Левая часть равенства (19) — кинетическая энергия системы. Формула (19) дает выражение кинетической энергии через силовую функцию U. Равенство (19) называют *интегралом энергии* (или интегралом живых сил).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЗАДАЧИ n ГРАВИТИРУЮЩИХ ТОЧЕК В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Результаты, полученные выше для случая трех гравитирующих точек, переносятся тривиальным образом на случай любого числа гравитирующих точек. Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой основных результатов для этого более общего случая.

1. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета; $\{(A_\nu, m_\nu)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$,— система n гравитирующих материальных точек, $\boldsymbol{\rho}_\nu = \overrightarrow{OA}_\nu$ — радиус вектор-точки A_ν. Движение этих точек описывается системой n векторных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq \nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \tag{2}$$

Здесь $\rho_{\nu s}$ — расстояние между точками A_ν и A_s.

2. Функция

$$U = f \sum_{\substack{s, \nu=1 \\ \nu < s}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}} \tag{3}$$

называется *силовой функцией системы n точек*. С ее помощью можно $\boldsymbol{F}_\nu$ записать так:

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu} \boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu} \boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu} \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

3. Систему n векторных уравнений (1) можно заменить системой $3n$ скалярных уравнений

$$\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}, \quad \frac{d^2\eta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}, \quad \frac{d^2\zeta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

4. Из системы (1) вытекают следующие зависимости (первые интегралы):

а) интегралы движения барицентра системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \boldsymbol{a}, \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \tag{7}$$

($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы); эти интегралы можно переписать так:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_C = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{m}(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\rho}_C$ — радиус-вектор барицентра C системы, а m — суммарная масса системы;

б) интеграл площадей

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\boldsymbol{\rho}_\nu \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}; \tag{9}$$

в) интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu^2 = U + h. \tag{10}$$

Значения констант $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\sigma}$, h могут быть найдены, если известны координаты и скорости точек A_ν в произвольный («начальный») момент времени t_0.

5. Каждая из трех векторных зависимостей (6), (7), (9) может быть заменена тремя скалярными равенствами. Всего, таким образом, мы получим для системы (5) десять первых интегралов.

6. Десять первых интегралов системы, о которых мы говорили выше, известны уже более двухсот лет. Несмотря на многочисленные попытки, в течение этого времени не удалось найти ни одного нового первого интеграла, не являющегося логическим следствием из предыдущих.

Неудачи этих попыток оказались не случайными, ибо в конце XIX и начале XX века было показано, что если новые интегралы и существуют, то они должны быть весьма сложной структуры.

В 1887 году немецкий астроном и математик Г. Брунс доказал следующую теорему:

Если между декартовыми координатами и компонентами скоростей трех взаимно гравитирующих материальных точек существует алгебраическая зависимость, то она обязательно является следствием из известных десяти первых интегралов задачи трех тел.

Эту теорему обобщил на задачу n тел, а затем уточнил французский математик П. Пенлеве. Теорема Пенлеве гласит:

Каждый интеграл задачи n тел, в которой входят алгебраически (декартовы) компоненты скоростей гравитирующих точек (координаты могут входить любым образом, алгебраически или неалгебраически), является следствием известных десяти классических интегралов.

7. Мы видели, что задача трех тел сводится к решению системы трех векторных дифференциальных уравнений второго порядка, а следовательно, девяти скалярных уравнений второго порядка.

В теории дифференциальных уравнений устанавливается, что знание каждого нового первого интеграла (в скалярной форме) позволяет понизить порядок системы на единицу.

Знание десяти первых интегралов задачи трех тел позволяет свести ее к системе восьмого порядка (18—10). Особенности структуры самих уравнений задачи трех тел позволяют свести ее решение к системе шестого порядка (и еще двум квадратурам).

Аналогично решение задачи n тел сводится к решению системы порядка $6n$. Но знание ее десяти первых интегралов и особенности структуры уравнений позволяют свести ее к системе порядка $6n - 12$.

8. В настоящее время разработаны достаточно мощные методы приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, и систему дифференциальных уравнений задачи трех тел можно решить приближенно для любого заданного конечного промежутка времени. При этом с увеличением промежутка времени значительно возрастает объем вычислительной работы. Задавшись начальными данными [координатами и компонентами скоростей трех гравитирующих точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)], мы можем после некоторой серии арифметических оычислений найти координаты каждой из этих точек через впределенные (малые) промежутки времени. Для другого набора начальных данных требуется, вообще говоря, весь расчет произвести заново.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ИХ БАРИЦЕНТРА

1. Дифференциальные уравнения задачи и первые интегралы. Под движением системы точек относительно некоторой точки C мы понимаем ее движение относительно прямоугольной системы координат $CXYZ$ с началом в точке C и осями, сохраняющими неизменные направления в пространстве.

Возьмем в качестве точки C барицентр (центр масс) материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n).

Наряду с системой отсчета $CXYZ$ рассмотрим инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$; пусть соответствующие координатные оси этих систем одинаково направлены. Введем обозначения: $\overrightarrow{OA}_\nu = \boldsymbol{\rho}_\nu$, $\overrightarrow{CA}_\nu = \boldsymbol{R}_\nu$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\rho}_C$, $A_\nu A_s = R_{\nu s}$ $(\nu, s = 1, 2, \ldots, n)$. Ясно, что

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_\nu. \tag{1}$$

В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ имеет место второй закон Ньютона. Поэтому

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq \nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \tag{3}$$