§ 3. НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПОЛОЖЕНИЯМ СПУТНИКА

Мы научились по известным элементам орбиты спутника находить его положение в заданные моменты времени. В этом параграфе мы займемся обратной задачей: каким образом можно определить орбиту (то есть вычислить ее элементы) на основании нескольких наблюдений спутника?

Для нахождения шести элементов орбиты спутника достаточно, вообще говоря, знать два его положения P_1 и P_2 (относительно принятой системы отсчета) и моменты прохождения через эти точки. Выкладки упрощаются, если известны три положения спутника и момент его прохождения через одну из этих точек *).

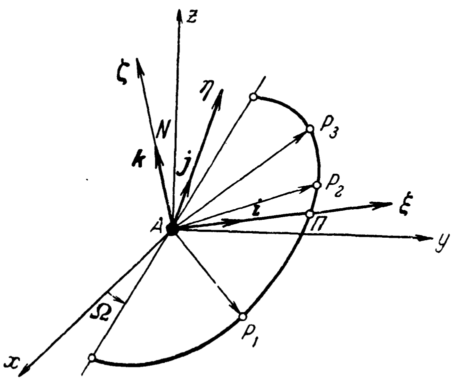

Рис. 4.7.

Итак, пусть в некоторой системе отсчета $Axyz$ (с началом в притягивающем центре) известны координаты трех точек P_1, P_2, P_3, через которые проходит орбита спутника (рис. 4.7). Обозначим через t_1, t_2, t_3 моменты прохождения спутника через эти точки. Пусть $\overrightarrow{AP_1} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{AP_2} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{AP_3} = \boldsymbol{r}_3$; $t_1 < t_2 < t_3$. По условию векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ известны.

Мы будем полагать, что притягивающий центр A не лежит ни на одной из прямых P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3.

1. Положение плоскости орбиты в пространстве определяется ортом нормали к этой плоскости. Этот орт можно

*) Полное решение задачи определения элементов орбиты спутника по известным двум его положениям может быть получено с помощью формулы Ламберта (ср. [4.7]).

найти по формуле

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|}. \tag{1}$$

С другой стороны, точка N с орбитальными координатами $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$ (конец орта $\boldsymbol{k}$ внешней нормали к плоскости орбиты) имеет в системе $Axyz$ координаты, определяемые матрицей

$$\begin{bmatrix} \sin \Omega \sin \gamma \\ -\cos \Omega \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \tag{2}$$

(см. § 2, задачу 7). Элементы этой матрицы являются одновременно координатами вектора $\overrightarrow{AN}$, то есть вектора $\boldsymbol{k}$. Сравнивая значения для одноименных компонент вектора $\boldsymbol{k}$ из выражений (1) и (2), мы сумеем найти Ω и γ (если $\sin \gamma \neq 0$).

2. Так как векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ компланарны (то есть лежат в одной и той же плоскости, а именно в плоскости орбиты), причем векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ не лежат (по допущению) на одной и той же прямой, то должны существовать такие вещественные константы c_1 и c_3, что

$$\boldsymbol{r}_2 = c_1\boldsymbol{r}_1 + c_3\boldsymbol{r}_3. \tag{3}$$

Чтобы найти c_1 и c_3, умножим (3) справа векторно один раз на $\boldsymbol{r}_3$, а второй раз — на $\boldsymbol{r}_1$:

$$\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = c_1 (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3), \quad \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1 = c_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1). \tag{4}$$

Отсюда можно получить величины c_1 и c_3.

3. Уравнение орбиты имеет вид $r = p/(1 + \varepsilon \cos \theta)$. Отсюда

$$p - r = \varepsilon\xi, \tag{5}$$

где ξ — проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на ось апсид.

Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 проекции векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ на ось апсид. Из (3) следует, что $\xi_2 = c_1\xi_1 + c_3\xi_3$. Умножая это равенство на ε и учитывая (5), найдем

$$r_2 - p = c_1 (r_1 - p) + c_3 (r_3 - p). \tag{5a}$$

Из этого уравнения можно найти p.

4. Вычислим эксцентриситет ε. Обозначим орты осей орбитальной системы координат через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (вектор $\boldsymbol{i}$ направлен по линии апсид, вектор $\boldsymbol{j}$ лежит в плоскости орбиты и перпендикулярен к линии апсид, вектор $\boldsymbol{k}$ перпендикулярен к плоскости орбиты). Мы имеем

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{i} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|} [\boldsymbol{r}_3 (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{r}_1) - \boldsymbol{r}_1 (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{r}_3)];$$

то есть

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|} (\xi_1 \boldsymbol{r}_3 - \xi_3 \boldsymbol{r}_1). \tag{6}$$

Умножая обе части равенства (6) на $\varepsilon|r_1 \times r_3|$ и учитывая (5), найдем

$$\varepsilon |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3| \boldsymbol{j} = (p - r_1) \boldsymbol{r}_3 - (p - r_3) \boldsymbol{r}_1. \tag{7}$$

Приравнивая модули обеих частей последнего равенства, получим уравнение для определения эксцентриситета ε

$$\varepsilon |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3| = |(p - r_1) \boldsymbol{r}_3 - (p - r_3) \boldsymbol{r}_1|. \tag{8}$$

5. Орты $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{j}$ вычисляются при помощи уравнений (1) и (7). После этого можно вычислить орт $\boldsymbol{i}$ оси апсид по формуле

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Орт $\boldsymbol{\beta}$ линии узлов $A\Omega$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\beta} = \cos \Omega \cdot \boldsymbol{I} + \sin \Omega \cdot \boldsymbol{J}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}$ — орты осей Ax и Ay (см. рис. 4.7). Зная орт линии узлов $\boldsymbol{\beta}$ и орт линии апсид $\boldsymbol{i}$, легко найти и угол ω между ними.

6. Найдем момент t_0 прохождения спутника через перицентр. Ограничимся случаем эллиптического движения. Пусть известен момент t_2 прохождения спутника через точку P_2. Обозначим эксцентрическую аномалию спутника в этот момент через E_2. Тогда

$$\boldsymbol{r}_2 = a (\cos E_2 - \varepsilon) \boldsymbol{i} + b \sin E_2 \boldsymbol{j} \tag{11}$$

(см. формулу (3.4.17)).

Так как p и ε известны, то легко вычислить a и b:

$$a = p\,(1 - \varepsilon^2),\ b^2 = a^2\,(1 - \varepsilon^2),$$

Из (11) следует, что

$$a\,(\cos E_2 - \varepsilon) = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{i},\ b\sin E_2 = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{j}. \tag{12}$$

Из системы (12) можно найти угол E_2. При помощи уравнения Кеплера

$$E_2 - \varepsilon\sin E_2 = n\,(t_2 - t_0) \tag{13}$$

легко теперь вычислить момент t_0.

Задачи

1. Космическая ракета наблюдалась над пунктом P_1 с географическими координатами $\varphi_1 = 30°$, $\lambda_1 = 90°$. А через 6 часов она оказалась над пунктом P_2 с географическими координатами $\varphi_2 = 60°$, $\lambda_2 = 180°$. Полет совершается в таких условиях, что можно учитывать только тяготение ракеты к Земле и считать, что Земля имеет сферическую структуру. Вычислите наклонение орбиты к плоскости экватора.

2. В 12 часов дня по московскому времени 1 апреля 1960 года на одной из станций наблюдался спутник Земли. Были измерены его горизонтальные сферические координаты ρ, h, A и по этим данным затем вычислены его экваториальные декартовы координаты. Они оказались равными (d, d, d), где $d = 20\,000$ *км*. Аналогичные наблюдения были выполнены над тем же спутником на двух других станциях: на одной — утром того же дня, на другой — вечером. Экваториальные геоцентрические координаты спутника оказались такими: $P_1\,(2d,\ d,\ 0)$ (результаты утренних наблюдений) и $P_3\,(-d,\ 0,\ d)$ (вечерние наблюдения). Звездное время в Гринвиче в полночь на 1 апреля было 188,37°. Требуется по этим данным вычислить элементы орбиты спутника.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО ЕГО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ В ОДИН МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Пусть в момент t_1 известны радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}_1$ спутника относительно притягивающего центра A с гравитационным параметром K. Требуется найти элементы орбиты спутника.

1. Положение плоскости орбиты определяется ортом нормали к этой плоскости $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1|}. \tag{1}$$