Отправляясь от этих приближенных значений неизвестных $a_1, \ldots, a_6$ и проводя дословно такие же рассуждения, как для «нулевого» приближения, мы сумеем вычислить «второе» приближение этих неизвестных $a_1^{(2)}, \ldots, a_6^{(2)}$. Аналогично можно построить третье, четвертое приближения искомого решения $(a_1, \ldots, a_6)$.

В общем случае должна быть, строго говоря, специальным рассуждением доказана сходимость последовательных приближений $(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_6^{(\nu)})$ к точному решению $(a_1, \ldots, a_6)$ системы уравнений (6).

До сих пор мы говорили об уравнениях для параметров $a_1, \ldots, a_6$, получаемых на основании наблюдений *координат* спутника φ, λ, ρ (это могут быть, как мы уже отметили, любые декартовы или криволинейные его координаты). Но можно получить такие же уравнения из наблюдений каких-то *других характеристик* спутника, например радиальной составляющей его скорости.

Незначительно усложняя использованный здесь прием, можно учесть не только *результаты* наблюдений, но и качество, ценность, «вес» каждого такого результата по сравнению с другими (подробнее об этом см. [4.2], [4.6], [4.8]).

§ 6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРАССЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ

1. Под *трассой спутника* Земли понимают проекцию орбиты спутника на поверхность Земли. Та точка P' земной поверхности, над которой в данный момент времени находится спутник P, называется *подспутниковой точкой*. Иными словами, точка P' является проекцией точки P на поверхность Земли. Мы здесь ради простоты будем считать поверхность Земли идеальной сферой и условимся, что проектирование орбиты спутника на земную сферу производится из центра Земли.

Для многих советских спутников Земли в печати заранее сообщались моменты их прохождения над отдельными городами. В этом параграфе мы выясним, какие математические расчеты дают возможность получить такой прогноз.

Выберем две прямоугольные системы отсчета с началом в центре Земли O (рис. 4.8): одну $O\xi\eta\zeta$, вращающуюся вместе с Землей вокруг земной оси, вторую $Oxyz$, невращающуюся, постоянно ориентированную в пространстве.

Система $O\xi\eta\zeta$ выбирается так: ось $O\xi$ направляется в точку встречи нулевого (гринвичского) меридиана с экватором, ось $O\zeta$ — к Северному полюсу Земли, ось $O\eta$ выбирается так, чтобы система отсчета $O\xi\eta\zeta$ была правоориентированной.

Систему $Oxyz$ выбираем таким образом: за ось Ox принимаем то положение оси $O\xi$, которое она (ось $O\xi$) занимает в определенный, заранее выбранный нами момент времени t_0. (Это может быть, например, момент прохождения спутника через перигей или момент, когда ось $O\xi$ проходит через точку весеннего равноденствия, и т. д.; в каждом конкретном случае следует заранее договариваться относительно выбора этого момента.)

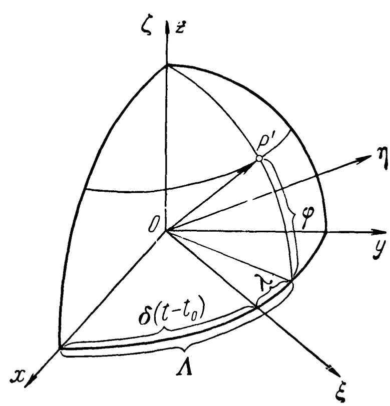

Рис. 4.8.

Ось Oz совместим с $O\zeta$, а ось Oy выберем так, чтобы система $Oxyz$ была правоориентированной. Очевидно, координатные плоскости Oxy и $O\xi\eta$ совпадают с плоскостью экватора Земли.

В момент t_0 оси вращающейся системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ совпадают с соответствующими осями невращающейся системы отсчета $Oxyz$. В системе отсчета $Oxyz$ Земля (и вместе с ней система отсчета $O\xi\eta\zeta$) вращается равномерно вокруг оси Oz.

В астрономии называют звездными сутками время, в течение которого Земля совершает полный оборот «относительно неподвижных звезд», то есть относительно системы отсчета с началом в центре Земли и осями, неизменно ориентированными в пространстве. Продолжительность звездных суток — 23 часа 56 минут (точнее, 86 164 секунд). Следовательно, за каждую минуту вращающаяся система отсчета $O\xi\eta\zeta$ (а вместе с ней и Земля) поворачивается относительно невращающейся системы отсчета $Oxyz$ на следующий угол

$$\delta = \frac{360^\circ}{24\cdot 60 - 4},$$

или

$$\delta = \frac{360^\circ}{24\cdot 60}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{360}} \approx \frac{360^\circ}{24\cdot 60}\left(1+\frac{1}{360}\right),$$

то есть

$$\delta \approx \frac{361^\circ}{24\cdot 60}\ \left(\text{точнее,}\quad \delta \approx \frac{360{,}986^\circ}{1440}\right). \tag{1}$$

В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ положение каждой точки на земной поверхности вполне характеризуется двумя географическими координатами: широтой φ ($-90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$) и долготой λ ($-180^\circ < \lambda \leqslant 180^\circ$).

В системе отсчета $Oxyz$ в любой момент времени t положение каждого пункта на поверхности Земли тоже можно охарактеризовать двумя сферическими координатами: широтой Φ и долготой Λ. Ясно, что

$$\Phi = \varphi \ \text{ и } \ \Lambda = \lambda + \delta\,(t - t_0). \tag{2}$$

2. Мы будем рассматривать далее лишь спутники с малым эксцентриситетом ($\varepsilon < 0{,}2$), движущиеся на небольших расстояниях от Земли ($H_\alpha < 2000$ *км*).

Небольшая сплюснутость реальной Земли, наличие атмосферы, притяжение Солнца и Луны и другие факторы приводят к непрерывному изменению элементов орбиты такого спутника. Можно показать (см. главу VIII, § 2), что сплюснутость Земли приводит к равномерному изменению долготы восходящего узла орбиты Ω. В системе отсчета $Oxyz$ плоскость орбиты вращается вокруг оси Oz со скоростью $\dot{\Omega}$, приблизительно равной $-\frac{1}{140}(R/a)^{3,5}\cos\gamma$ градусов в минуту. Здесь R — радиус Земли, a — большая полуось орбиты спутника, знак минус указывает на то, что при $0 < \gamma < 90^\circ$ вращение плоскости орбиты (движение восходящего узла Ω) происходит в направлении, противоположном направлению вращения Земли вокруг ее оси, а при

$90° < \gamma < 180°$ орбита вращается в том же направлении, в котором вращается Земля вокруг своей оси; в том и другом случае орбита вращается в направлении, противоположном направлению движения проекции самого спутника на плоскость экватора. Такого рода равномерное вращение плоскости орбиты называют *прецессией*.

Для большинства советских спутников Земли 1957—1962 годов ($\gamma \approx 65°$) прецессия сказывалась в том, что плоскость орбиты поворачивалась примерно на $15'$ за каждый оборот спутника (то есть на 3—4° в сутки) в направлении, противоположном направлению вращения Земли вокруг ее оси.

При решении задач о прогнозировании трассы спутника Земли мы учтем прецессию орбиты. Изменение же других элементов орбиты учитывать не будем. Это не приведет к чувствительным погрешностям, если мы будем интересоваться прогнозом на небольшие промежутки времени (порядка одних-двух суток) *).

Учитывая *механический* эффект от сжатия Земли, а именно, вращение плоскости орбиты спутника, мы тем не менее в наших *геометрических* рассуждениях разрешим себе принимать поверхность Земли за сферу. Это допустимо ввиду малости сжатия Земли **).

3. В некоторых случаях орбита спутника Земли имеет настолько малый эксцентриситет, что ее без значительной погрешности можно считать окружностью. В случае круговой орбиты прогнозирование трассы спутника упрощается.

---

*) Сплюснутость Земли может привести к значительным изменениям еще одного параметра орбиты — аргумента перигея ω: вследствие сплюснутости происходит вращение перигея. Однако, если наклонение орбиты близко к «критическому» значению 63,4°, то это вращение перигея мало, и им можно пренебречь при прогнозах трассы на короткие сроки. Именно такое положение имело место для большинства советских спутников 1957—1962 годов ($\gamma \approx 65°$). Например, для каждого из первых трех советских спутников скорость вращения перигея орбиты составляла примерно 0,03° за один оборот. В дальнейших рассуждениях мы ради простоты ограничимся случаем, когда допустимо пренебречь вращением перигея орбиты.

**) Сжатие Земли характеризуют числом $\alpha = (R_э - R_п)/R_э$, где $R_э$ и $R_п$ — соответственно экваториальный и полярный радиусы Земли; согласно измерениям $\alpha \approx 1/298,3$.

Решим следующую задачу.

Задача 1. В момент t_0 «круговой» спутник находился над пунктом A земной поверхности с географическими координатами φ_0, λ_0. Известны наклонение γ плоскости орбиты к плоскости экватора (для определенности полагаем, что $0 < \gamma < 90°$) и период T обращения спутника вокруг Земли. Требуется предсказать, над каким пунктом земной поверхности будет находиться спутник в заданный момент времени t.

Рассмотрим сначала движение относительно невращающейся системы отсчета $Oxyz$ и не будем пока учитывать прецессию орбиты.

Если бы после момента t_0 Земля не вращалась и если бы не вращалась плоскость орбиты спутника, то спутник в момент t находился бы над некоторой точкой B земной поверхности со сферическими координатами (Φ, Λ) (в системе отсчета $Oxyz$).

На рис. 4.9 CAB — трасса спутника, $\breve{AD}$ и $\breve{BF}$ — дуги меридианов больших окружностей, перпендикулярных к экватору. Пусть градусные меры дуг CA, CD, CB, CF, DA, BF равны соответственно $\psi_0, \alpha_0, \psi, \alpha, \varphi_0, \varphi$. По известным формулам для прямоугольных сферических треугольников*)

$$\sin\psi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\gamma}, \tag{3}$$

$$\sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\gamma}. \tag{4}$$

По этим формулам можно найти дуги ψ_0 и α_0. Выбор нужного значения ψ_0 среди различных дуг, удовлетворяющих условию (3), можно произвести на основании дополнительных сведений о движении спутника, например по тому, каков был период обращения спутника T, проходил ли спутник над пунктом A с юга на север или наоборот, и т. п. Аналогично обстоит дело с выбором дуги α_0.

Так как спутник движется по круговой орбите равномерно, то за $t - t_0$ минут его проекция на Землю проходит

*) См. «Справочник любителя астрономии» П. Г. Куликовского.

дугу AB, содержащую $\frac{360^\circ}{T}(t-t_0)$ градусов. Поэтому

$$\psi = \psi_0 + \frac{360^\circ}{T}(t-t_0). \qquad (5)$$

Для прямоугольного сферического треугольника BCF:

$$\sin\varphi = \sin\psi \sin\gamma, \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\psi \cos\gamma. \qquad (7)$$

Отсюда найдем φ и α. Дуга DF равна, таким образом, $\alpha - \alpha_0$ (градусам). Значит, для точки B $\Lambda = \lambda_0 + \alpha - \alpha_0$. Учтем

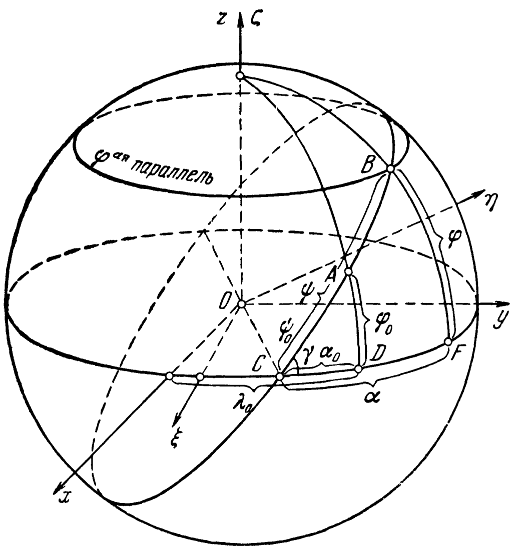

Рис. 4.9.

теперь прецессию орбиты спутника. Так как плоскость орбиты спутника вращается со скоростью $\dot{\Omega}$ градусов за одну минуту, то за $(t-t_0)$ минут орбита успела повернуться (относительно системы отсчета $Oxyz$) на угол $\dot{\Omega}(t-t_0)$, так что спутник будет находиться в момент t над пунктом N с той же широтой Φ, но с долготой

$$\Lambda = \lambda_0 + \alpha - \alpha_0 + \dot{\Omega}(t-t_0). \qquad (8)$$

Переходя теперь от системы отсчета $Oxyz$ к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, определим географические координаты (φ, λ) той точки M *вращающейся* Земли, которая окажется в момент t под спутником. Из формул (8), (2) получим

$$\varphi = \Phi,\ \lambda = \lambda_0 + (\alpha - \alpha_0) + (\dot{\Omega} - \delta)(t - t_0). \qquad (9)$$

4. Приступая теперь к рассмотрению *некруговых* орбит, решим следующую задачу.

Задача 2. Искусственный спутник Земли в момент времени t_0 находился в своем перигее $П$, который (в этот момент) оказался над пунктом A земной поверхности, имеющим географические координаты (φ_0, λ_0) (рис. 4.10). Известны следующие элементы орбиты спутника: угол γ наклона плоскости орбиты к плоскости экватора; период обращения спутника T, эксцентриситет орбиты ε. Требуется указать те моменты t, когда спутник будет находиться над пунктами с широтой φ. Какова будет в каждый такой момент времени долгота λ подспутниковой точки?

Для простоты ограничимся случаем $\varphi \geqslant \varphi_0 > 0$.

Рассмотрим сначала трассу в *невращающейся* системе отсчета $Oxyz$, причем *не* будем учитывать прецессию орбиты спутника. Пусть в момент t спутник оказался в точке Q, лежащей над φ-й параллелью. Проекцию спутника на земную сферу обозначим через B.

Введем обозначения для градусных мер дуг (рис. 4.10):

$$\smile{CA} = \omega,\ \smile{CD} = \alpha_0,\ \smile{CB} = \psi,\ \smile{CF} = \alpha.$$

Как и при решении задачи 1, мы можем найти ω и α_0 по формулам

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\gamma},\quad \sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (10)$$

Дуги ψ и α найдем из соотношений

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}, \qquad (11)$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (12)$$

Может случиться, что условию (11) вовсе не удовлетворяет ни одна дуга. Это значит, что в своем движении спутник

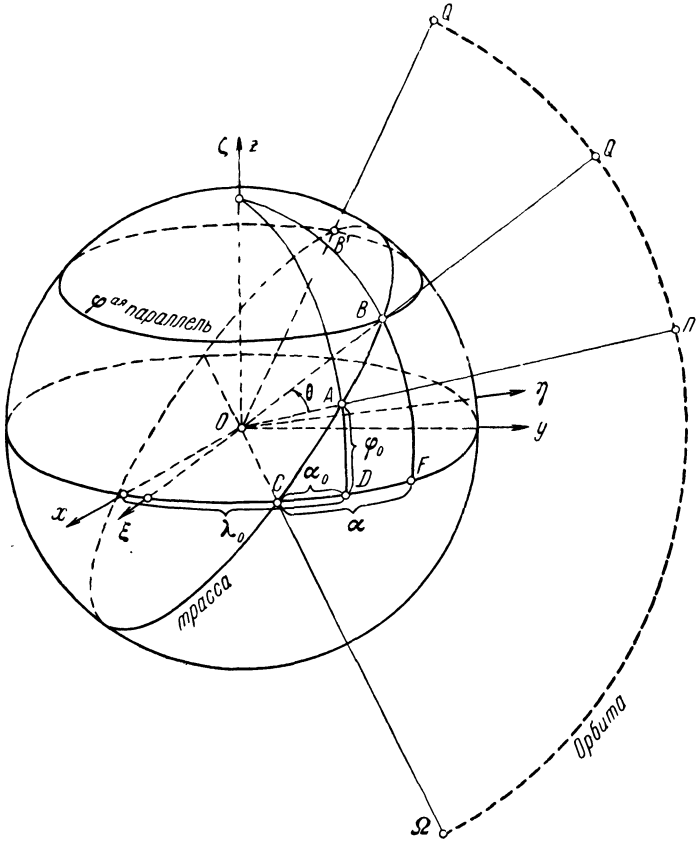

Рис. 4.10.

не доходит до параллели с широтой φ. В случае $0° < \gamma < 90°$ это будет, очевидно, иметь место, если $\varphi > \gamma$ или $\varphi < -\gamma$.

В остальных случаях условию (11) удовлетворяет бесконечное множество дуг. Если $\varphi = \gamma$ (или $\varphi = -\gamma$), то $\psi = 90° + 360° \cdot n$ или $\psi = 270° + 360° \cdot n$ (n — целое).

Пусть $\varphi_0 < \varphi < \gamma$. Обозначим через ψ_1 наименьшую положительную дугу, определяемую условием (11).

В пределах от 0° до 360° существуют две дуги ψ_1 и ψ_1' ($\psi_1' > \psi_1$), удовлетворяющие условию (11).

Аналогично существуют две дуги α_1 и α_1' ($\alpha_1' > \alpha_1$), заключенные между 0° и 360° и удовлетворяющие условию (12).

Перемещаясь по своей орбите от перигея Π, спутник в какой-то момент t_1 пройдет (впервые после t_0) над параллелью с широтой φ. Пусть Q — положение спутника в этот момент, а B — его подспутниковая точка.

При дальнейшем движении спутника его трасса поднимается севернее данной параллели. Но затем через некоторое время она начнет спускаться к югу и в какой-то момент t_1' снова пересечет эту параллель в какой-то точке B'. Такая картина будет повторяться в течение каждого оборота спутника.

Нетрудно найти момент t_1. Истинная аномалия θ_1 точки Q равна $\psi - \omega$. По истинной аномалии можно вычислить эксцентрическую аномалию E_1 точки Q. Затем, пользуясь уравнением Кеплера, найдем t_1:

$$t_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}(E_1 - \varepsilon \sin E_1). \tag{13}$$

Если эксцентриситет ε мал (мы именно этот случай имеем в виду), то можно вычислить $t_1 - t_0$ с помощью более простой приближенной формулы (см. (3.1.8))

$$t_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{180}\theta_1 - 2\varepsilon \sin\theta_1\right) = T\left(\frac{\theta_1}{360} - \varepsilon \frac{\sin\theta_1}{\pi}\right). \tag{14}$$

В момент t_1 спутник пройдет над данной параллелью с юга на север. То же повторится в любой момент

$$t_k = t_1 + kT,\ k = 1, 2, 3, \dots \tag{15}$$

Рассуждая так же, как при решении задачи 1, найдем долготу Λ точки B:

$$\Lambda = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0.$$

Если же учесть прецессию орбиты спутника, то получим, что спутник должен оказаться над пунктом N_k с долготой

$$\Lambda_k = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0 + \dot{\Omega}\,(t_k - t_0).$$

Переходя от системы отсчета $Oxyz$ к вращающейся системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, получим, что в момент t_k под спутником окажется пункт M_k с широтой φ и долготой

$$\lambda_k = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0 + (\dot{\Omega} - \delta)\,(t_k - t_0). \qquad (16)$$

Аналогично можно показать, что спутник пройдет над данной параллелью в момент t_1', определяемый формулой

$$t'_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}\,(E'_1 - \varepsilon \sin E'_1),$$

где E_1' — эксцентрическая аномалия точки орбиты спутника Q', лежащей над пунктом B'. Спутник пройдет над данной параллелью также в каждый момент t_k', определяемый формулой

$$t_k' = t_1' + (k-1)\,T. \qquad (17)$$

В каждый из этих моментов прохождение будет с севера на юг. При этом спутник будет проходить над пунктами M_k' с долготами

$$\lambda_k' = \lambda_0 + \alpha_1' - \alpha_0 + (\dot{\Omega} - \delta)\,(t_k' - t_0). \qquad (18)$$

Задачи

1. Орбита советского ИСЗ «Космос-IV» (апрель 1962 года) была близка к окружности (H_α = 330 *км*, H_π = 298 *км*). Примем ради простоты, что эта орбита была окружностью и что «Космос-IV» двигался вокруг Земли на высоте 314 *км*. По сообщению ТАСС плоскость орбиты была наклонена к плоскости экватора под углом $\gamma = 65°00'$. Под каким углом пересекала трасса спутника земной экватор?

2. Спутник вращается вокруг Земли по окружности на высоте 230 *км* над Землей. Орбита проходит над обоими полюсами Земли (спутник полярный). Под каким углом пересекает трасса спутника экватор?

3. Орбита первого советского спутника была наклонена к плоскости экватора под углом 65°. Спутник прошел над головой наблюдателя, находящегося на экваторе, с юго-запада на северо-восток. В этот момент наблюдатель замерил видимый угол между трассой спутника и направлением на восток. Чему должен был оказаться равным этот угол? Решите аналогичную задачу, когда трасса спутника пересекает экватор с северо-запада на юго-восток. Данные о спутнике: H_α = 950 *км*, H_π = 230 *км*, $\omega = 58°$.