ГЛАВА VI

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РАСЧЕТУ ТРАЕКТОРИИ МАЛОГО ТЕЛА

§ 1. СФЕРА ПРИТЯЖЕНИЯ И СФЕРА ДЕЙСТВИЯ

1. Сфера притяжения. Пусть рассматривается движение некоторой материальной точки (P, m) (космического корабля, астероида, кометы и т. п.) под воздействием двух небесных тел с массами m_1 и m_2. Эти тела будем называть *притягивающими центрами*, или условно, для краткости, «звездами». Мы будем их рассматривать как материальные точки; для определенности будем полагать, что $m_1 < m_2$ и будем говорить, что «звезда A_1 *меньше* звезды A_2».

Особенно нас будет интересовать случай, когда масса m_1 значительно меньше массы m_2 $(m_1 \ll m_2)$. Точный смысл этого ограничения заключается в том, что при требуемой в данной конкретной задаче точности в расчетах допустимо пренебречь квадратом величины $\mu = m_1 / m_2$.

Массу материальной точки (P, m) будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массами звезд $(m \ll m_1)$. Материальную точку (P, m) условимся здесь называть *спутником системы двух притягивающих центров* (A_1, m_1) и (A_2, m_2).

Силы F_1 и F_2, с которыми точка (P, m) притягивается к точкам A_1 и A_2, определяются в соответствии с законом всемирного тяготения по формулам

$$F_1 = f\frac{mm_1}{|\overrightarrow{A_1P}|^2}, \quad F_2 = f\frac{mm_2}{|\overrightarrow{A_2P}|^2}.$$

В пространстве существуют такие точки, в которых меньшая звезда A_1 притягивает спутник сильнее, чем большая звезда, то есть в которых $F_1 > F_2$.

Множество *всех* таких точек пространства называется областью притяжения меньшей звезды относительно большей *).

Что же собой представляет геометрически это множество точек? Если спутник P находится в непосредственной близости к звезде A_1 (то есть если A_1P достаточно мало), то он будет притягиваться к меньшей звезде (A_1) сильнее, чем к большей (A_2).

Будем теперь мысленно перемещать спутник P по прямой A_1A_2 в направлении от A_1 к A_2 (рис. 6.1). Спутник при этом пройдет через такое положение C, в котором он будет притягиваться с *одинаковой* силой к точкам A_1 и A_2.

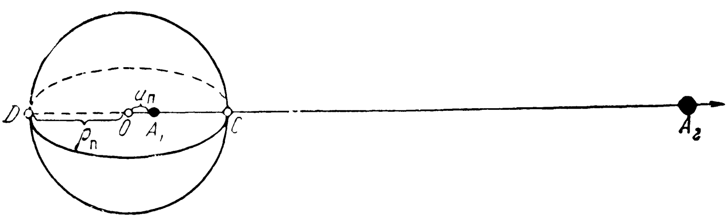

Рис. 6.1.

Перемещаясь по прямой A_1A_2 в противоположном направлении, то есть удаляясь неограниченно вдоль луча A_2A_1, спутник опять пройдет через некоторую точку D, в которой он будет с одинаковой силой притягиваться к A_1 и A_2. Точки C и D можно назвать коллинеарными точками равных притяжений.

В точке C

$$f\frac{mm_1}{|\overrightarrow{A_1C}|^2} = f\frac{mm_2}{|\overrightarrow{A_2C}|^2};$$

отсюда

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\mu}. \qquad (1)$$

*) Обычно вместо термина «область притяжения» употребляют менее точный термин «сфера притяжения» (менее точный потому, что в геометрии под сферой понимают поверхность, а не пространственную область).

Аналогично

$$\frac{A_1D}{A_2D} = \sqrt{\mu}. \tag{2}$$

Какую же фигуру образуют *все* точки пространства, в которых спутник с одинаковой силой притягивается к звездам A_1 и A_2?

Покажем, что геометрическим местом точек пространства, в каждой из которых притяжение спутника к меньшей звезде *равно* притяжению к большей звезде, является *сфера*; концами одного из ее диаметров служат две коллинеарные точки равного притяжения C и D.

Действительно, речь идет о геометрическом месте таких точек P, в которых $f\frac{m_1m}{|\overrightarrow{A_1P}|^2} = f\frac{m_2m}{|\overrightarrow{A_2P}|^2}$. Но в таких точках P

$$\frac{A_1P}{A_2P} = \sqrt{\mu} = \text{const} < 1, \tag{3}$$

то есть отношение расстояний точки P от A_1 и A_2 постоянно.

В курсе элементарной геометрии *) устанавливается, что таким геометрическим местом точек является сфера с диаметром CD, она называется «сферой Аполлония». Внутри этой сферы

$$\frac{A_1P}{A_2P} < \sqrt{\mu},$$

откуда

$$f\frac{m_1m}{|\overrightarrow{A_1P}|^2} > f\frac{m_2m}{|\overrightarrow{A_2P}|^2},$$

то есть $F_1 > F_2$. Вне этой сферы $F_1 < F_2$.

Итак, *«областью притяжения» меньшей звезды относительно большей является шар (внутренность сферы); концами одного из его диаметров служат точки C и D, делящие отрезок A_1A_2 в отношении $\sqrt{\mu}$ внутренним и внешним образом.*

---

*) Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, стр. 95, ГТТИ, 1949.

Найдем радиус сферы притяжения и положение ее центра. Так как точка D находится *вне* отрезка A_1A_2, а точка C — *внутри* него, то $DA_2 > CA_2$. Поэтому из (1) и (2) вытекает, что $DA_1 > A_1C$. Следовательно, центр O сферы притяжения (середина отрезка DC) всегда лежит *вне* отрезка A_1A_2. Пусть $A_1A_2 = a$. Обозначим через $\rho_п$ радиус сферы притяжения и через $u_п$ — расстояние центра этой сферы до точки A_1 (рис. 6.1). В этих обозначениях равенства (1), (2) запишутся так:

$$\frac{\rho_п - u_п}{a - (\rho_п - u_п)} = \sqrt{\mu}, \qquad \frac{\rho_п + u_п}{a + (\rho_п + u_п)} = \sqrt{\mu}.$$

Отсюда

$$\rho_п - u_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}, \qquad \rho_п + u_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\rho_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1-\mu}, \tag{4}$$

$$u_п = \frac{a\mu}{1-\mu}. \tag{5}$$

П р и м е р. Определим радиус сферы притяжения Луны относительно Земли и положение центра этой сферы.

В данном случае $\mu \approx \frac{1}{81}$, $a \approx 384\,000$ *км*. По формулам (4) и (5) находим:

$$\rho_п = a\,\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{81}} \approx \frac{9}{80}\,a \approx 43\,000 \text{ км},$$

$$u_п = a\,\frac{\frac{1}{81}}{1-\frac{1}{81}} \approx \frac{1}{80}\,a \approx 4500 \text{ км}.$$

2. С ф е р а д е й с т в и я. Движение малого спутника P (рис. 6.2) под действием притяжения двух «звезд»

(A_1, m_1) и (A_2, m_2) можно изучать в различных системах отсчета. В частности, можно принять в качестве начала отсчета любую из точек A_1 или A_2, то есть рассматривать движение спутника P относительно любой из двух звезд A_1 или A_2, а другую звезду считать возмущающей.

Так, например, движение советской искусственной планеты, запущенной 2 января 1959 года, можно рассматривать в системе отсчета с началом в центре Земли (геоцентрическое движение). И то же движение можно рассматривать в системе отсчета с началом в центре Солнца (гелиоцентрическое движение).

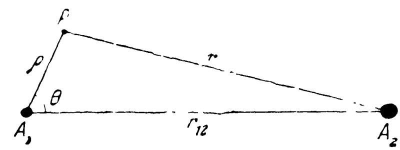

Рис. 6.2.

Рассмотрим сначала движение спутника P в системе отсчета с началом в *меньшей* звезде A_1. Тогда уравнение движения спутника запишется в виде *)

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{\Phi}_1, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{a}_1 = -f\frac{m_1 + m}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = fm_2\left(\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right), \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{A_1P}, \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{A_2P},$$

$$\boldsymbol{r}_{12} = \overrightarrow{A_1A_2}, \quad |\boldsymbol{r}_{12}| = a. \tag{8}$$

Ускорение спутника распадается на две составляющие:

а) «*основное*» ускорение $\boldsymbol{a}_1$, то есть то ускорение, которое имел бы спутник, если бы прекратилось влияние «возмущающей звезды»;

б) *возмущающее* ускорение $\boldsymbol{\Phi}_1$, то есть то дополнительное ускорение, которое получает спутник P вследствие вмешательства «возмущающей звезды» A_2.

Величина Φ_1/a_1 показывает, какую часть «основного» ускорения $\boldsymbol{a}_1$ составляет возмущающее ускорение. Чем

*) См. § 5 главы V.

меньше это отношение, тем меньше отличается орбита спутника от кеплеровой орбиты.

Обратимся теперь к движению спутника относительно *большей* звезды A_2.

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{\Phi}_2, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{a}_2 = -f\frac{m_2+m}{r^3}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\Phi}_2 = fm_1\left(\frac{\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right). \tag{10}$$

Доля возмущающего ускорения Φ_2 от «основного» a_2 составляет Φ_2/a_2.

Область пространства, в которой выполняется неравенство

$$\frac{\Phi_1}{a_1} < \frac{\Phi_2}{a_2}, \tag{11}$$

называется *областью действия*, или *сферой действия*, меньшей «звезды» относительно большей.

Внутри сферы действия меньшей звезды (относительно бóльшей) обычно выгоднее рассматривать меньшую звезду в качестве центральной, а бóльшую — в качестве возмущающей.

Так, например, в случае движения искусственной планеты, запущенной с Земли, в начале ее пути, когда ракета находится внутри сферы действия Земли, целесообразно рассматривать ее движение в системе отсчета, связанной с Землей (геоцентрическое движение), а Солнце рассматривать как возмущающую звезду. Вне сферы действия Земли выгоднее, наоборот, рассматривать ее движение в системе отсчета, связанной с Солнцем (гелиоцентрическое движение), а Землю рассматривать как возмущающее тело. Другой пример: при прохождении кометы внутри сферы действия Юпитера часто выгоднее не Солнце, а Юпитер принять за центральное тело, а Солнце считать возмущающей звездой (точнее говоря, внутри сферы действия Юпитера рассматривать движение кометы в системе отсчета с началом в центре тяжести Юпитера). После прохождения кометы через сферу действия Юпитера целесообразно снова перейти к гелиоцентрической системе отсчета.

Выясним теперь, какова геометрическая форма области действия меньшей звезды относительно большей. Для этого сначала найдем уравнение граничной поверхности S области действия, то есть поверхности S, на которой

$$\frac{\Phi_1}{a_1} = \frac{\Phi_2}{a_2}. \tag{12}$$

Из формул (7), (8) и (10) следует, что

$$a_1 = f\frac{m_1 + m}{\rho^2}, \quad \Phi_1 = fm_2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|,$$

$$a_2 = f\frac{m_2 + m}{r^2}, \quad \Phi_2 = fm_1\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right|.$$

В силу формулы (12) в точках, лежащих на поверхности S, имеет место равенство

$$(m_1 + m)\,m_1 r^2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right| = (m_2 + m)\,m_2\rho^2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|. \tag{13}$$

Возводя обе части равенства (13) в квадрат, мы после упрощений получим

$$(m_1 + m)^2 m_1^2 r^4\left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{\rho^4} - 2\cos\theta\,\frac{1}{a^2\rho^2}\right] =$$
$$= (m_2 + m)^2 m_2^2\rho^4\left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{r^4} - 2\,\frac{a^2 - a\rho\cos\theta}{a^3 r^3}\right]. \tag{14}$$

Здесь

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta, \quad \theta = \angle A_2A_1P.$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение границы S сферы действия в сферических координатах ρ, θ.

При помощи уравнения (14) можно установить, что в случае, когда $m_1 \ll m_2$, величина $\frac{\rho}{a}$ является малой. Произведем в этом уравнении приведение к общему знаменателю и разложение по степеням $\frac{\rho}{a}$. Сохраняя после этого в разложении самую низкую степень величины $\frac{\rho}{a}$, получим уравнение:

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^{10}(1+3\cos^2\theta)=\mu^4, \qquad (15)$$

где

$$\mu=\frac{m_1}{m_2}.$$

Отсюда

$$\rho=a\mu^{2/5}\frac{1}{\sqrt[10]{1+3\cos^2\theta}}. \qquad (16)$$

Это — уравнение поверхности вращения (рис. 6.3), представляющей собой «слегка вытянутую» сферу. Она может

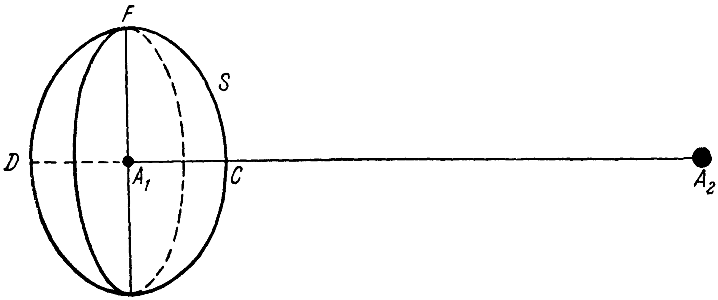

Рис. 6.3.

быть получена вращением вокруг оси A_1A_2 плоской *кривой*, имеющей то же уравнение.

На рис. 6.3

$$A_1F : A_1D=\sqrt[5]{2}\approx 1,15, \text{ то есть } \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\approx 1,15. \qquad (17)$$

Итак, граница S области действия меньшей звезды относительно большей звезды при малых значениях отношения m_1 / m_2 мало отличается от сферы радиуса

$$\rho_{д} = a\mu^{2/5}, \tag{18}$$

описанной вокруг меньшей звезды.

Внутри поверхности S будет выполняться неравенство

$$\frac{\Phi_1}{a_1} < \frac{\Phi_2}{a_2},$$

вне ее — неравенство

$$\frac{\Phi_2}{a_2} < \frac{\Phi_1}{a_1}.$$

Число $\rho_{д}$, определяемое формулой (18), называют обычно *радиусом действия* (или *радиусом сферы действия*) меньшей звезды относительно большей.

Из планет солнечной системы наибольший радиус действия относительно Солнца имеет Нептун (около 90 млн. *км*), наименьший — Меркурий (около 110 тыс. *км*).

Задачи

1. Вычислите радиус действия Земли относительно Солнца.
2. Вычислите радиус сферы притяжения и сферы действия Марса относительно Солнца.
3. Вычислите радиус действия Луны относительно Земли.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА

Решение задачи о движении материальной точки (P, m) (космического корабля, астероида и т. п.) под влиянием притяжения других тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ приводит к сложным дифференциальным уравнениям. Даже приближенное решение этих уравнений с помощью известных методов математического анализа весьма громоздко.

Особенно интересна для космонавтики такая ситуация, когда движение тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ известно, а масса материальной точки P мала по сравнению с массой каждого из этих тел. В этой ситуации можно указать прием приближенного решения задачи о движении точки P, достаточно удовлетворительный для многих практических случаев. Сущность этого приема состоит в следующем.