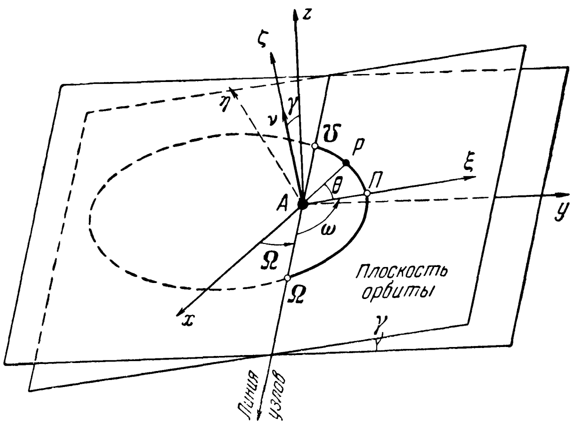

Рис. 4.2.

В случае гиперболического или параболического движения может оказаться, что орбита пересекает прямую l лишь в одной точке, например существует лишь восходящий узел ☊, а нисходящего нет. В таком случае можно считать, что нисходящий узел ☋ находится в бесконечности на луче ☊A. В дальнейшем линию узлов мы будем рассматривать как *направленную* прямую (ось); положительным направлением на линии узлов будем считать направление от притягивающего центра A к восходящему узлу.

Угол между положительным направлением оси Ax и положительным направлением линии узлов называется *долготой восходящего узла*; обозначим его буквой ☊ — так же, как и сам восходящий узел. Величину ☊ будем отсчитывать всегда в пределах между 0 и 2π:

$$0 \leqslant ☊ < 2\pi.$$

Построим единичный вектор ν, обладающий следующими свойствами: 1) его началом служит точка A; 2) он перпендикулярен к плоскости орбиты; 3) из его конца движение спутника представляется происходящим против часовой стрелки. Такой вектор ν будем называть *ортом внешней нормали* к плоскости орбиты (рис. 4.2). Вектор ν вполне характеризует положение плоскости орбиты в пространстве. Угол γ между осью аппликат Az и вектором ν называется *наклонением орбиты*. Величину γ будем отсчитывать всегда от 0 до π $(0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$.

Легко убедиться в том, что наклонение γ равно углу между плоскостью Axy и плоскостью орбиты.

Два числа Ω и γ вполне определяют положение плоскости орбиты *).

Эксцентриситет ε орбиты вполне характеризует ее *форму*, то есть определяет ее с точностью до подобного преобразования. Для того чтобы еще задать *размеры* орбиты, достаточно указать параметр орбиты p или другой какой-либо линейный элемент, например перицентральное расстояние r_π или — в случае эллипса и гиперболы — главную полуось a. Итак, для определения размеров и формы орбиты достаточно задать пару чисел ε и p (или ε и $|a|$, если орбита — не парабола) или, наконец, любую пару из чисел $a, b, c, p, r_\pi, \varepsilon, h$.

Для задания *положения* орбиты в ее *плоскости* теперь достаточно указать положение луча $A\Pi$, направленного к перицентру.

Угол ω между линией узлов $A\Omega$ и линией апсид $A\Pi$ называется *аргументом перицентра* или угловым расстоянием перицентра от узла. Точнее, аргументом перицентра называется угол ω, на который следует повернуть против часовой стрелки (с точки зрения наблюдателя, расположенного в конце вектора ν) луч $A\Omega$ для того, чтобы он совместился с лучом $A\Pi$. Если угол ω задан, то однозначно определяется положение луча $A\Pi$. Угол ω условимся всегда отсчитывать в пределах от 0 до 2π $(0 \leqslant \omega < 2\pi)$.

Будем еще считать известным тот момент времени t_0, когда спутник прошел через перицентр Π.

---

*) Исключение составляет тот случай, когда $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$. В этом случае величина Ω теряет смысл.

Набор шести чисел Ω, γ, ε, p, ω, t_0 позволяет, как мы увидим ниже, определить положение спутника в любой момент времени t. В астрономии под элементами орбиты спутника обычно понимают именно эту шестерку чисел.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО ИЗВЕСТНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ЕГО ОРБИТЫ

1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть имеются две (правые) системы прямоугольных декартовых координат с общим началом A (рис. 4.3). Одну из этих систем назовем «старой», другую — «новой». Пусть известны координаты ($x_с$, $y_с$, $z_с$) точки P (спутника) в «старой» системе отсчета. Найдем координаты ($x_н$, $y_н$, $z_н$) той же точки в «новой» системе.

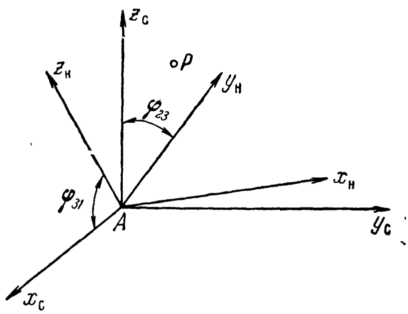

Рис. 4.3.

Обозначим орты (единичные векторы) «старых» осей координат через $\boldsymbol{i}_с$, $\boldsymbol{j}_с$, $\boldsymbol{k}_с$, а орты «новых» осей координат — через $\boldsymbol{i}_н$, $\boldsymbol{j}_н$, $\boldsymbol{k}_н$. Тогда будем иметь для вектора $\overline{AP}$:

$$\overline{AP} = x_н\boldsymbol{i}_н + y_н\boldsymbol{j}_н + z_н\boldsymbol{k}_н = x_с\boldsymbol{i}_с + y_с\boldsymbol{j}_с + z_с\boldsymbol{k}_с. \quad (1)$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\boldsymbol{i}_н$, найдем:

$$x_н = (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{i}_с)\,x_с + (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{j}_с)\,y_с + (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{k}_с)\,z_с. \quad (2)$$

Аналогичные формулы можно написать для $y_н$ и $z_н$. Будем называть оси $Ax_с$, $Ay_с$, $Az_с$ соответственно первой, второй и третьей «старой» осью. Аналогичные названия используем для «новых» осей. Обозначим через φ_{pq} угол, образованный «новой» осью номер p со «старой» осью номер q (p, q = 1, 2, 3), а через α_{pq} — косинус этого угла:

$$\alpha_{pq} = \cos\varphi_{pq}. \quad (3)$$

Так, например, α_{23} — это косинус угла, образованного «новой» осью $Ay_н$ («новой» осью номер 2) с осью $Az_с$ («старой»