Земли двигалась по орбите, касающейся орбиты Земли и орбиты Марса. Последние две орбиты для простоты считаются концентрическими окружностями, имеющими радиусы $R_З = 150 \cdot 10^6$ *км*, $R_М = 228 \cdot 10^6$ *км*. Найдите величину скорости v_0, необходимой для такого перелета.

6. Согласно одному из вариантов посылки АМС к Марсу пассивный участок ее траектории должен начаться на расстоянии 6800 *км* от центра Земли (то есть на высоте 530 *км*). Получив в начале пассивного участка геоцентрическую скорость v_0, АМС должна при выходе из сферы действия Земли иметь параболическую скорость относительно Солнца, направленную по касательной к орбите Земли. Какую скорость v_0 должна иметь АМС в момент отсечки последнего двигателя? Через какое время достигнет АМС орбиты Марса? При решении принять те же упрощающие допущения, что и в задаче 5.

§ 4. ПОЛЕТ К ВЕНЕРЕ

1. В этом параграфе мы проиллюстрируем на важном примере применение приближенной методики к расчету траектории полета космического аппарата к другим планетам.

Как известно, запуски межпланетных станций к Венере и Марсу были впервые осуществлены в Советском Союзе. Напомним некоторые опубликованные в печати данные об автоматической межпланетной станции (АМС), запущенной к Венере в 1961 году *). 12 февраля был запущен искусственный спутник Земли. Его орбита была близка к окружности: перигейное и апогейное расстояния были равны соответственно 6601 и 6658 *км*. В тот же день с борта ИСЗ стартовала космическая ракета, несшая АМС. В момент отделения АМС от ракеты скорость АМС превышала местную параболическую скорость на 661 *м/сек*. В 12 часов дня по московскому времени 12 февраля АМС находилась на рассто янии 126 300 *км* от Земли. При выходе из сферы действия Земли (точнее, на расстоянии 10^6 *км* от центра Земли) АМС имела относительно Солнца скорость 27,7 *км/сек*.

Мы здесь произведем расчет для некоторой *гипотетической* автоматической межпланетной станции. Исходные данные подберем таким образом, чтобы расчеты были проще, чем для случая реальной АМС. В то же время эти исходные данные будут подобраны так, чтобы траектория нашей воображаемой АМС была достаточно близка к траектории реальной АМС, запущенной 12 февраля 1961 года.

---

*) См. газету «Правда» за 26 февраля 1961 года.

Итак, вообразим себе, что 12 февраля 1961 года была запущена к Венере автоматическая межпланетная станция, относительно которой известно следующее. АМС стартовала непосредственно с искусственного спутника Земли, двигавшегося вокруг Земли по окружности радиуса $\rho = 6630$ *км*. При этом полагаем, что именно в момент старта с борта ИСЗ АМС получила скорость, превышающую местную параболическую скорость на 0,660 *км/сек* *).

Будем полагать, что в момент отключения двигателя, разгонявшего АМС, вектор скорости АМС был направлен параллельно поверхности Земли. Далее, пусть известно, что 12 февраля в 12 часов дня АМС находилась на расстоянии 126 300 *км* от *поверхности* Земли. Кроме того, примем, что в момент выхода из сферы действия Земли скорость АМС составляла 27,6 *км/сек*.

2. Заметим, что приведенные выше данные позволяют подсчитать тот момент, когда наша воображаемая АМС должна была стартовать с борта ИСЗ. На расстоянии $\rho = 6630$ *км* от центра Земли параболическая скорость равна

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2K_3}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 398\,600}{6630}} = \sqrt{120{,}25} = 10{,}96\ \textit{км/сек}.$$

В силу нашего допущения, что АМС при старте с ИСЗ сразу же получила скорость, превышающую $v_{\text{пар}}$ на 0,660 *км/сек*, скорость АМС при старте с борта ИСЗ составляла $v_0 = v_{\text{пар}} + 0{,}660 = 11{,}62$ *км/сек*.

12 февраля, в 12 часов дня по московскому времени, АМС находилась уже на расстоянии 126 300 *км* от поверхности Земли и, значит, на расстоянии $r_1 = 132\,700$ *км* от центра Земли. Обозначим через τ_1 время, протекшее от момента старта АМС с борта ИСЗ до 12 часов 12 февраля. Получив скорость, превышающую местную параболическую скорость, АМС стала двигаться по гиперболической орбите. Пусть ε_1 — ее эксцентриситет, $|a_1|$ — длина ее веществен-

*) Заметим, что последнее допущение является совершенно нереальным. В действительности для разгона межпланетной станции до такой скорости требуется некоторое время, и после этого времени АМС должна была удалиться от орбиты несшего ее искусственного спутника на некоторое расстояние (см. решение задачи 9 из § 9 главы II). Однако в нашем, чисто иллюстративном, примере мы себе разрешим считать, что прирост скорости АМС произошел мгновенно.

ной полуоси. Воспользуемся уравнением Кеплера применительно к гиперболическому движению [см. (3.2.19)]:

$$|n_1|\tau_1 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_1 - H_1. \qquad (1)$$

Для нахождения $|a_1|$, ε_1, $|n_1|$ можно привлечь уравнения

$$r_1 = |a_1|(\varepsilon_1 \operatorname{ch} H_1 - 1), \qquad (2)$$

$$v_0^2 = K_3\left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{|a_1|}\right), \qquad (3)$$

$$\rho = |a_1|(\varepsilon_1 - 1), \qquad (4)$$

$$|n_1| = \sqrt{K_3/|a_1|^3}. \qquad (5)$$

Из (3) определим $|a_1|$, из (4) ε_1, из (5) $|n_1|$, из (2) $\operatorname{ch} H_1$, а затем $\operatorname{sh} H_1$ и H_1 (по таблицам гиперболических функций). После этого из (1) можно найти τ_1. А затем уже легко подсчитать момент t_0 старта АМС с ИСЗ. Приведем соответствующие вычисления:

$$h_1 = v_0^2 - \frac{2K_3}{\rho} = 11{,}62^2 - \frac{2\cdot 398\,600}{6630} = 14{,}77,$$

$$|a_1| = \frac{K_3}{h_1} = \frac{398\,600}{14{,}77} = 26\,980 \ (км),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho}{|a_1|} + 1 = \frac{6630}{26\,980} + 1 = 1{,}246,$$

$$|n_1| = \frac{\sqrt{K_3/|a_1|}}{|a_1|} = \frac{\sqrt{|h_1|}}{|a_1|} = \frac{\sqrt{14{,}77}}{26\,980} = \frac{3{,}843}{26\,980};$$

$$\operatorname{ch} H_1 = \frac{\dfrac{r_1}{|a_1|} + 1}{\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{132\,700}{26\,980} + 1}{1{,}246} = 0{,}1424\cdot 10^{-3}.$$

По таблицам [0.19] находим $H_1 = 2{,}240$, $\operatorname{sh} H_1 = 4{,}644$. Поэтому

$$|n_1|\tau_1 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_1 - H_1 = 3{,}5450.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{3{,}5450\cdot 10^3}{0{,}1424} = 24\,890 \ (сек),$$

то есть $\tau_1 \approx 6$ часов 55 минут.

Итак, от момента старта АМС с борта ИСЗ прошло около 6 часов 55 минут. Значит, АМС стартовала с борта ИСЗ утром 12 февраля примерно в 5 часов по московскому времени:

$$t_0 \approx 5 \text{ часов.}$$

3. Радиус действия Земли $R_{д.з.}$ относительно Солнца примем равным 10^6 *км*. В соответствии с описанной выше приближенной методикой внутри сферы действия Земли полностью пренебрегаем влиянием Солнца и планет и учитываем только влияние Земли. При таком допущении орбиту АМС (внутри этой сферы) можно считать гиперболической. На больших расстояниях от Земли АМС практически двигалась прямолинейно по асимптоте к этой гиперболе.

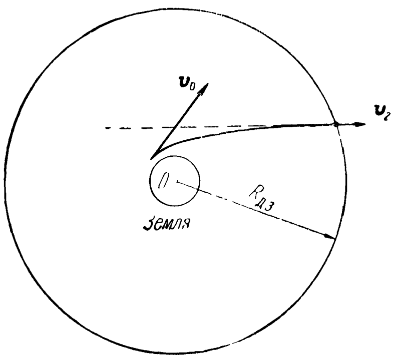

Рис. 6.5.

Скорость v_2 относительно Земли, с которой АМС подошла к границе сферы действия Земли (рис. 6.5), найдем, пользуясь интегралом энергии:

$$v_2^2 = \frac{2K_З}{R_{д.з}} + h, \qquad v_0^2 = \frac{2K_З}{\rho} + h,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} v_2^2 = v_0^2 - \frac{2K_З}{\rho} + \frac{2K_З}{R_{д.з}} = 14{,}77 + 0{,}80 = 15{,}57,\\ v_2 = 3{,}95 \ (км/сек). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При помощи уравнения Кеплера легко подсчитать момент времени t_2, когда АМС подошла к границе сферы действия Земли.

Действительно, время τ_2, прошедшее от момента старта АМС с борта ИСЗ до момента ее подхода к границе сферы действия Земли, определяется по формуле

$$|n_1|\ \tau_2 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_2 - H_2, \tag{7}$$

где H_2 удовлетворяет условию

$$R_{\text{д.з}} = |a_1|\ (\varepsilon_1 \operatorname{ch} H_2 - 1). \tag{8}$$

Отсюда

$$\operatorname{ch} H_2 = \frac{\dfrac{R_{\text{д. з}}}{|a_1|}+1}{\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{10^6}{26\,980}+1}{1,246} = 30,56.$$

По таблицам найдем

$$\operatorname{sh} H_2 = 30,53, \quad H_2 = 4,112, \quad \varepsilon \operatorname{sh} H_2 - H_2 = 33,93,$$

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_1 \operatorname{sh} H_2 - H_2}{|n_1|} = \frac{33,93}{0,1424}\,10^3 = 238\,300\ (\textit{сек}) \approx$$
$$\approx 66,19\ (\textit{час}) \approx 2\ \textit{сут}\ 18\ \textit{час}.$$

Зная момент t_0 старта АМС, легко найти, что АМС должна была подойти к границе сферы действия Земли 14 февраля примерно в 23 часа.

По условию мы знаем гелиоцентрическую скорость v_2 АМС при выходе из сферы действия Земли ($v_2 = 27,6$ *км/сек*). Этого достаточно, как увидим ниже, для нахождения формы и размеров околосолнечной орбиты АМС.

4. Земля движется вокруг Солнца по эллипсу с малым эксцентриситетом $\varepsilon_З = 0,01673 \approx \frac{1}{60}$. Средняя скорость Земли (то есть скорость, которую имела бы Земля, двигаясь вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным большой полуоси ее орбиты) равна 29,76 *км/сек*. Учтем эллиптичность орбиты Земли.

Подсчитаем для середины февраля (14—15 февраля) следующие величины: расстояние $R_З$ Земли от центра Солнца, скорость $v_З$ движения Земли относительно Солнца по ее орбите и ее составляющие v'_r и v'_n, угол между вектором скорости Земли и ее радиусом-вектором. Воспользуемся для этого приближенными формулами из § 4 главы III.

Земля находилась в перигелии 2—3 января. От этого момента до момента выхода АМС из сферы действия Земли прошло примерно полтора месяца. Поэтому средняя аномалия Земли составляла в середине февраля

$$M = n_3 t = \frac{360^\circ}{12} 1{,}5 = 45^\circ,$$

$$\cos M = \sin M \approx 0{,}707.$$

По приближенным формулам из § 4 главы III находим $R_3 = a_3 (1 - \varepsilon_3 \cos M) = 149{,}60 \cdot 10^6 (1 - 0{,}01673 \cdot 0{,}707) \approx$
$\approx 147{,}83 \cdot 10^6$ *км*,

$$v_r' \approx n_3 a_3 \varepsilon_3 \sin M, \qquad v_n' = n_3 a_3 (1 + \varepsilon_3 \cos M).$$

Поэтому

$$v_n' = v_{\text{ср}} (1 + \varepsilon_3 \cos M) \approx 29{,}76 (1 + 0{,}012) \approx 30{,}11 \text{ км/сек},$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\varepsilon_3 \sin M}{1 + \varepsilon_3 \cos M} = \frac{0{,}0118}{1{,}0118} = 0{,}01167, \quad \alpha' \approx 40',$$

$$v_3 = v_n' \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha')^2} \approx 30{,}11 \text{ км/сек}.$$

5. Очевидно (рис. 6.6), что скорость АМС относительно Солнца $\boldsymbol{v}$ может быть получена из скорости АМС относительно Земли $\boldsymbol{v}_2$ путем прибавления скорости Земли относительно Солнца $\boldsymbol{v}_3$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3.$$

Из треугольника со сторонами v, v_2, v_3 (рис. 6.6) легко найдем угол $\measuredangle KPN = \alpha$, а следовательно, и $\measuredangle SPN \equiv$ $\equiv \varphi = 90^\circ + \alpha' - \alpha$. Затем можно вычислить составляющие скорости АМС (радиальную и поперечную): $v_r =$ $= -v \cos \varphi$ и $v_n = v \sin \varphi$. Применяя теорему косинусов и учитывая (6), получим:

$$\cos \alpha = \frac{v^2 + v_3^2 - v_2^2}{2 v v_3} = \frac{27{,}6^2 + 30{,}1^2 - 15{,}6}{2 \cdot 27{,}6 \cdot 30{,}1} \approx 0{,}9943.$$

Отсюда

$$\alpha \approx 6^\circ 0'; \quad \varphi = 90^\circ + \alpha' - \alpha \approx 84^\circ 40'.$$

Вычислим v_n:

$$v_n = v_0 \sin \varphi = 27{,}6 \cdot 0{,}9956 = 27{,}48 \text{ км/сек}.$$

6. После выхода АМС из сферы действия Земли и до ее подхода к сфере действия Венеры учитываем только влияние Солнца и пренебрегаем влиянием Земли, Венеры и других небесных тел на АМС. При таких условиях траекторию АМС можно теперь считать коническим сечением с фокусом в центре Солнца. Подсчитаем последовательно величины σ, p, a, ε, r_π, r_α:

$$\sigma = R_З v_n = 147{,}8\cdot 10^6 \times 27{,}48 = 4061{,}5\cdot 10^6,$$

$$p = \frac{\sigma^2}{K_С} = \frac{1650\cdot 10^{16}}{1325\cdot 10^8} = 124{,}5\cdot 10^6 \text{ км}.$$

Вычислим a:

$$a = -K_С/h.$$

$$h = v^2 - \frac{2K_С}{R_З} = 761{,}8 - 1793 = -1031,$$

$$a = -\frac{K_С}{h} = \frac{1325\cdot 10^8}{1031} = 128{,}5\cdot 10^6 \text{ км}.$$

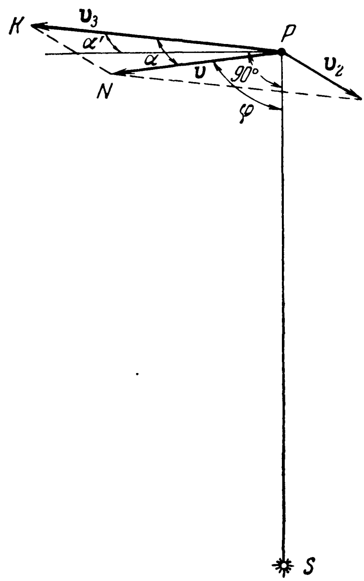

Рис. 6.6.

Подсчитаем теперь ε. Имеем: $p = a(1-\varepsilon^2)$, откуда

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a} = \frac{a-p}{a} = \frac{4{,}0}{128{,}5} = 0{,}0311,$$

$$\varepsilon = 0{,}176.$$

Вычислим расстояние от Солнца до перигелия и афелия орбиты АМС:

$$\varepsilon a = 0{,}176\cdot 128{,}5\cdot 10^6 \approx 22{,}6\cdot 10^6 \text{ км},$$

$$r_\pi = a - \varepsilon a = 128{,}5\cdot 10^6 - 22{,}6\cdot 10^6 \approx 106\cdot 10^6 \text{ км},$$

$$r_\alpha = a + \varepsilon a \approx 151\cdot 10^6 \text{ км}.$$

7. Покажем, каким образом можно предсказать момент сближения АМС с Венерой. Пусть C — какая-либо точка (рис. 6.7), в которой оказалась АМС при выходе из сферы

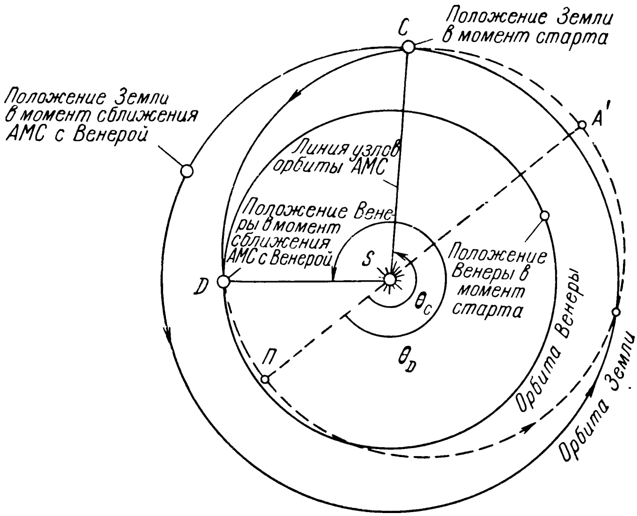

Рис. 6.7.

действия Земли, D — точка встречи траектории АМС с орбитой Венеры. Дуга CD представляет собой дугу эллипса. Подсчитаем, сколько времени τ должен был занять перелет по этой дуге. Удобнее всего воспользоваться для этого формулой Ламберта (см. § 5 главы III).

а) Сначала вычислим истинные аномалии θ_C и θ_D точек C и D. Из уравнения орбиты АМС следует, что

$$R_З = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta_C},$$

$$\cos \theta_C = \frac{p - R_З}{\varepsilon R_З} = -\frac{147{,}8 - 124{,}5}{0{,}176 \cdot 147{,}8} = -0{,}8957,$$

$$\theta_C = 206^\circ.$$

Орбита Венеры значительно ближе к окружности, чем орбита Земли, и имеет эксцентриситет около 0,006. Поэтому мы можем в наших расчетах принять, что при подходе АМС к орбите Венеры (к сфере действия Венеры) расстояние от Венеры до центра Солнца было равно большой полуоси ее орбиты, то есть $R_{\text{В}} = 108{,}1\cdot 10^6$ *км*.

Определим истинную аномалию θ_D АМС в этот момент:

$$R_{\text{В}} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta_D},$$

откуда

$$\cos\theta_D = \frac{p-R_{\text{В}}}{\varepsilon R_{\text{В}}} = \frac{124{,}5-108{,}1}{0{,}176\cdot 108{,}1} = 0{,}8618, \quad \theta_D \approx 329^\circ.$$

«Угловая дальность» между точками C и D равна

$$\theta_D - \theta_C \approx 123^\circ.$$

б) Чтобы воспользоваться формулой Ламберта, надо еще найти длину s хорды CD.

$$s^2 = R_{\text{З}}^2 + R_{\text{В}}^2 - 2R_{\text{З}}\cdot R_{\text{В}}\cos(\theta_D-\theta_C) \approx 495\cdot 10^{14},$$

$$s \approx 222\cdot 10^6 \text{ км}.$$

в) $$\cos\lambda_1 = 1 - \frac{R_{\text{З}}+R_{\text{В}}+s}{2a} = 1 - \frac{478}{257} = -0{,}860,$$

$$\lambda_1 = 2{,}607, \quad \sin\lambda_1 = 0{,}510,$$

$$\cos\lambda_2 = 1 - \frac{R_{\text{З}}+R_{\text{В}}-s}{2a} = 1 - \frac{34}{257} = 0{,}867,$$

$$\lambda_2 = 0{,}522, \quad \sin\lambda_2 = 0{,}498.$$

г) $$n = \sqrt{\frac{K_C}{a^3}} = \sqrt{\frac{K_C}{a}} : a = \sqrt{-h} : a =$$

$$= \sqrt{1031} : (128{,}5\cdot 10^6) = \frac{1}{4\cdot 10^6}.$$

д) По формуле Ламберта

$$n\tau = \lambda_1 - \lambda_2 - (\sin\lambda_1 - \sin\lambda_2) = 2{,}085 - 0{,}012 = 2{,}073.$$

Поэтому $\tau = 2{,}073\cdot 4\cdot 10^6$ *сек* ≈ 96 *дней*.

Итак, АМС должна подойти к орбите Венеры примерно через 96 дней после выхода из сферы действия Земли. Так как к этому времени на том же участке орбиты должна была оказаться Венера, то ее притяжение немного ускорит движение АМС. Таким образом, сближение АМС с Венерой должно было произойти примерно через 96 суток после 14 февраля, иными словами, около 20 мая 1961 года.

Сравним еще гелиоцентрические скорости АМС и Венеры при подходе АМС к сфере действия Венеры. Пусть в это время $v_{\text{В}}$ — скорость Венеры, $v_{r\text{В}}$ и $v_{n\text{В}}$ — ее радиальная и поперечная составляющие. Можно принять, что $v_{r\text{В}} = 0$ (ибо орбита Венеры очень близка к окружности). Поэтому

$$v_{n\text{В}} \approx v_{\text{В}} = \sqrt{K/R_{\text{В}}} = \sqrt{(1{,}325\cdot 10^{11})/(1{,}081\cdot 10^{8})} \approx 35{,}0\ \textit{км/сек}.$$

Обозначим через $v_{r\Lambda}$ и $v_{n\Lambda}$ радиальную и поперечную компоненты скорости АМС (относительно Солнца), а через v_4 — ее скорость относительно Венеры. Тогда

$$v_{r\Lambda} = \frac{\sigma}{p}\,\varepsilon \sin \theta_D = \frac{4061{,}5\cdot 10^{6}\cdot 1{,}76}{124{,}5\cdot 10^{6}}\,0{,}53 \approx 3{,}1\ \textit{км/сек},$$

$$v_{n\Lambda} = \frac{\sigma}{R_{\text{З}}} = 37{,}6\ \textit{км/сек};$$

$$v_{\Lambda} = \sqrt{v_{r\Lambda}^2 + v_{n\Lambda}^2} \approx 37{,}6\ \textit{км/сек},$$

$$v_{n\Lambda} - v_{n\text{В}} \approx 2{,}6\ \textit{км/сек},$$

$$v_{r\Lambda} - v_{r\text{В}} \approx 3{,}1\ \textit{км/сек}.$$

Таким образом, при подходе к сфере действия Венеры (18—19 мая) АМС догоняла Венеру со скоростью v_4, равной примерно $\sqrt{2{,}6^2 + 3{,}1^2} = \sqrt{16{,}37} \approx 4{,}0$ *км/сек*. Так как радиус сферы действия Венеры составляет около 600 000 *км*, то легко проверить, что такая скорость относительно Венеры на границе сферы действия Венеры является гиперболической. Действительно, пусть $K_{\text{В}}$ — гравитационный параметр Венеры, $R_{\text{д.В}}$ — ее радиус действия, $h_{\text{В}}$ — константа энергии АМС при ее движении относительпо Венеры. Известно, что $K_В \approx 326\,000$ *км³/сек²*. Но

$$h_В = v_4^2 - \frac{2K_В}{R_{д.В}} = 16{,}37 - \frac{2\cdot 326\cdot 10^3}{6\cdot 10^5} > 0.$$

Следовательно, когда АМС попала в сферу действия Венеры, то внутри этой сферы действия АМС двигалась относительно Венеры по гиперболе.

Имея гиперболическую скорость относительно Венеры, АМС должна была выйти из сферы действия этой планеты. После этого она опять стала двигаться вокруг Солнца по эллиптической орбите. Однако эта эллиптическая орбита значительно отличается от той орбиты, по которой АМС двигалась до входа в сферу действия Венеры.