§ 5. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ИЗ НИХ

1. Рассмотрим систему n взаимно гравитирующих материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), . . . , (A_{n-1}, m_{n-1}). Начало координат выберем в точке A_0, оси координат выберем так, чтобы они сохраняли постоянное направление в пространстве.

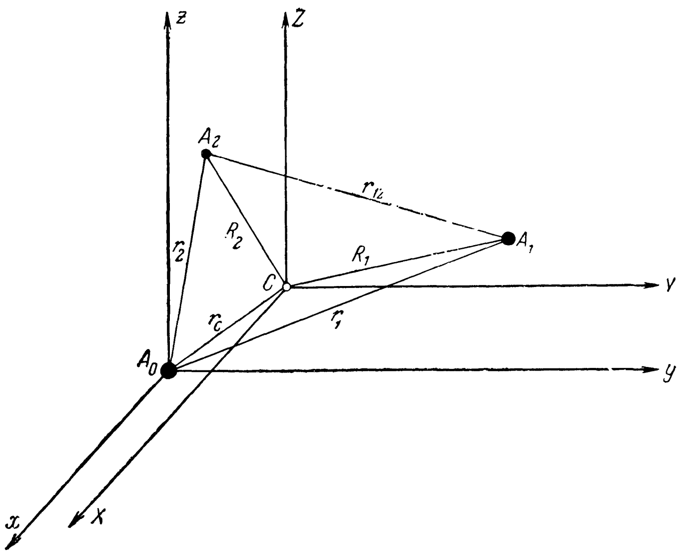

Рис. 5.5.

В этом параграфе мы выведем дифференциальные уравнения, определяющие движение материальных точек относительно указанной здесь системы отсчета.

Для простоты ограничимся сначала случаем трех точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), (A_2, m_2).

Наряду с системой отсчета A_0xyz (рис. 5.5) с осями, постоянно ориентированными в пространстве, рассмотрим еще систему отсчета $CXYZ$, имеющую своим началом барицентр C трех данных точек и оси, одинаково направленные с осями системы A_0xyz. Пусть

$$\overrightarrow{CA_0} = \boldsymbol{R}_0, \ \overrightarrow{CA_1} = \boldsymbol{R}_1, \ \overrightarrow{CA_2} = \boldsymbol{R}_2, \ \overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_{12}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{R}_{01} = \overrightarrow{A_0A_1} = \boldsymbol{r}_1, \ \boldsymbol{R}_{02} = \overrightarrow{A_0A_2} = \boldsymbol{r}_2, \ \overrightarrow{A_0C} = \boldsymbol{r}_C, \quad (2)$$

$$m = m_0 + m_1 + m_2. \quad (3)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_C = -\boldsymbol{R}_0, \ \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0, \ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2), \quad (5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ddot{\boldsymbol{R}}_2 - \ddot{\boldsymbol{R}}_0. \quad (6)$$

Из формул (5.4.6) и (5.4.4) ясно, что в данном случае

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_2 = f\left[\frac{m_0}{R_{02}^3}(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2) + \frac{m_1}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)\right].$$

Используя равенства (1), (2), (4), получим:

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_2 = f\left[-\frac{m_0}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 + \frac{m_1}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right]. \quad (7)$$

Аналогично легко показать, что

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_0 = f\left[\frac{m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2\right]. \quad (8)$$

Из (6) — (8) выводим дифференциальное уравнение движения точки A_2 относительно A_0:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 + fm_1\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right). \quad (9)$$

Совершенно такие же рассуждения позволяют получить дифференциальное уравнение движения точки A_1

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 + fm_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right). \quad (10)$$

2. Выясним физический смысл отдельных членов уравнения (9). Условимся здесь называть материальную точку

(A_0, m_0) центральным телом, материальную точку (A_2, m_2) — спутником центрального тела (A_0, m_0), а материальную точку (A_1, m_1) — возмущающим телом.

Если бы возмущающего тела вовсе не было, то спутник под влиянием центрального тела получил бы ускорение

$$\boldsymbol{a} = -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2. \tag{11}$$

Из-за вмешательства возмущающего тела спутник получает дополнительное ускорение

$$\boldsymbol{\Phi} = fm_1\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right). \tag{12}$$

Это дополнительное ускорение $\boldsymbol{\Phi}$ представляет собой некоторую разность:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}. \tag{12$'$}$$

Уменьшаемое $\boldsymbol{b} \equiv fm_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/r_{12}^3$ можно записать так:

$$\boldsymbol{b} = -fm_1\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}. \tag{13}$$

Вектор $\boldsymbol{b}$ — это ускорение, которое получил бы спутник, если бы на него воздействовало только возмущающее тело, а сам он и центральное тело потеряли бы способность притягивать.

Вычитаемое в выражении (12)

$$\boldsymbol{c} \equiv fm_1\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} \tag{13$'$}$$

— это ускорение, которое сообщает возмущающее тело центральному телу.

Таким образом, *дополнительное ускорение* $\boldsymbol{\Phi}$, *которое получает спутник из-за вмешательства возмущающего тела, равно избытку ускорения, сообщаемого возмущающим телом спутнику, над ускорением, сообщаемым возмущающим телом центральному телу*. При этом имеется в виду, что 1) каждое из этих ускорений рассматривается при движении относительно возмущающего тела, 2) при вычислении этих ускорений центральное тело и спутник рассматриваются как непритягивающие (а лишь притягиваемые) точки.

3. Система двух векторных дифференциальных уравнений (9) и (10) равносильна системе из шести скалярных дифференциальных уравнений второго порядка. Если в системе отсчета A_0xyz точки A_1 и A_2 имеют соответственно координаты x_1, y_1, z_1 и x, y, z, то есть

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_2 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

то

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ r_{12} &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Уравнения (9) и (10) можно заменить шестью скалярными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}x + fm_1\left(\frac{x_1 - x}{r_{12}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}y + fm_1\left(\frac{y_1 - y}{r_{12}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}z + fm_1\left(\frac{z_1 - z}{r_{12}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right); \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}x_1 + fm_2\left(\frac{x - x_1}{r_{12}^3} - \frac{x}{r_2^3}\right), \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}y_1 + fm_2\left(\frac{y - y_1}{r_{12}^3} - \frac{y}{r_2^3}\right), \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}z_1 + fm_2\left(\frac{z - z_1}{r_{12}^3} - \frac{z}{r_2^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

В тех случаях, которые интересны для космонавтики, одно из трех тел (космический аппарат) имеет ничтожно малую массу по сравнению с двумя другими телами (например, m_2 пренебрежимо мало по сравнению с m_0 и m_1). Поэтому допустимо полагать $f(m_0 + m_2) \approx fm_0 \equiv K_0$, где K_0 — гравитационный параметр центрального тела (A_0, m_0). Кроме того, движение возмущающего тела A_1 относительно центрального тела можно считать известным —

космический аппарат (A_2, m_2) практически не влияет на движение возмущающего тела (A_1, m_1). Поэтому задача определения движения космического аппарата сводится к решению системы трех уравнений второго порядка (15).

4. Формулы (9) и (10) нетрудно обобщить на случай системы из любого числа материальных точек. Пусть рассматривается движение n взаимно гравитирующих материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), ..., (A_{n-1}, m_{n-1}) в системе отсчета с началом A_0 и с осями, сохраняющими неизменную ориентацию в пространстве. Введем обозначения:

$$\overrightarrow{A_0A_\nu} = \boldsymbol{r}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$r_{\nu s} = |\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_\nu|;$$

$$\boldsymbol{\Phi}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\nu}}^{n-1} m_s \left(\frac{\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_\nu}{r_{\nu s}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_s}{r_s^3} \right). \tag{17}$$

Тогда движение рассматриваемых $n-1$ материальных точек описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_\nu}{r_\nu^3}\boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\Phi}_\nu,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{18}$$

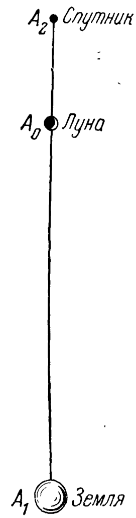

Рис. 5.6.

5. П р и м е р. Пусть в какой-то момент времени круговой искусственный спутник Луны находится на продолжении отрезка, соединяющего центр Земли с центром Луны (рис. 5.6). Каким образом повлияет притяжение Земли на движение спутника относительно Луны?

В качестве центрального тела в данном случае выбираем Луну; Земля будет возмущающим телом. Благодаря наличию Земли спутник получает дополнительное ускорение Φ. Подсчитаем его. Обозначим через A_1 и A_0 центры Земли и Луны, через A_2 спутник, через $\boldsymbol{k}$ орт вектора $\overrightarrow{A_1A_0}$, через m_0, m_1, m_2 массы Луны, Земли и спутника.

Пусть $A_0A_1 = R$, $A_0A_2 = \rho$. Тогда по формулам (13) и (13′)

$$\boldsymbol{b} = -f\frac{m_1}{(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = -f\frac{m_1}{R^2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = fm_1\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+\rho)^2}\right]\boldsymbol{k} = fm_1\frac{(2R+\rho)\rho}{R^2(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, с точки зрения лунного наблюдателя, видящего спутник A_2 в зените, благодаря притяжению Земли спутник получает дополнительное ускорение *от* Луны, Земля как бы отталкивает спутник A_2 от Луны!

§ 6. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ И ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

1. В предшествующем параграфе мы интересовались движением системы трех материальных точек относительно одной из них.

Здесь мы будем рассматривать движение относительно *произвольной движущейся в пространстве* точки N. Точнее: пусть в пространстве выбрана некоторая прямоугольная система декартовых координат $Nxyz$, вообще говоря, неинерциальная, но имеющая оси, постоянно ориентированные в пространстве (рис. 5.7). Иначе говоря, система $Nxyz$ движется относительно какой-то инерциальной системы только поступательно, то есть так, что каждая из осей Nx, Ny, Nz остается «параллельной самой себе».

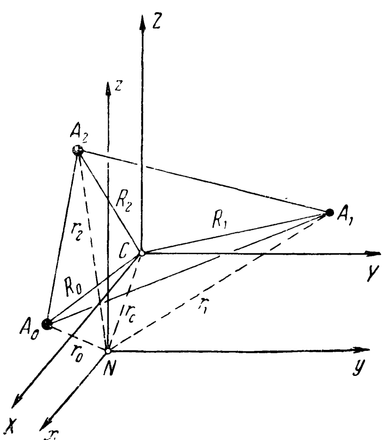

Рис. 5.7.

Приведем наглядный пример такой системы отсчета. Пусть наблюдения за движением Солнца, Земли и Луны ведутся в космической обсерватории, перемещающейся в околосолнечном