Формулы (17) и (18) представляют собой интеграл энергии и интеграл площадей при движении системы n гравитирующих точек относительно одной из них (A_0).

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В предыдущих параграфах этой главы мы получили дифференциальные уравнения, определяющие движение n взаимно гравитирующих материальных точек в различных системах координат. Общее решение этих уравнений при $n \geqslant 3$ в замкнутом виде до сих пор неизвестно, и обычно приходится их решать приближенными методами или исследовать свойства движения качественными методами.

Дифференциальные уравнения и известные первые интегралы (интеграл площадей, интеграл энергии) позволяют получить ценную дополнительную информацию о возможных движениях нескольких гравитирующих тел.

Отметим здесь в качестве примера одну интересную проблему, связанную с задачей многих тел, — проблему «финальных типов движения». В случае $n = 3$ речь идет о возможных взаимных расположениях трех гравитирующих точек при неограниченном возрастании времени t.

Вопрос о финальных типах движения исключительно важен для космогонии (теории происхождения и развития солнечной системы и других звездных систем). Изучение финальных движений интересно и для космонавтики, ибо может дать некоторые ориентировочные представления о возможной эволюции траектории космического аппарата при длительном — в течение нескольких лет и более — воздействии на него двух или нескольких небесных тел.

Наиболее содержательные исследования о финальных движениях были выполнены в течение последних 35 лет и связаны с именем французского астронома Ж. Шази́ и ряда советских математиков и астрономов (О. Ю. Шмидт, Г. Ф. Хильми и другие).

Различают следующие случаи движения трех тел при $t \to \infty$:

а) *ограниченное* (или *эллиптическое*) движение: расстояния между тремя телами остаются ограниченными, не превосходящими некоторой фиксированной величины;

б) *гиперболическое*: попарные расстояния между телами с течением времени неограниченно возрастают;

в) *гиперболо-эллиптическое*: расстояние между двумя телами остается ограниченным сверху некоторой константой R, а расстояние третьего тела от этих двух неограниченно растет;

г) *осциллирующее* движение: расстояние одного из тел от одного из двух других (или от обоих тел) с течением времени принимает сколь угодно большие значения, но не стремится к бесконечности.

Аналогично можно классифицировать движение трех тел в прошлом, то есть при $t \to -\infty$. Если рассматривать движение трех тел во времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, то мыслимы, в частности, такие возможности:

1) При $t \to -\infty$ движение гиперболическое, а при $t \to +\infty$ движение гиперболо-эллиптическое.

2) Движение при $t \to -\infty$ гиперболо-эллиптическое, а при $t \to +\infty$ — эллиптическое.

В каждом из этих двух случаев говорят, что в системе имеет место *захват*.

3) Движение системы трех тел при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ является гиперболо-эллиптическим, но на ограниченных расстояниях друг от друга остаются разные пары тел. В этом случае говорят, что в системе имеет место *обмен*.

В интересных исследованиях французского астронома Ж. Шази, опубликованных в 1929—1932 годах, содержалось доказательство утверждения, что захват и обмен в задаче трех тел невозможны. Впрочем, такого же мнения придерживались многие астрономы XIX—XX веков. Однако впоследствии было обнаружено, что доказательство Шази ошибочно. В 1947—1948 годах советские математики О. Ю. Шмидт и Г. Ф. Хильми, а затем К. А. Ситников, Г. А. Мерман и другие на конкретных примерах показали возможность захвата. Несколько позднее была установлена возможность обмена в задаче трех тел (В. М. Алексеев и др.). Оказалось, что как захват, так и обмен связаны со сближением хотя бы двух из трех тел. Особенно любопытной представляется возможность осцилляции в задаче трех тел, обнаруженная К. А. Ситниковым в 1960 году *).

*) См. по этому поводу еще главу VII, § 6.

2. В текущем столетии различными учеными предпринимались энергичные попытки получения общих решений задачи трех и многих тел с помощью бесконечных рядов того или иного вида. Вначале пытались представить координаты (x_ν, y_ν, z_ν) каждой из n взаимно гравитирующих точек A_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, в виде степенных рядов относительно времени t. Однако очень скоро было подмечено, что такие ряды будут, вообще говоря, расходящимися. Тогда стали искать разложения этих координат в степенные ряды по некоторому вспомогательному переменному. В 1912 году финский математик К. Зундман, привлекая аппарат теории функций комплексного переменного, построил степенные ряды, дающие решения задачи трех тел. Эти ряды имеют вид

$$x_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)} u^k, \quad y_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(\nu)} u^k, \quad z_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\nu)} u^k,$$
$$\nu = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Время t также выражается через u с помощью степенного ряда:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k. \tag{2}$$

Здесь u — специально подобранное вспомогательное переменное («псевдовремя»), связанное с временем t зависимостью вида

$$C\,dt = \frac{du}{U}, \tag{3}$$

где C — константа, а U — силовая функция системы, определяемая формулой (5.4.10′).

Ряды Зундмана пока не нашли практического применения, ибо до сих пор почти не изучен вопрос о быстроте сходимости этих рядов. Известно, что в некоторых случаях ряды Зундмана сходятся крайне медленно. Так, например, французский астроном Белорицкий в начале тридцатых годов показал, что при некотором специальном выборе исходных данных ряды Зундмана дадут правильный результат с относительной погрешностью 10%, лишь если число членов в рядах Зундмана будет больше, чем $10^{8\,000\,000}$. Суммирование такого громадного числа слагаемых не под силу даже самой быстродействующей вычислительной машине.

В то же время в статье югославского астронома Р. Верника в 1955 году приведен пример противоположного характера, когда при другом специальном выборе исходных данных можно вычислить суммы рядов Зундмана с тремя верными десятичными знаками, если ограничиться лишь первыми тремя членами каждого из этих рядов.

3. Уже в последние годы, после запуска первых советских спутников, австрийский математик В. Гребнер и его ученики предприняли новую попытку поиска общего решения задачи многих тел, имея в виду в первую очередь запросы космонавтики. Гребнер [5.4] ищет представление решений задачи n тел в виде рядов специального типа, встречающихся впервые в работах норвежского математика Софуса Ли.

Ряд Ли — Гребнера может быть определен следующим образом. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — какие-то независимые переменные (вообще говоря, комплексные); $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_m(z)$ и $f(z)$ — аналитические функции от $z(z_1, z_2, \ldots, z_m)$. Рассматривается оператор

$$D = \theta_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \theta_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + \theta_m(z)\frac{\partial}{\partial z_m}. \tag{4}$$

Операторы $Df, D^2f, \ldots, D^\nu f$ определяются формулами

$$Df = \sum_{k=1}^{m} \theta_k(z)\frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad D^2f = D(Df), \ldots, D^\nu f = D(D^{\nu-1}f).$$

Ряд Ли — Гребнера для функции $f(z)$ — это следующий ряд:

$$f(z) + \frac{t}{1!}Df + \frac{t^2}{2!}D^2f + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu f + \ldots \tag{5}$$

Символически возможно этот ряд записать и так *):

$$e^{tD}f(z), \tag{6}$$

*) Ряд Тейлора представляет собой частный случай ряда Ли — Гребнера, когда $D = d/dz$. В этом частном случае формула (6) дает разложение функции $f(z+t)$ в ряд Тейлора по степеням t:

$$f(z+t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(z).$$

где e^{tD} — оператор, определяемый формулой

$$e^{tD} = 1 + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu + \ldots \tag{7}$$

Можно показать, что

$$f(e^{tD}z) = e^{tD}f(z). \tag{8}$$

В. Гребнер показал, что координаты и компоненты скорости каждой из n взаимно гравитирующих точек возможно представить в виде рядов (5). Для решения задачи об n телах при $n \geqslant 3$ оператор D имеет, к сожалению, весьма громоздкий вид, что сильно усложняет практическое применение рядов Ли — Гребнера.