Пусть $A_0A_1 = R$, $A_0A_2 = \rho$. Тогда по формулам (13) и (13′)

$$\boldsymbol{b} = -f\frac{m_1}{(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = -f\frac{m_1}{R^2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = fm_1\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+\rho)^2}\right]\boldsymbol{k} = fm_1\frac{(2R+\rho)\rho}{R^2(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, с точки зрения лунного наблюдателя, видящего спутник A_2 в зените, благодаря притяжению Земли спутник получает дополнительное ускорение *от* Луны, Земля как бы отталкивает спутник A_2 от Луны!

§ 6. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ И ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

1. В предшествующем параграфе мы интересовались движением системы трех материальных точек относительно одной из них.

Здесь мы будем рассматривать движение относительно *произвольной движущейся в пространстве* точки N. Точнее: пусть в пространстве выбрана некоторая прямоугольная система декартовых координат $Nxyz$, вообще говоря, неинерциальная, но имеющая оси, постоянно ориентированные в пространстве (рис. 5.7). Иначе говоря, система $Nxyz$ движется относительно какой-то инерциальной системы только поступательно, то есть так, что каждая из осей Nx, Ny, Nz остается «параллельной самой себе».

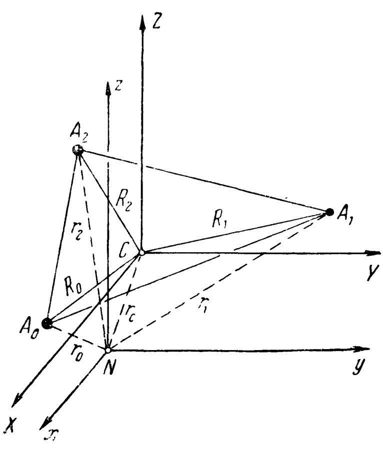

Рис. 5.7.

Приведем наглядный пример такой системы отсчета. Пусть наблюдения за движением Солнца, Земли и Луны ведутся в космической обсерватории, перемещающейся в околосолнечном пространстве под воздействием какого-то двигателя (вид двигателя, режим его работы нас здесь не интересуют). Каково будет движение этих трех тел с точки зрения наблюдателя такой обсерватории? В данном случае началом системы N служит наблюдательный пункт космической обсерватории, а оси координат должны иметь постоянную ориентацию относительно «неподвижных» звезд.

В этой системе отсчета между координатами и скоростями точек A_0, A_1, A_2 существуют некоторые зависимости, которые мы сейчас получим.

Пусть C — барицентр материальных точек $(A_0,\ m_0)$, $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$. Рассмотрим систему отсчета $CXYZ$ с началом в точке C и осями, параллельными соответствующим осям системы $Nxyz$.

Введем обозначения: $\overrightarrow{NA}_k = \boldsymbol{r}_k$, $\overrightarrow{CA}_k = \boldsymbol{R}_k$,

$$\overrightarrow{NC} = \boldsymbol{r}_C,\ \boldsymbol{v}_k = \dot{\boldsymbol{r}}_k,\ \boldsymbol{V}_k = \dot{\boldsymbol{R}}_k,\ \boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C,\ \boldsymbol{V}_C = \dot{\boldsymbol{R}}_C \equiv 0,$$
$$k = 0,\ 1,\ 2;$$

$$m = m_0 + m_1 + m_2.$$

Мы имеем:

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_C,\ \boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_C,\ k = 0,\ 1,\ 2. \qquad (1)$$

Для системы трех взаимно гравитирующих материальных точек A_0, A_1, A_2 имеют место зависимости [см. § 4, формулы (9) — (12)]

$$m_0\boldsymbol{R}_0 + m_1\boldsymbol{R}_1 + m_2\boldsymbol{R}_2 = 0, \qquad (2)$$

$$m_0\boldsymbol{V}_0 + m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}(m_0V_0^2 + m_1V_1^2 + m_2V_2^2) = U + h, \qquad (4)$$

$$m_0(\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{V}_0) + m_1(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1) + m_2(\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2) = \boldsymbol{\sigma}. \qquad (5)$$

Переходя к новым переменным $\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{v}_k$, $k = 0,\ 1,\ 2$, из (2) получим

$$m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 - m\boldsymbol{r}_C = 0. \qquad (6)$$

Из (3) следует

$$m_0\boldsymbol{v}_0 + m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_C = 0. \qquad (7)$$

Из (4) найдем

$$\frac{1}{2}(m_0V_0^2+m_1V_1^2+m_2V_2^2)=\frac{1}{2}[m_0(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_C)^2+$$
$$+m_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_C)^2+m_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_C)^2]=\frac{1}{2}[(m_0\boldsymbol{v}_0^2+m_1\boldsymbol{v}_1^2+$$
$$+m_2\boldsymbol{v}_2^2)-2(m_0\boldsymbol{v}_0+m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_C+(m_0+m_1+m_2)\boldsymbol{v}_C^2].$$

Принимая во внимание формулы (7) и (4), получим:

$$\frac{1}{2}(m_0v_0^2+m_1v_1^2+m_2v_2^2)-\frac{1}{2}mv_C^2=U+h, \tag{8}$$

где

$$U=f\left(\frac{m_0m_1}{r_{01}}+\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}\right). \tag{9}$$

Это и есть искомый *интеграл энергии* в относительном движении.

Аналогичными рассуждениями выведем из (5) векторный *интеграл площадей* в относительном движении.

$$\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{R}_\nu\times\boldsymbol{V}_\nu)=\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu-\boldsymbol{r}_C)\times(\boldsymbol{v}_\nu-\boldsymbol{v}_C)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-\left(\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu\boldsymbol{r}_\nu\right)\times\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{r}_C\times\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu\boldsymbol{v}_\nu+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_C)=\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-(m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C)-$$
$$-(\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C)+\left(\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu\boldsymbol{r}_\nu\right)\times\boldsymbol{v}_C.$$

Принимая во внимание (6), получим:

$$\sum_{\nu=0}^{2} m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-m(\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{\sigma}. \tag{10}$$

Отметим важный частный случай, когда движение рассматривается *относительно одной из трех данных материальных точек*, например A_0. В таком случае интегралы

(8) и (10) принимают вид

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{11}$$

$$m_1 (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) + m_2 (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2) - m (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{12}$$

В том частном случае, когда движение рассматривается относительно барицентра трех материальных точек, формулы (6) — (10), естественно, превращаются в ранее полученные формулы из § 4.

2. Рассматривая движение системы из n материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), . . . , (A_{n-1}, m_{n-1}) относительно точки N, можно с помощью таких же рассуждений, как в случае трех точек, получить следующие зависимости между скоростями $\boldsymbol{v}_k$ и радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_k$ ($\boldsymbol{r}_k \equiv \overrightarrow{NA_k}$) рассматриваемых точек:

а) интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{13}$$

где

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1}, \tag{14}$$

$\boldsymbol{v}_C$ — скорость барицентра материальных точек (A_0, m_0), ... , (A_{n-1}, m_{n-1}),

$$U = f \sum_{\substack{\nu, s=0 \\ \nu < s}}^{n-1} \frac{m_\nu m_s}{r_{\nu s}}, \qquad \boldsymbol{r}_{\nu s} = \overrightarrow{A_\nu A_s}; \tag{15}$$

б) интеграл площадей

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu) - m (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{16}$$

В частности, если в качестве точки N выбирается точка A_0, то зависимости (13) и (16) принимают более простой вид:

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu) - m (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) представляют собой интеграл энергии и интеграл площадей при движении системы n гравитирующих точек относительно одной из них (A_0).

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В предыдущих параграфах этой главы мы получили дифференциальные уравнения, определяющие движение n взаимно гравитирующих материальных точек в различных системах координат. Общее решение этих уравнений при $n \geqslant 3$ в замкнутом виде до сих пор неизвестно, и обычно приходится их решать приближенными методами или исследовать свойства движения качественными методами.

Дифференциальные уравнения и известные первые интегралы (интеграл площадей, интеграл энергии) позволяют получить ценную дополнительную информацию о возможных движениях нескольких гравитирующих тел.

Отметим здесь в качестве примера одну интересную проблему, связанную с задачей многих тел, — проблему «финальных типов движения». В случае $n = 3$ речь идет о возможных взаимных расположениях трех гравитирующих точек при неограниченном возрастании времени t.

Вопрос о финальных типах движения исключительно важен для космогонии (теории происхождения и развития солнечной системы и других звездных систем). Изучение финальных движений интересно и для космонавтики, ибо может дать некоторые ориентировочные представления о возможной эволюции траектории космического аппарата при длительном — в течение нескольких лет и более — воздействии на него двух или нескольких небесных тел.

Наиболее содержательные исследования о финальных движениях были выполнены в течение последних 35 лет и связаны с именем французского астронома Ж. Шази и ряда советских математиков и астрономов (О. Ю. Шмидт, Г. Ф. Хильми и другие).

Различают следующие случаи движения трех тел при $t \to \infty$:

а) *ограниченное* (или *эллиптическое*) движение: расстояния между тремя телами остаются ограниченными, не превосходящими некоторой фиксированной величины;