Набор шести чисел Ω, γ, ε, p, ω, t_0 позволяет, как мы увидим ниже, определить положение спутника в любой момент времени t. В астрономии под элементами орбиты спутника обычно понимают именно эту шестерку чисел.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО ИЗВЕСТНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ЕГО ОРБИТЫ

1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть имеются две (правые) системы прямоугольных декартовых координат с общим началом A (рис. 4.3). Одну из этих систем назовем «старой», другую — «новой». Пусть известны координаты ($x_с$, $y_с$, $z_с$) точки P (спутника) в «старой» системе отсчета. Найдем координаты ($x_н$, $y_н$, $z_н$) той же точки в «новой» системе.

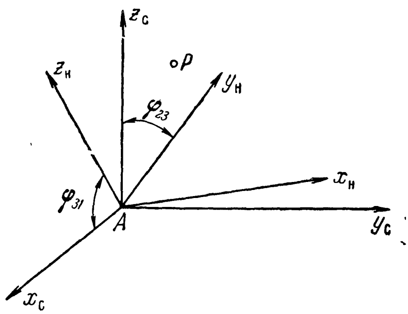

Рис. 4.3.

Обозначим орты (единичные векторы) «старых» осей координат через $\boldsymbol{i}_с$, $\boldsymbol{j}_с$, $\boldsymbol{k}_с$, а орты «новых» осей координат — через $\boldsymbol{i}_н$, $\boldsymbol{j}_н$, $\boldsymbol{k}_н$. Тогда будем иметь для вектора $\overline{AP}$:

$$\overline{AP} = x_н\boldsymbol{i}_н + y_н\boldsymbol{j}_н + z_н\boldsymbol{k}_н = x_с\boldsymbol{i}_с + y_с\boldsymbol{j}_с + z_с\boldsymbol{k}_с. \quad (1)$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\boldsymbol{i}_н$, найдем:

$$x_н = (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{i}_с)\,x_с + (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{j}_с)\,y_с + (\boldsymbol{i}_н\cdot\boldsymbol{k}_с)\,z_с. \quad (2)$$

Аналогичные формулы можно написать для $y_н$ и $z_н$.

Будем называть оси $Ax_с$, $Ay_с$, $Az_с$ соответственно первой, второй и третьей «старой» осью. Аналогичные названия используем для «новых» осей. Обозначим через φ_{pq} угол, образованный «новой» осью номер p со «старой» осью номер q (p, q = 1, 2, 3), а через α_{pq} — косинус этого угла:

$$\alpha_{pq} = \cos\varphi_{pq}. \quad (3)$$

Так, например, α_{23} — это косинус угла, образованного «новой» осью $Ay_н$ («новой» осью номер 2) с осью $Az_с$ («старой» осью номер 3). Формула (2) переписывается теперь так:

$$x_{\text{н}} = \alpha_{11}x_{\text{с}} + \alpha_{12}y_{\text{с}} + \alpha_{13}z_{\text{с}}. \tag{4}$$

Аналогично

$$y_{\text{н}} = \alpha_{21}x_{\text{с}} + \alpha_{22}y_{\text{с}} + \alpha_{23}z_{\text{с}}, \tag{5}$$

$$z_{\text{н}} = \alpha_{31}x_{\text{с}} + \alpha_{32}y_{\text{с}} + \alpha_{33}z_{\text{с}}. \tag{6}$$

Формулы (4), (5), (6) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{н}} \\ y_{\text{н}} \\ z_{\text{н}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{с}} \\ y_{\text{с}} \\ z_{\text{с}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Равенство (7) и дает решение поставленной выше задачи.

Представим себе теперь, что затем совершается переход от «новой» системы координат к «новейшей»; тогда «новейшие» координаты $x'_{\text{н}}$, $y'_{\text{н}}$, $z'_{\text{н}}$ точки P выражаются через ее «новые» координаты $x_{\text{н}}$, $y_{\text{н}}$, $z_{\text{н}}$ с помощью формулы

$$\begin{bmatrix} x'_{\text{н}} \\ y'_{\text{н}} \\ z'_{\text{н}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{н}} \\ y_{\text{н}} \\ z_{\text{н}} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где β_{pq} — косинус угла между «новейшей» осью номер p и «новой» осью номер q (p, $q = 1, 2, 3$).

Вводя следующие обозначения для векторов и матриц:

$$\boldsymbol{r}_{\text{с}} = \begin{bmatrix} x_{\text{с}} \\ y_{\text{с}} \\ z_{\text{с}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{\text{н}} = \begin{bmatrix} x_{\text{н}} \\ y_{\text{н}} \\ z_{\text{н}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}'_{\text{н}} = \begin{bmatrix} x'_{\text{н}} \\ y'_{\text{н}} \\ z'_{\text{н}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix},$$

запишем формулы (7) и (8) в виде

$$\boldsymbol{r}_{\text{н}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_{\text{с}}, \quad \boldsymbol{r}'_{\text{н}} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}_{\text{н}},$$

так что

$$\boldsymbol{r}'_{\text{н}} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_{\text{с}}). \tag{9}$$

Но так как для умножения матриц верен сочетательный закон, то

$$\boldsymbol{r}'_{\text{н}} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{r}_{\text{с}}. \tag{10}$$

2. Применим теперь полученные формулы к решению следующей задачи: *знаяэлементы орбиты спутника, найти его положение в момент t относительно данной системы декартовых прямоугольных координат $Axyz$, имеющей начало отсчета в притягивающем центре A* (рис. 4.4).

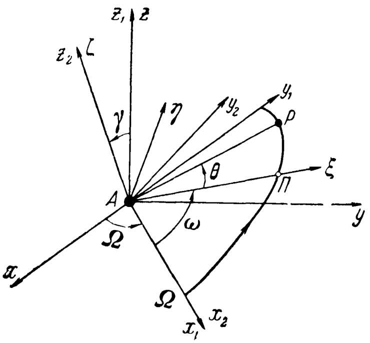

Рис. 4.4.

Рассмотрим *вспомогательную* систему отсчета $A\xi\eta\zeta$ с началом в притягивающем центре (мы ее назовем *орбитальной* системой отсчета): за ось абсцисс $A\xi$ примем линию апсид орбиты спутника (положительное направление — от притягивающего центра A к перицентру Π); ось ординат $A\eta$ получим поворотом оси $A\xi$ в плоскости орбиты на $90°$ в направлении движения спутника; ось аппликат $A\zeta$ выбирается так, чтобы система координат $A\xi\eta\zeta$ была правоориентированной.

Переход от системы отсчета $Axyz$ к орбитальной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$ можно совершить, если подвергнуть систему отсчета $Axyz$ последовательно трем следующим преобразованиям:

1) повороту вокруг оси Az на угол Ω (в результате получим новую систему отсчета $Ax_1y_1z_1$, причем $Az_1 \equiv Az$);

2) повороту вокруг оси Ax_1 на угол γ (получим новую систему отсчета $Ax_2y_2z_2$, причем $Ax_2 \equiv Ax_1$); ось Az_2 перпендикулярна к плоскости орбиты;

3) повороту вокруг оси Az_2 на угол ω (получим систему $A\xi\eta\zeta$; $A\zeta \equiv Az_2$).

Обозначим матрицы этих трех поворотов соответственно через $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ и положим

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1. \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Легко понять, каким образом можно осуществить обратный переход от системы отсчета $A\xi\eta\zeta$ к системе отсчета $Axyz$. Для этой цели достаточно совершить последовательно три поворота (те же, что раньше, но в обратном порядке и в обратном направлении).

Обозначая матрицы этих последовательных поворотов соответственно через $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, получим:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3 \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{или, короче,} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3. \tag{14}$$

Найдем теперь явные выражения для матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ ($k=1, 2, 3$). Начнем с матрицы $\boldsymbol{A}_1$. Составим таблицу углов φ_{pq} между осями системы $Ax_1y_1z_1$ и системы $Axyz$:

	Ax	Ay	Az
Ax_1	Ω	$\frac{\pi}{2} - \Omega$	$\frac{\pi}{2}$
Ay_1	$\frac{\pi}{2} + \Omega$	Ω	$\frac{\pi}{2}$
Az_1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

Поэтому

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Аналогично можно составить таблицы углов между осями и матрицы двух других поворотов:

	Ax_1	Ay_1	Az_1
Ax_2	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Ay_2	$\frac{\pi}{2}$	γ	$\frac{\pi}{2}-\gamma$
Az_2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\gamma$	γ

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \tag{16}$$

	Ax_2	Ay_2	Az_2
$A\xi$	ω	$\frac{\pi}{2}-\omega$	$\frac{\pi}{2}$
$A\eta$	$\frac{\pi}{2}+\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
$A\zeta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Заменяя в матрицах A_1, A_2, A_3 углы Ω, γ, ω на $-\Omega$, $-\gamma$, $-\omega$, получим матрицы B_k, $k = 1, 2, 3$:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Матрицу $\boldsymbol{B}$ иногда называют *матрицей проективных коэффициентов* и записывают в виде

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Таким образом [см. (19) и (14)],

$$\boldsymbol{B}\equiv\begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Перемножив эти матрицы, получим:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} (\cos\Omega\cos\omega- & (-\cos\Omega\sin\omega- & \\ -\sin\Omega\sin\omega\cos\gamma) & -\sin\Omega\cos\omega\cos\gamma) & \sin\Omega\sin\gamma \\ (\sin\Omega\cos\omega+ & (-\sin\Omega\sin\omega+ & \\ +\cos\Omega\sin\omega\cos\gamma) & +\cos\Omega\cos\omega\cos\gamma) & -\cos\Omega\sin\gamma \\ \sin\gamma\sin\omega & \sin\gamma\cos\omega & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{20'}$$

Из (13) и (20) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Вычисляя матрицу $\boldsymbol{A}$ по формулам (11), (15) — (17), нетрудно убедиться в том, что она может быть получена из матрицы $\boldsymbol{B}$ транспонированием:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Пусть нам известны шесть элементов *эллиптической* орбиты спутника $\Omega, \gamma, \omega, a, \varepsilon, t_0$. Тогда можно предсказать его положение в любой момент времени t.

Действительно, решая уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = n(t - t_0), \; n = \sqrt{K/a^3},$$

мы можем для момента t найти E. Кроме того, по a и ε просто вычисляется b, а именно: $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Положение спутника в орбитальной системе отсчета определяется вектором

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a(\cos E - \varepsilon) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Чтобы получить тот же вектор в системе отсчета $Axyz$, эту матрицу в соответствии с формулой (21) следует умножить слева на матрицу проективных коэффициентов $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} a(\cos E - \varepsilon) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Иначе эту формулу записывают так:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a(\cos E - \varepsilon) + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} b \sin E. \qquad (25)$$

Совершенно аналогичная формула верна и в случае *гиперболического* движения. Чтобы ее получить, достаточно в формуле (25) заменить E на iH, a — на $-|a|$, b — на $-i|b|$.

3. Положение спутника и элементы орбиты, как мы видели, удобно определять относительно прямоугольной системы координат с началом в притягивающем центре A и с осями Ax, Ay, Az, постоянно ориентированными в пространстве.

В разных задачах основную плоскость Axy этой системы выбирают по-разному. Например, при изучении движения спутников Земли за основную плоскость $Ax_эy_э$ принимают плоскость экватора, ось $Az_э$ направляют от центра

Земли к ее Северному полюсу, а ось $Ax_э$ — в так называемую точку весеннего равноденствия; ось $Ay_э$ выберем так, чтобы система $Ax_эy_эz_э$ была правоориентированной. Такая система $Ax_эy_эz_э$ называется экваториальной геоцентрической системой отсчета. Аналогично можно определить для Луны (для любой планеты или для любой звезды) экваториальную селеноцентрическую (соответственно планетоцентрическую или астроцентрическую) систему отсчета. Положение спутника P в экваториальной геоцентрической системе координат можно задать не только тремя его декартовыми координатами ($x_э$, $y_э$, $z_э$), но и тремя сферическими координатами: геоцентрическим радиусом-вектором r, склонением δ и прямым восхождением α *) (рис. 4.5). Склонение δ определяется как угол между радиусом-вектором AP и его проекцией AP_1 на плоскость экватора ($-90° \leqslant \delta \leqslant 90°$), а прямое восхождение — как угол между осью $Ax_э$ и лучом AP_1 ($0° \leqslant \alpha < 360°$).

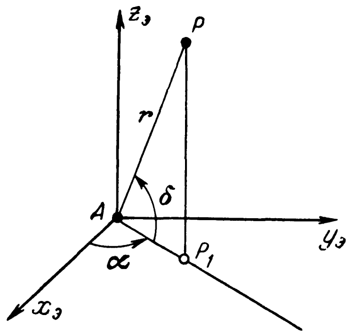

Рис. 4.5.

При решении ряда задач космонавтики удобно определять положение спутника по отношению к системе координат с началом не в центре Земли A, а в точке наблюдения B.

Например, это может быть система отсчета с началом в каком-либо данном пункте B на поверхности Земли и с осями, параллельными осям системы $Axyz$. Если A — центр Земли, а оси $B\xi$, $B\eta$, $B\zeta$ системы $B\xi\eta\zeta$ имеют такие же направления, как соответствующие оси геоцентрической экваториальной системы координат, то систему $B\xi\eta\zeta$ можно назвать *топоцентрической экваториальной* системой координат. Другой пример выбора системы $B\xi\eta\zeta$: точка B—на поверхности Земли; основная плоскость $B\xi\eta$ — касательная

*) В астрономии обычно понимают под прямым восхождением угол $360° - \alpha$.

плоскость к поверхности Земли в точке B (плоскость горизонта); ось $B\eta$ направлена по меридиану к Северному полюсу Земли, ось $B\zeta$ имеет направление внешней нормали к поверхности Земли (направлена в зенит), ось $B\xi$ направлена по параллели, проходящей через B, и притом так, что система $B\xi\eta\zeta$ правоориентированная. Такую систему отсчета называют *горизонтальной.*

Положение спутника в горизонтальной системе координат можно задать не только тремя его декартовыми координатами ($x_г$, $y_г$, $z_г$), но и тремя сферическими координатами (рис. 4.6): дальностью ρ, угловой высотой спутника над горизонтом (угол h) и азимутом (угол A). Координаты ρ, h и A можно найти, например, из радиотехнических наблюдений за спутником P, а h и A — также из оптических наблюдений *).

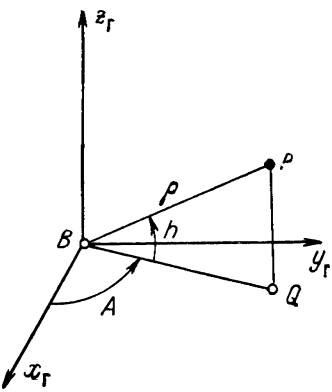

Рис. 4.6.

В общем случае точка B не обязательно лежит на поверхности Земли. Можно, например, выбрать систему отсчета $B\xi\eta\zeta$ так, чтобы точка B совпала с A, ось $B\zeta$ была направлена к Северному полюсу Земли, ось $B\xi$ была направлена в точку встречи нулевого меридиана с экватором Земли, а ось $B\eta$ — так, чтобы система отсчета была правоориентированной (ясно, что основная плоскость $B\xi\eta$ будет в этом случае совпадать с плоскостью экватора Земли). Такую систему отсчета можно назвать *географической*: географические координаты точек (широта, долгота) на поверхности Земли в этой системе отсчета с течением времени не будут меняться.

Аналогичную систему отсчета можно определить для Луны, для любой планеты или звезды.

---

*) Заметим, что в астрономии понимают обычно под азимутом угол $A_1 = 360° - A$.

Задачи

1. Звездным временем в данной точке B на земной поверхности в данный момент называется двугранный угол между полуплоскостью, проходящей через полярную ось Земли и точку осеннего равноденствия, и полуплоскостью, проходящей в данный момент через ось Земли и точку B. За единицу измерения этого угла принимают часто не градус, а «угловой час» (или просто «час»), причем $360° = 24$ угловым часам, 1 час $= 15°$.

В астрономических календарях обычно приводится звездное время в Гринвиче в полночь каждых суток или в полночь, с которой начинается месяц.

Спутник был замечен на станции наблюдения B в t часов по московскому времени. Звездное время в Гринвиче в полночь, предшествующую этому моменту наблюдения, составляло S_0 градусов. Пункт наблюдения B имеет долготу λ.

Каково было звездное время на станции в момент наблюдения спутника?

2. Долгота Смоленска $\lambda = 32°$, спутник наблюдался в 20 часов 7 мая 1960 года. Звездное время в Гринвиче в полночь с 30 апреля на 1 мая составляло 217,94°. Найдите звездное время в Смоленске в момент наблюдения спутника.

3. На станции наблюдения B в момент t по московскому времени был замечен искусственный спутник Земли. Пусть известны прямоугольные горизонтальные координаты спутника в этот момент $(x_г, y_г, z_г)$, дата наблюдения и географические координаты станции наблюдения (φ^0, λ^0). Выведите формулы для вычисления экваториальных геоцентрических координат спутника $(x_э, y_э, z_э)$.

4. На станции B с географическими координатами (φ, λ) в t часов по московскому времени наблюдали прохождение спутника. Были найдены его горизонтальные сферические координаты ρ, h, A. Известна дата наблюдения.

Выведите формулы, определяющие экваториальные сферические координаты спутника r, δ, α.

5. Пусть известно, что в t часов по московскому времени спутник должен быть виден на станции визуальных наблюдений B и будет иметь геоцентрические экваториальные координаты r, δ, α. Известна также дата прохождения спутника над станцией B. Наблюдателям этой станции необходимо сообщить горизонтальные координаты (h, A) спутника в момент t. Каким образом можно вычислить эти координаты?

6. Известны элементы орбиты искусственного спутника Земли относительно геоцентрической экваториальной системы координат: $a = 7000$ *км*; $\varepsilon = 0{,}2$; $\gamma = 60°$; $\Omega = 90°$; $\omega = 45°$. По этим данным вычислите декартовы экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите затем экваториальные сферические координаты перигея r, δ, α.

7. Известны элементы орбиты спутника Ω, γ, ω относительно некоторой системы отсчета $Axyz$. Точка P имеет относительно орбитальной системы отсчета $A\xi\eta\zeta$ декартовы координаты (0, 0, 1). Каковы ее координаты относительно системы отсчета $Axyz$?