8. В настоящее время разработаны достаточно мощные методы приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, и систему дифференциальных уравнений задачи трех тел можно решить приближенно для любого заданного конечного промежутка времени. При этом с увеличением промежутка времени значительно возрастает объем вычислительной работы. Задавшись начальными данными [координатами и компонентами скоростей трех гравитирующих точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)], мы можем после некоторой серии арифметических оычислений найти координаты каждой из этих точек через впределенные (малые) промежутки времени. Для другого набора начальных данных требуется, вообще говоря, весь расчет произвести заново.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ИХ БАРИЦЕНТРА

1. Дифференциальные уравнения задачи и первые интегралы. Под движением системы точек относительно некоторой точки C мы понимаем ее движение относительно прямоугольной системы координат $CXYZ$ с началом в точке C и осями, сохраняющими неизменные направления в пространстве.

Возьмем в качестве точки C барицентр (центр масс) материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), $\ldots$, (A_n, m_n).

Наряду с системой отсчета $CXYZ$ рассмотрим инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$; пусть соответствующие координатные оси этих систем одинаково направлены. Введем обозначения: $\overrightarrow{OA}_\nu = \boldsymbol{\rho}_\nu$, $\overrightarrow{CA}_\nu = \boldsymbol{R}_\nu$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\rho}_C$, $A_\nu A_s = R_{\nu s}$ $(\nu, s = 1, 2, \ldots, n)$. Ясно, что

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_\nu. \tag{1}$$

В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ имеет место второй закон Ньютона. Поэтому

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq \nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \tag{3}$$

Но

$$\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu = (\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_s) - (\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_\nu) = \boldsymbol{R}_s - \boldsymbol{R}_\nu,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}^3}(\boldsymbol{R}_s - \boldsymbol{R}_\nu). \tag{4}$$

В силу равенства (1)

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_C + \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu. \tag{5}$$

Из интеграла движения барицентра системы (5.3.8) следует, что $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_C = 0$. Поэтому $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu$ и, следовательно, формулы (2) принимают вид

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Итак, движение n рассматриваемых точек в системе отсчета $CXYZ$ описывается системой n дифференциальных уравнений (6), где функции $\boldsymbol{F}_\nu$ определяются формулой (4).

Но формулы (6) и (4) могут быть формально получены соответственно из формул (5.3.1) и (5.3.2), если в последних попросту заменить букву $\boldsymbol{\rho}$ с индексами буквой $\boldsymbol{R}$ с теми же индексами. Поэтому если в каком-либо логическом следствии из формул (5.3.1) и (5.3.2) формально заменим $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{R}$, то получим логическое следствие из формул (6) и (4). В частности, в системе отсчета $CXYZ$ имеют место зависимости, аналогичные соотношениям (6) — (10) из § 3 (но с другими константами, чем в системе отсчета $O\xi\eta\zeta$):

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = \boldsymbol{a}_1 \tag{7}$$

(здесь $\boldsymbol{V}_\nu \equiv \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$),

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = \boldsymbol{a}_1 t + \boldsymbol{b}_1, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\boldsymbol{R}_\nu \times \boldsymbol{V}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}_1, \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu^2 = U + h, \tag{10}$$

где h — скалярная константа, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_1$ — постоянные векторы, а

$$U = f \sum_{\substack{\nu, s=1 \\ \nu < s}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}}. \tag{10'}$$

Величины $\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu$ и $\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu$ представляют собой радиус-вектор и скорость барицентра рассматриваемой системы точек, то есть точки C. Но при нашем специальном выборе системы координат точка C все время остается началом координат, так что оба эти вектора неизменно равны нулю:

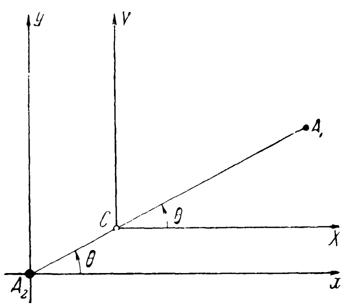

Рис. 5.3.

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = 0. \tag{12}$$

2. Движение двух материальных точек относительно их барицентра (рис. 5.3).

Пусть точка C — барицентр двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2). Плоскость, в которой происходит движение одной из двух точек относительно другой, примем за плоскость XCY. Дифференциальные уравнения движения этих точек [см. (6) и (4)] примут вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = f\frac{m_2}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1), \quad \frac{d^2\boldsymbol{R}_2}{dt^2} = f\frac{m_1}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2). \tag{13}$$

Формула (11) запишется так:

$$m_1\boldsymbol{R}_1 + m_2\boldsymbol{R}_2 = 0. \tag{14}$$

Она выражает тот известный факт, что барицентр двух материальных точек лежит на отрезке, соединяющем эти точки, и его расстояния от этих точек обратно пропорциональны их массам («правило рычага Архимеда»).

Формула (12) дает

$$m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = 0, \tag{15}$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$V_1 : m_2 = V_2 : m_1. \tag{16}$$

Формула (15) — это «правило рычага для скоростей». Она показывает, что при движении двух материальных точек относительно барицентра векторы их скоростей в каждый момент параллельны и противоположно направлены. По величине скорости материальных точек обратно пропорциональны их массам, так что «более тяжелая» материальная точка движется (относительно барицентра) с меньшей линейной скоростью. Из (2) следует, что $m_1R_1 = m_2R_2$. Поэтому

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2},$$

то есть угловые скорости точек A_1 и A_2 в каждый момент времени равны между собой.

Интегралы энергии и площадей запишутся так:

$$\frac{1}{2}(m_1V_1^2 + m_2V_2^2) = f\frac{m_1m_2}{R_{12}} + h \tag{17}$$

и

$$m_1(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1) + m_2(\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{18}$$

Последнее уравнение перепишем в скалярной форме. Вектор $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1$ направлен перпендикулярно к плоскости CXY и равен удвоенной секториальной скорости точки A_1 относительно барицентра C:

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1 = 2\frac{dS_1}{dt}\boldsymbol{k},$$

а вектор $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2$ равен удвоенной секториальной скорости точки A_2 и тоже направлен перпендикулярно к плоскости CXY:

$$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2 = 2\frac{dS_2}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Но в таком случае и вектор $\boldsymbol{\sigma}$ направлен перпендикулярно к плоскости CXY. Пусть $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\boldsymbol{k}$; тогда получим $\frac{1}{m}\left(m_1\frac{dS_1}{dt} + m_2\frac{dS_2}{dt}\right) = \frac{\sigma}{2m}$, где $m = m_1 + m_2$, откуда

$$\frac{1}{m}(m_1S_1 + m_2S_2) = \frac{\sigma}{2m}(t - t_0). \tag{19}$$

В последнем равенстве S_1 и S_2 — площади секторов, заметенных радиусами-векторами $\overrightarrow{CA}_1$ и $\overrightarrow{CA}_2$ за время, протекшее от момента t_0 до момента t.

Число $\frac{1}{m}(m_1S_1 + m_2S_2)$ называется средним значением или взвешенным средним этих площадей.

Таким образом, согласно формуле (19), среднее значение площадей, заметенных радиусами-векторами $\overrightarrow{CA}_1$ и $\overrightarrow{CA}_2$ двух взаимно гравитирующих материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2), пропорционально времени, в течение которого эти площади были заметены. Это — новый вариант второго закона Кеплера.

Формула (14) позволяет найти орбиты, которые будут описаны материальными точками A_1 и A_2 относительно их барицентра C.

Действительно, из (14) следует, что

$$\boldsymbol{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{R}_1, \quad \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\boldsymbol{R}_1,$$

$$R_{12} = |\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1| = \frac{m_1 + m_2}{m_2}R_1.$$

Поэтому [см. (13)]

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = -f\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}, \tag{20}$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = -K_1\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3},$$

где

$$K_1 = f\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{21}$$

В главе II мы уже встречались с уравнениями вида

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \ (K > 0) \tag{22}$$

и убедились, что если движение точки определяется уравнением вида (22), то траектория точки — коническое сечение с фокусом в начале координат.

Итак, *материальная точка* (A_1, m_1) *будет двигаться относительно барицентра C так, как если бы она была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в барицентре C и имеющей гравитационный параметр*

$$K_1 = f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{23}$$

Аналогично будет двигаться и точка A_2, но в отношении ее следует полагать, что фиктивная звезда, которая помещена в барицентре C, имеет уже другой гравитационный параметр, а именно

$$K_2 = f\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{24}$$

Формула $\boldsymbol{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{R}_1$ показывает, что орбиты точек A_1 и A_2 относительно их барицентра гомотетичны (центрально подобны) и коэффициент подобия равен $-m_1/m_2$. Поэтому, зная орбиту одной из этих точек, легко найти орбиту другой.

Выясним связь между орбитой Γ точки A_1 *относительно точки* A_2 и орбитой γ точки A_1 *относительно барицентра* C. Вместе с точкой A_1 обращается вокруг точки A_2 и точка C. Введем обозначения: A_2x — ось апсид орбиты Γ, $\overrightarrow{A_2A_1} = \boldsymbol{r}$, $\sphericalangle xA_2A_1 = \theta$. Тогда уравнение орбиты Γ можно будет записать в виде

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

Подсчитаем теперь R_1 и R_2. Мы имеем:

$$r = R_2 + R_1 = \frac{m_1}{m_2}R_1 + R_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2}R_1,$$

откуда

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r. \tag{25}$$

Поэтому

$$R_1 = \frac{p_1}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

где

$$p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p. \tag{26}$$

Аналогично можно показать, что

$$R_2 = \frac{p_2}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

где

$$p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p. \tag{27}$$

Таким образом,

$$p_1 : p_2 : p = m_2 : m_1 : (m_1 + m_2). \tag{28}$$

Эксцентриситеты же у всех трех орбит одинаковы. Таким образом, две материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) *описывают вокруг их барицентра C конические сечения той же формы, что и орбита точки A_1 относительно точки A_2*. Отношение же размеров этих орбит вполне характеризуется соотношением (28).

3. Лагранжевы движения. Мы видели выше, что благодаря взаимодействию двух материальных точек каждая из них движется относительно их барицентра так, как если бы она притягивалась некоторой массой, помещенной в барицентре.

Аналогично обстоит дело в некоторых случаях при наличии трех и более гравитирующих материальных точек.

Еще в мемуаре, опубликованном в 1772 году, известный французский математик Ж. Л. Лагранж интересовался таким вопросом: какими особенностями должно обладать движение трех взаимно тяготеющих материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) для того, чтобы расстояния между ними в течение всего движения оставались равными, то есть чтобы в любой момент времени

$$R_{12} = R_{23} = R_{31}. \tag{29}$$

Оказывается, что *в этом случае точка* A_1 *будет двигаться относительно барицентра* C *точек* (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) *в точности так же, как она двигалась бы, если бы была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в барицентре* C *и имеющей массу*

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \tag{30}$$

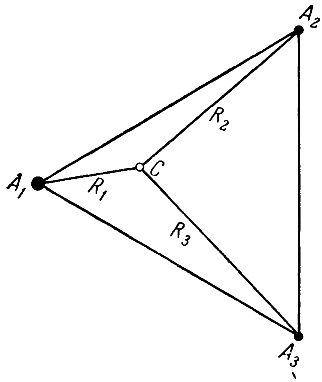

Рис. 5.4.

Докажем это. Будем придерживаться обозначений, принятых в начале этого параграфа. В нашем случае [см. (4)]

$$\boldsymbol{F}_1 = fm_1 \left[\frac{m_2}{R_{12}^3} (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1) + \frac{m_3}{R_{13}^3} (\boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1) \right].$$

Так как $R_{13} = R_{12}$ и $m_1 \boldsymbol{R}_1 + m_2 \boldsymbol{R}_2 + m_3 \boldsymbol{R}_3 = 0$, то

$$\boldsymbol{F}_1 = -fm_1 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{R_{12}^3} \boldsymbol{R}_1.$$

Но так как C — барицентр точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) (рис. 5.4), то

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{A_1C} = m_1 \overrightarrow{A_1A_1} + m_2 \overrightarrow{A_1A_2} + m_3 \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Возведем обе части последнего равенства скалярно в квадрат и учтем, что

$$\overrightarrow{A_1A_1} = 0, \quad A_1A_2 = A_1A_3 = R_{12}, \quad \overrightarrow{A_1C} = -\boldsymbol{R}_1.$$

Тогда получим:

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 R_1^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) R_{12}^2.$$

Следовательно,

$$R_{12}^3 = (m_1 + m_2 + m_3)^3 R_1^3/(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2},$$

так что

$$\boldsymbol{F}_1 = -f m_1 \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}. \tag{31}$$

Так как по второму закону Ньютона $\boldsymbol{F}_1 = m_1\, d^2\boldsymbol{R}_1/dt^2$, то уравнение движения точки A_1 имеет вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = -f M_1 \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}, \tag{32}$$

где M_1 определяется формулой (30). Но это и есть уравнение движения непритягивающего спутника относительно точки C, в которой помещена масса M_1. Справедливость высказанного выше предположения доказана. Аналогично обстоит дело и с точками A_2 и A_3. При $m_3 = 0$ формула (32) переходит в формулу (20).

Уже в XX столетии французский астроном Андуайе и немецкий математик Каратеодори показали, что движение трех материальных точек, при котором все время соблюдается условие (29), обязательно должно происходить в одной и той же неизменяемой плоскости.

Для того чтобы условие (29) выполнялось в течение всего времени движения, необходим специальный выбор «начальных» значений скоростей материальных точек A_1, A_2, A_3. Мы опустим здесь доказательство того, что такой выбор «начальных» скоростей возможен.

При соблюдении в течение всего времени движения условия (29) расстояния между материальными точками могут меняться, но они остаются попарно равными между собой. Можно показать, что в этом случае три точки описывают *подобные* конические сечения относительно барицентра.

Возможно ли такое движение трех материальных точек, при котором сохраняются неизменными *отношения* расстояний между этими точками? Можно показать, что в этом случае необходимо, чтобы три точки либо все время были на равных расстояниях друг от друга, либо лежали на одной прямой (в последнем случае положение трех точек не может быть произвольным).