ГЛАВА V

ЗАДАЧА n ТЕЛ

§ 1. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

1. В предшествующих главах мы изучали движение космического аппарата под действием тяготения лишь одного небесного тела. Между тем правильнее было бы учитывать притяжение космического аппарата и к другим небесным телам, хотя бы к тем, которые оказывают на него наиболее сильное воздействие. Так, например, при анализе движения межпланетной станции, посылаемой к Марсу, целесообразно принимать во внимание тяготение Земли, Солнца Марса. При изучении движения ракет, посылаемых к Луне, необходимо учитывать не только влияние Земли, но и Луны, а также Солнца.

Все эти примеры вполне укладываются в рамки знаменитой проблемы n тел. В настоящей главе мы намерены вкратце рассмотреть некоторые основные результаты, относящиеся к этой проблеме. Мы выясним, в чем заключаются математические затруднения, возникающие при ее решении. Результаты этой главы будут использованы в дальнейшем при изложении приближенной методики расчета траекторий межпланетных аппаратов.

Задачу о n телах рассмотрим сначала в инерциальной системе отсчета.

2. Пусть в пространстве выбрана некоторая инерциальная система отсчета $O\xi\eta\zeta$. Предположим, что имеются n материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, причем в начальный момент времени t_0 известны их положения и скорости. Из всех сил, действующих на материальные точки $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$, будем учитывать только силы их взаимного тяготения. Нас интересует вопрос: где окажется каждая из этих точек в любой наперед заданный момент t?

Ограничимся пока случаем только трех тел. Эти тела могут, например, представлять собой Солнце, Землю и Луну, или Солнце, Юпитер и Нептун, или космический корабль, Луну и Землю. Поскольку расстояния между телами обычно велики по сравнению с их размерами, можно считать массу каждого из этих тел сосредоточенной в его центре тяжести. Таким образом, три тела мы примем за три материальные *точки* A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 соответственно (рис. 5.1). Обозначим их координаты через (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), (ξ_3, η_3, ζ_3), радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_2$ и $\overrightarrow{OA}_3$ — соответственно через ρ_1, ρ_2, ρ_3; орты осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Очевидно,

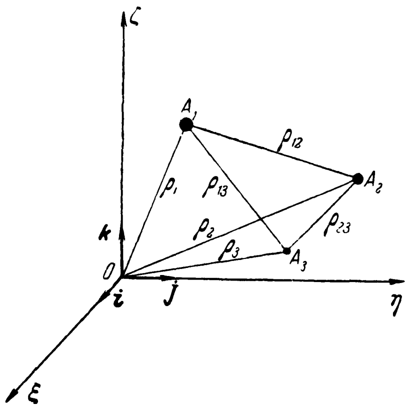

Рис. 5.1.

$$\rho_\nu = \xi_\nu \boldsymbol{i} + \eta_\nu \boldsymbol{j} + \zeta_\nu \boldsymbol{k}, \qquad \nu = 1, 2, 3. \tag{1}$$

На точку (A_1, m_1) действуют две силы: 1) сила $\boldsymbol{F}_{21}$, с которой ее притягивает точка (A_2, m_2); 2) сила $\boldsymbol{F}_{31}$, с которой ее притягивает точка (A_3, m_3). Суммарная сила, действующая на точку (A_1, m_1),

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}.$$

Величину проекции вектора $\boldsymbol{F}_1$ на ось $O\xi$ обозначим через $F_{1\xi}$; аналогичный смысл имеют величины $F_{1\eta}$, $F_{1\zeta}$; таким образом

$$\boldsymbol{F}_1 = F_{1\xi}\boldsymbol{i} + F_{1\eta}\boldsymbol{j} + F_{1\zeta}\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение движения точки (A_1, m_1) записывается на основании второго закона Ньютона в виде

$$m_1 \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1. \tag{3}$$

В силу закона всемирного тяготения

$$\boldsymbol{F}_{21} = f\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1), \quad \boldsymbol{F}_{31} = f\frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3}(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1),$$

где

$$\rho_{ij} = A_i A_j = |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|.$$

Поэтому уравнение (3) можно записать так:

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_1}{dt^2} = f\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) + \frac{m_1 m_3}{\rho_{14}^3}(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1)\right] \tag{4}$$

Векторное уравнение (4) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= F_{1\xi} \equiv f\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3}(\xi_3 - \xi_1)\right], \\
m_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= F_{1\eta} \equiv f\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\eta_2 - \eta_1) + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3}(\eta_3 - \eta_1)\right], \\
m_1 \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= F_{1\zeta} \equiv f\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{m_1 m_3}{\rho_{12}^3}(\zeta_3 - \zeta_1)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Чтобы переписать эти уравнения в более компактной форме, введем в рассмотрение вспомогательную скалярную функцию, так называемую силовую функцию данной задачи:

$$U = f\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}}\right], \tag{6}$$

или, короче,

$$U = f\sum_{\substack{s,\,\nu=1\\ \nu<s}}^{3} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}}. \tag{7}$$

Силовую функцию U можно наглядно истолковать как некоторую работу. Представим себе, что все три материальные точки (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) «закреплены» в пространстве. «Открепим» точку (A_3, m_3) и будем уносить ее в бесконечность. При этом придется преодолеть притяжение материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2). Для преодоления притяжения точки (A_1, m_1) придется совершить работу fm_1m_3/ρ_{13}; для преодоления притяжения точки (A_2, m_2) понадобится совершить работу fm_2m_3/ρ_{23}. Всего потребуется работа

$$f\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+f\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}.$$

После выведения точки A_3 в бесконечность «открепим» точку (A_2, m_2) и будем ее удалять в бесконечность. Для этого потребуется затратить работу fm_1m_2/ρ_{12}.

Значит, для того чтобы все три массы m_1, m_2, m_3 раздвинуть на бесконечно большие взаимные расстояния, потребуется совершить работу, равную

$$f\frac{m_1m_2}{\rho_{12}}+f\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+f\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}.$$

Итак, физический смысл силовой функции U — это работа, которую следует совершить, чтобы удалить три материальные точки на бесконечно большие расстояния друг от друга.

Вычислим $\partial U / \partial\xi_1$. Используя равенства

$$\rho_{12}=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2},$$
$$\rho_{13}=\sqrt{(\xi_3-\xi_1)^2+(\eta_3-\eta_1)^2+(\zeta_3-\zeta_1)^2},$$

найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial\xi_1}=f\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\xi_2-\xi_1)+f\frac{m_1m_3}{\rho_{31}^3}(\xi_3-\xi_1),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial\xi_1}=F_{1\xi}. \tag{8}$$

Совершенно аналогично можно показать, что $\partial U/\partial\eta_1=F_{1\eta}$; $\partial U/\partial\zeta_1=F_{1\zeta}$. Поэтому формулу (2) для силы $\boldsymbol{F}_1$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{\partial U}{\partial\xi_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial\eta_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial\zeta_1}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Обозначим через $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ равнодействующие сил, действующих соответственно на точки A_2 и A_3.

Для точек A_2 и A_3 можно, разумеется, провести такие же рассуждения, как для точки A_1, и получить аналогичные формулы.

Таким образом, *движение системы трех гравитирующих материальных точек* (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) *определяется в инерциальной системе отсчета системой трех векторных дифференциальных уравнений*

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}\boldsymbol{k}, \tag{11}$$

а функция U определяется формулой (6).

Каждое из векторных уравнений (10) можно заменить тремя скалярными уравнениями. Приравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ в левой и правой частях уравнений (10), получим следующую систему девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_\nu \frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}, \quad m_\nu \frac{d^2\eta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}, \quad m_\nu \frac{d^2\zeta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{12}$$

3. При движении системы меняются положения точек и их скорости. Однако из системы (10) можно найти несколько таких функций от координат и скоростей трех материальных точек, которые остаются в течение всего движения неизменными, инвариантными. Они имеют вид

$$\Phi(t, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3, \dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2, \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = C = \text{const}. \tag{13}$$

Зависимости вида (13) называют *первыми интегралами* системы (10). Записывая эти зависимости в координатном виде, получим первые интегралы системы (12):

$$\Psi(t, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_3;\ \dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\zeta}_3) = C = \text{const} \tag{14}$$