5. Остается еще вычислить момент t_0 прохождения спутника через перицентр Π. Ограничимся случаем эллиптического движения.

Нам известна истинная аномалия θ_1 спутника в момент t_1. Поэтому эксцентрическую аномалию E_1 в этот момент можно определить по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}.$$

А зная E_1, вычислим t_0 из уравнения Кеплера:

$$E_1-\varepsilon\sin E_1=n(t_1-t_0).$$

Момент t_0 в случае гиперболической орбиты может быть получен аналогично.

Задачи

1. Известны гравитационный параметр притягивающего центра K, векторная константа площадей $\boldsymbol{\sigma}$, вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$. Вычислите по этим данным ε, a, Ω, γ, ω.

2. Пользуясь решением предыдущей задачи, укажите способ вычисления элементов орбиты спутника, если известны его радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}$ в какой-то один момент времени t_1.

§ 5. УТОЧНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО МНОГИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

1. В §§ 3 и 4 настоящей главы были изложены способы нахождения элементов орбиты спутника по трем известным положениям спутника в три момента времени или его положению и скорости в один момент. Однако получаемые таким образом элементы часто оказываются недостаточно точными из-за погрешностей в наблюдениях.

Можно получить более точные значения элементов, если использовать результаты многих наблюдений.

2. В § 3 мы рассмотрели способ определения элементов орбиты по нескольким положениям спутника в системе координат $Axyz$ с началом в центре Земли. Введем для элементов орбиты a, ε, Ω, γ, ω, t_0 обозначения a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 соответственно. Тогда для каждого момента

наблюдения t спутника мы будем иметь соотношения

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(a_1, a_2, \ldots, a_6, t), \\ y &= y\,(a_1, a_2, \ldots, a_6, t), \\ z &= z\,(a_1, a_2, \ldots, a_6, t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если использовать эти соотношения для нескольких наблюдений (практически достаточно двух, но в § 3 мы для простоты использовали три), то из (1) мы получим достаточное число уравнений для определений шести неизвестных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

Фактически из каждого наблюдения мы получали три координаты спутника в декартовой системе координат $B\xi\eta\zeta$ с началом не в точке A, а в месте наблюдений B на поверхности Земли. Это могут быть и не прямоугольные координаты ξ, η, ζ, а какие-либо криволинейные (например, сферические) координаты ρ, φ, λ.

Будем считать, что нам известны формулы перехода от системы отсчета $Axyz$ к системе отсчета $B\xi\eta\zeta$. Иными словами, мы знаем формулы, которые в каждый момент времени t каждой тройке координат (x, y, z) сопоставляют однозначно тройку координат ρ, φ, λ, и наоборот,

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho\,(x, y, z), \varphi = \varphi\,(x, y, z), \lambda = \lambda\,(x, y, z); \\ &x = x\,(\rho, \varphi, \lambda), y = y\,(\rho, \varphi, \lambda), z = z\,(\rho, \varphi, \lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, мы знаем зависимость ρ, φ, λ от элементов орбиты $a_1, \ldots, a_6$ и времени t:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho\,(a_1, \ldots, a_6, t), \\ \varphi &= \varphi\,(a_1, \ldots, a_6, t), \\ \lambda &= \lambda\,(a_1, \ldots, a_6, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь в правой части написаны известные (может быть, громоздкие, но известные) функции. Допустим теперь, что в какой-то момент времени t_1 мы путем непосредственных наблюдений нашли одну из координат ρ, φ, λ, например φ:

$$\varphi = \varphi_1 \text{ при } t = t_1.$$

Тем самым мы получаем уравнение, которому должны удовлетворять шесть параметров орбиты:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_6, t_1) = \varphi_1.$$

Если мы в момент t_1 сумеем из измерений найти еще λ_1, то получим еще одно уравнение для тех же шести элементов:

$$\lambda(a_1, \ldots, a_6, t_1) = \lambda_1. \tag{4}$$

Из нескольких наблюдений мы таким образом можем найти систему нескольких (m) уравнений относительно элементов $a_1, \ldots, a_6$. Эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(a_1, \ldots, a_6) &= b_1, \\ \Phi_2(a_1, \ldots, a_6) &= b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(a_1, \ldots, a_6) &= b_m. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — известные функции; $b_1, \ldots, b_m$ — известные константы, полученные из наблюдений. Если нам все элементы $a_1, \ldots, a_6$ (или некоторые из них) не известны, то их часто все же можно найти из системы уравнений (5), даже если $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ имеют очень громоздкий вид.

Если $m = 6$, то из системы шести уравнений (5) можно, вообще говоря, найти шесть неизвестных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_6$ (что мы фактически и делали в предыдущих параграфах). Однако эти значения элементов будут неточными из-за погрешностей наблюдений. Если использовать большое число наблюдений, то m будет больше шести и из (5) для определения шести неизвестных мы получим переопределенную (несовместную) систему уравнений (5).

В общем случае мы имеем дело со следующей задачей. Имеется система m уравнений

$$\Phi_k(a_1, \ldots, a_6, t_k) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

с шестью неизвестными $a_1, \ldots, a_6$. Нам известны весьма грубые приближенные значения искомых величин

$$a_1 \approx a_1^{(0)}, \; a_2 \approx a_2^{(0)}, \; \ldots, \; a_6 \approx a_6^{(0)}. \tag{7}$$

Требуется указать способ получения более точных значений неизвестных.

Вычислим значения функций Φ_k при $a_1 = a_1^{(0)}, \ldots, a_6 = a_6^{(0)}$. Пусть

$$\Phi_k\,(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)}, t_k) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\Delta_1 = a_1 - a_1^{(0)},\ \Delta_2 = a_2 - a_2^{(0)}, \ldots, \Delta_6 = a_6 - a_6^{(0)}. \tag{9}$$

Считая функции Φ_k непрерывно дифференцируемыми и пренебрегая членами порядка выше первого относительно $\max|\Delta_k|$, мы можем написать приближенные равенства

$$\Phi_k\,(a_1, \ldots, a_6, t_k) - \Phi_k\,(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)}, t_k) = \\ = \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_1}\Delta_1 + \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_2}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_6}\Delta_6, \\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь частные производные вычисляются в точке $(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)})$. Введем обозначение

$$\left.\frac{\partial\Phi_k}{\partial a_i}\right|_{\substack{a_1 = a_1^{(0)} \\ \cdots\cdots \\ a_6 = a_6^{(0)}}} = A_{ki}. \tag{10}$$

Если под $(a_1, \ldots, a_6)$ понимать именно ту группу шести чисел, которая является решением системы (6), то мы получим систему m линейных уравнений с шестью неизвестными $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\Delta_1 + A_{12}\Delta_2 + \ldots + A_{16}\Delta_6 = B_1, \\ A_{21}\Delta_1 + A_{22}\Delta_2 + \ldots + A_{26}\Delta_6 = B_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}\Delta_1 + A_{m2}\Delta_2 + \ldots + A_{m6}\Delta_6 = B_m, \end{array}\right\} \tag{11}$$

где $B_1 = b_1 - \beta_1$, $B_2 = b_2 - \beta_2, \ldots, B_m = b_m - \beta_m$, причем $m > 6$.

Несовместную систему уравнений (11) нельзя решить «точно». Поэтому естественно найти приближенные значения поправок элементов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$, чтобы уравнения (11) удовлетворялись, в известном смысле, как можно точнее.

Это и делается *способом наименьших квадратов*, суть которого состоит в следующем.

Подбираем числа $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ так, чтобы оказалось минимальным следующее выражение:

$$\begin{aligned} T = &(A_{11}\Delta_1 + A_{12}\Delta_2 + \ldots + A_{16}\Delta_6 - B_1)^2 + \\ &+ (A_{21}\Delta_1 + A_{22}\Delta_2 + \ldots + A_{26}\Delta_6 - B_2)^2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (A_{m1}\Delta_1 + A_{m2}\Delta_2 + \ldots + A_{m6}\Delta_6 - B_m)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Для минимальности T необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial \Delta_2} = 0, \ldots, \frac{\partial T}{\partial \Delta_6} = 0. \tag{13}$$

Мы получаем таким образом, для шести неизвестных $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_6$ шесть уравнений. Проводя выкладки, легко убедиться, что соотношения (13) приводят к системе шести линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + \ldots + a_{16}\Delta_6 = c_1, \\ a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + \ldots + a_{26}\Delta_6 = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{61}\Delta_1 + a_{62}\Delta_2 + \ldots + a_{66}\Delta_6 = c_6, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где коэффициенты a_{pq} и (c_q, p, $q = 1, \ldots, 6$) определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_{pq} &= A_{1p}A_{1q} + A_{2p}A_{2q} + \ldots + A_{mp}A_{mq}, \\ c_q &= A_{1q}B_1 + A_{2q}B_2 + \ldots + A_{mq}B_q. \end{aligned}$$

Решая систему (14), найдем $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$.

После этого получаем новое — «первое» — приближение для элементов орбиты:

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)} + \Delta_1, \quad a_2^{(1)} = a_2^{(0)} + \Delta_2, \ldots, a_6^{(1)} = a_6^{(0)} + \Delta_6.$$

Отправляясь от этих приближенных значений неизвестных $a_1, \ldots, a_6$ и проводя дословно такие же рассуждения, как для «нулевого» приближения, мы сумеем вычислить «второе» приближение этих неизвестных $a_1^{(2)}, \ldots, a_6^{(2)}$. Аналогично можно построить третье, четвертое приближения искомого решения $(a_1, \ldots, a_6)$.

В общем случае должна быть, строго говоря, специальным рассуждением доказана сходимость последовательных приближений $(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_6^{(\nu)})$ к точному решению $(a_1, \ldots, a_6)$ системы уравнений (6).

До сих пор мы говорили об уравнениях для параметров $a_1, \ldots, a_6$, получаемых на основании наблюдений *координат* спутника φ, λ, ρ (это могут быть, как мы уже отметили, любые декартовы или криволинейные его координаты). Но можно получить такие же уравнения из наблюдений каких-то *других характеристик* спутника, например радиальной составляющей его скорости.

Незначительно усложняя использованный здесь прием, можно учесть не только *результаты* наблюдений, но и качество, ценность, «вес» каждого такого результата по сравнению с другими (подробнее об этом см. [4.2], [4.6], [4.8]).

§ 6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРАССЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ

1. Под *трассой спутника* Земли понимают проекцию орбиты спутника на поверхность Земли. Та точка P' земной поверхности, над которой в данный момент времени находится спутник P, называется *подспутниковой точкой*. Иными словами, точка P' является проекцией точки P на поверхность Земли. Мы здесь ради простоты будем считать поверхность Земли идеальной сферой и условимся, что проектирование орбиты спутника на земную сферу производится из центра Земли.

Для многих советских спутников Земли в печати заранее сообщались моменты их прохождения над отдельными городами. В этом параграфе мы выясним, какие математические расчеты дают возможность получить такой прогноз.

Выберем две прямоугольные системы отсчета с началом в центре Земли O (рис. 4.8): одну $O\xi\eta\zeta$, вращающуюся вместе с Землей вокруг земной оси, вторую $Oxyz$, невращающуюся, постоянно ориентированную в пространстве.