Так как p и ε известны, то легко вычислить a и b:

$$a = p\,(1 - \varepsilon^2),\ b^2 = a^2\,(1 - \varepsilon^2),$$

Из (11) следует, что

$$a\,(\cos E_2 - \varepsilon) = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{i},\ b \sin E_2 = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{j}. \tag{12}$$

Из системы (12) можно найти угол E_2. При помощи уравнения Кеплера

$$E_2 - \varepsilon \sin E_2 = n\,(t_2 - t_0) \tag{13}$$

легко теперь вычислить момент t_0.

Задачи

1. Космическая ракета наблюдалась над пунктом P_1 с географическими координатами $\varphi_1 = 30°$, $\lambda_1 = 90°$. А через 6 часов она оказалась над пунктом P_2 с географическими координатами $\varphi_2 = 60°$, $\lambda_2 = 180°$. Полет совершается в таких условиях, что можно учитывать только тяготение ракеты к Земле и считать, что Земля имеет сферическую структуру. Вычислите наклонение орбиты к плоскости экватора.

2. В 12 часов дня по московскому времени 1 апреля 1960 года на одной из станций наблюдался спутник Земли. Были измерены его горизонтальные сферические координаты ρ, h, A и по этим данным затем вычислены его экваториальные декартовы координаты. Они оказались равными (d, d, d), где $d = 20\,000$ *км*. Аналогичные наблюдения были выполнены над тем же спутником на двух других станциях: на одной — утром того же дня, на другой — вечером. Экваториальные геоцентрические координаты спутника оказались такими: $P_1\,(2d,\ d,\ 0)$ (результаты утренних наблюдений) и $P_3\,(-d,\ 0,\ d)$ (вечерние наблюдения). Звездное время в Гринвиче в полночь на 1 апреля было 188,37°. Требуется по этим данным вычислить элементы орбиты спутника.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО ЕГО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ В ОДИН МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Пусть в момент t_1 известны радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}_1$ спутника относительно притягивающего центра A с гравитационным параметром K. Требуется найти элементы орбиты спутника.

1. Положение плоскости орбиты определяется ортом нормали к этой плоскости $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1|}. \tag{1}$$

Зная вектор $\boldsymbol{k}$, легко найти Ω и γ (см. предыдущий параграф).

2. Будем теперь рассматривать движение в орбитальной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$. В силу второго закона Кеплера

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\sigma}, \ |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1| = \sigma. \tag{2}$$

Зная константу площадей σ, можем найти параметр орбиты p:

$$p = \sigma^2/K. \tag{3}$$

3. Константа энергии h вычисляется по формуле $h = v_1^2 - 2K/r_1$. Теперь можно вычислить эксцентриситет орбиты:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \tag{4}$$

4. Вектор $\boldsymbol{v}_1$ можно однозначно разложить на радиальную и поперечную составляющие v_{1r} и v_{1n}. Действительно, если $\boldsymbol{\lambda}$ — орт вектора $\boldsymbol{r}_1$, то

$$v_{1r} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{v}_{1n} = \boldsymbol{v}_1 - v_{1r}\boldsymbol{\lambda}. \tag{6}$$

Из уравнения орбиты следует, что $r_1 = p/(1 + \varepsilon\cos\theta_1)$, откуда можно найти $\cos\theta_1$; знак же $\sin\theta_1$ найдем из уравнения для радиальной составляющей скорости: $v_{1r} = \frac{\sigma}{p}\varepsilon\sin\theta_1$. Поэтому мы сумеем найти и угол θ_1 (в пределах между 0 и 2π).

Орт $\boldsymbol{\beta}$ линии узлов можно считать известным: он может быть найден с помощью вектора $\boldsymbol{k}$ так же, как это было сделано в § 3.

Чтобы найти угол ω (угловое расстояние перицентра от узла), получим сначала угол $\omega + \theta_1$. Но это есть угол между двумя известными единичными векторами $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, и поэтому

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \cos(\omega + \theta_1), \ \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\lambda} = \sin(\omega + \theta_1)\,\boldsymbol{k}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{k}$ определяется по формуле (1). Из формул (7) однозначно определяется угол $\omega + \theta_1$ так, чтобы имели место неравенства

$$\theta_1 \leqslant \omega + \theta_1 < \theta_1 + 2\pi.$$

Зная $\omega + \theta_1$ и θ_1, найдем и ω.

5. Остается еще вычислить момент t_0 прохождения спутника через перицентр Π. Ограничимся случаем эллиптического движения.

Нам известна истинная аномалия θ_1 спутника в момент t_1. Поэтому эксцентрическую аномалию E_1 в этот момент можно определить по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}.$$

А зная E_1, вычислим t_0 из уравнения Кеплера:

$$E_1-\varepsilon\sin E_1=n\,(t_1-t_0).$$

Момент t_0 в случае гиперболической орбиты может быть получен аналогично.

Задачи

1. Известны гравитационный параметр притягивающего центра K, векторная константа площадей $\boldsymbol{\sigma}$, вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$. Вычислите по этим данным ε, a, Ω, γ, ω.

2. Пользуясь решением предыдущей задачи, укажите способ вычисления элементов орбиты спутника, если известны его радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}$ в какой-то один момент времени t_1.

§ 5. УТОЧНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО МНОГИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

1. В §§ 3 и 4 настоящей главы были изложены способы нахождения элементов орбиты спутника по трем известным положениям спутника в три момента времени или его положению и скорости в один момент. Однако получаемые таким образом элементы часто оказываются недостаточно точными из-за погрешностей в наблюдениях.

Можно получить более точные значения элементов, если использовать результаты многих наблюдений.

2. В § 3 мы рассмотрели способ определения элементов орбиты по нескольким положениям спутника в системе координат $Axyz$ с началом в центре Земли. Введем для элементов орбиты a, ε, Ω, γ, ω, t_0 обозначения a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 соответственно. Тогда для каждого момента