§ 2. ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

1. Интегралы движения барицентра системы. В предыдущем параграфе мы обозначили через $\boldsymbol{F}_{\nu s}$ силу, с которой точка (A_ν, m_ν) притягивает точку (A_s, m_s). Из третьего закона динамики следует, что

$$\boldsymbol{F}_{\nu s} = -\boldsymbol{F}_{s\nu}. \tag{1}$$

Уравнение движения точки (A_1, m_1) можно записать в виде

$$m_1\ddot{\rho}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}. \tag{2}$$

Аналогично для двух других точек (A_2, m_2), (A_3, m_3)

$$m_2\ddot{\rho}_2 = \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{12}, \tag{3}$$

$$m_3\ddot{\rho}_3 = \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23}. \tag{4}$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая (1), найдем:

$$m_1\ddot{\rho}_1 + m_2\ddot{\rho}_2 + m_3\ddot{\rho}_3 = 0.$$

Дважды интегрируя это уравнение, получим:

$$m_1\dot{\rho}_1 + m_2\dot{\rho}_2 + m_3\dot{\rho}_3 = \boldsymbol{a}, \tag{5}$$

$$m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + m_3\rho_3 = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

Формулы (5) и (6) представляют собой первые интегралы системы (5.1.10).

Пусть C — барицентр (центр масс, центр тяжести) системы трех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), ρ_C — радиус-вектор этой точки, то есть $\overrightarrow{OC}$, m — масса всей системы:

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \tag{7}$$

Тогда

$$\rho_C = \frac{1}{m}(m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + m_3\rho_3). \tag{8}$$

Поэтому равенства (5) и (6) могут быть записаны в виде

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_C = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{m}(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}). \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) (а значит, и равносильные им равенства (5) и (6)) выражают тот факт, что *барицентр системы движется в инерциальном пространстве равномерно и прямолинейно*. Вектор $\boldsymbol{b}$ определяет начальное положение барицентра, а вектор $\boldsymbol{a}$ — его скорость. Равенства (5) и (6) носят название «*интегралов движения барицентра системы*».

2. Интегралы площадей. Умножая равенства (2), (3) и (4) векторно слева соответственно на $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ и $\boldsymbol{\rho}_3$ и складывая их почленно, получим:

$$\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \\ = (\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12}) + (\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{F}_{23}) + \\ + (\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{31}). \end{aligned} \tag{11}$$

Но $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, так что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} = \\ = (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0, \end{aligned}$$

ибо векторы $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{F}_{12}$ коллинеарны. Аналогичные рассуждения показывают, что и два других выражения в скобках правой части равенства (11) равны нулю. Итак,

$$m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_3) = 0.$$

Это равенство можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_3)] = 0.$$

Отсюда

$$m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \boldsymbol{\sigma}, \tag{12}$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{3} m_\nu(\boldsymbol{\rho}_\nu \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — постоянный вектор.

Произведение массы m материальной точки (A, m) на векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ точки A (относительно некоторого начала отсчета O) и скорости $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ этой точки называют в механике *кинетическим моментом точки* (A, m) относительно точки O. Кинетический момент — это вектор. По абсолютной величине кинетический момент точки равен произведению массы m на абсолютную величину ее скорости v $(\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\rho}})$ и на расстояние OD от точки O до прямой, на которой лежит вектор скорости (рис. 5.2). Под *кинетическим моментом системы нескольких материальных точек* понимают сумму кинетических моментов всех точек системы.

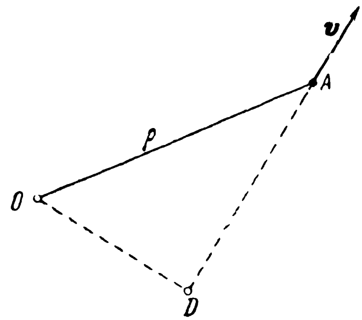

Рис. 5.2.

Формула (12) показывает, что *кинетический момент системы трех гравитирующих точек остается неизменным*. Эту формулу можно было бы назвать *интегралом сохранения кинетического момента*.

Пусть $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1\boldsymbol{i} + \sigma_2\boldsymbol{j} + \sigma_3\boldsymbol{k}$. Переходя в формуле (12) к записи в координатах, получим

$$m_1\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dot{\xi}_1 & \dot{\eta}_1 & \dot{\zeta}_1 \end{vmatrix} + m_2\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dot{\xi}_2 & \dot{\eta}_2 & \dot{\zeta}_2 \end{vmatrix} + m_3\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \dot{\xi}_3 & \dot{\eta}_3 & \dot{\zeta}_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\boldsymbol{i} + \sigma_2\boldsymbol{j} + \sigma_3\boldsymbol{k}.$$

Отсюда получаем три скалярных интеграла движения:

$$m_1(\eta_1\dot{\zeta}_1 - \zeta_1\dot{\eta}_1) + m_2(\eta_2\dot{\zeta}_2 - \zeta_2\dot{\eta}_2) + m_3(\eta_3\dot{\zeta}_3 - \zeta_3\dot{\eta}_3) = \sigma_1, \tag{14}$$

$$m_1(\zeta_1\dot{\xi}_1 - \xi_1\dot{\zeta}_1) + m_2(\zeta_2\dot{\xi}_2 - \xi_2\dot{\zeta}_2) + m_3(\zeta_3\dot{\xi}_3 - \xi_3\dot{\zeta}_3) = \sigma_2, \tag{15}$$

$$m_1(\xi_1\dot{\eta}_1 - \eta_1\dot{\xi}_1) + m_2(\xi_2\dot{\eta}_2 - \eta_2\dot{\xi}_2) + m_3(\xi_3\dot{\eta}_3 - \eta_3\dot{\xi}_3) = \sigma_3. \tag{16}$$

Пусть точки A_1, A_2, A_3 описывают в пространстве линии Γ_1, Γ_2, Γ_3. Проекции B_1, B_2, B_3 этих точек на плоскость

$\xi O \eta$ опишут линии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Эти проекции B_1, B_2, B_3 имеют относительно O определенные секториальные скорости dS_1/dt, dS_2/dt, dS_3/dt. Можно показать, что

$$\xi_\nu \dot{\eta}_\nu - \eta_\nu \dot{\xi}_\nu = 2\frac{dS_\nu}{dt}, \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Под *средней секториальной скоростью* (или взвешенным средним секториальных скоростей) точек B_1, B_2, B_3 понимают величину

$$\frac{1}{m}\left(m_1\frac{dS_1}{dt} + m_2\frac{dS_2}{dt} + m_3\frac{dS_3}{dt}\right) \tag{18}$$

(здесь $m = m_1 + m_2 + m_3$).

Формула (16) показывает, что *средняя секториальная скорость проекций точек* A_1, A_2, A_3 на плоскость $\xi O \eta$ остается постоянной. Аналогично обстоит дело с проекциями средней секториальной скорости на любую другую плоскость. Отсюда полученные первые интегралы движения (12) и (14) — (16) определяют изменение площадей, описываемых проекциями радиусов-векторов точек A_1, A_2 и A_3. Поэтому эти интегралы называют *интегралами площадей*.

3. Интеграл энергии. Умножим уравнения движения (5.1.10)

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \boldsymbol{F}_1, \quad m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \boldsymbol{F}_2, \quad m_3\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{F}_3$$

почленно скалярно на $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}_2$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}_3$ и сложим. Тогда получим

$$m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{F}_1\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \boldsymbol{F}_2\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \boldsymbol{F}_3\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_3.$$

При помощи формул (1) и (11) из § 1 отсюда находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^2 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3^2) =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial \xi_1}\frac{d\xi_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \eta_1}\frac{d\eta_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \zeta_3}\frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

где U — определяется формулой (5.1.6). Отсюда, интегрируя, имеем:

$$\frac{1}{2}(m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^2 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3^2) = U + h, \tag{19}$$

где h — константа.

Левая часть равенства (19) — кинетическая энергия системы. Формула (19) дает выражение кинетической энергии через силовую функцию U. Равенство (19) называют *интегралом энергии* (или интегралом живых сил).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЗАДАЧИ n ГРАВИТИРУЮЩИХ ТОЧЕК В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Результаты, полученные выше для случая трех гравитирующих точек, переносятся тривиальным образом на случай любого числа гравитирующих точек. Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой основных результатов для этого более общего случая.

1. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета; $\{(A_\nu,\ m_\nu)\}$, $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— система n гравитирующих материальных точек, $\boldsymbol{\rho}_\nu = \overrightarrow{OA}_\nu$ — радиус вектор-точки A_ν. Движение этих точек описывается системой n векторных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \tag{2}$$

Здесь $\rho_{\nu s}$ — расстояние между точками A_ν и A_s.

2. Функция

$$U = f \sum_{\substack{s,\ \nu=1 \\ \nu<s}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}} \tag{3}$$

называется *силовой функцией системы n точек*. С ее помощью можно $\boldsymbol{F}_\nu$ записать так:

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu} \boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu} \boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu} \boldsymbol{k}. \tag{4}$$