(P, m) при условии, что ее притягивает каждая из двух звезд, но она сама ни одну из этих звезд не притягивает *).

Эта задача носит название *ограниченной задачи трех тел* («ограниченная» — ибо на массу одного из тел — спутника — наложено ограничение: она предполагается непритягивающей).

Иногда притягивающие материальные точки называют активно гравитирующими, а непритягивающую точку — пассивно гравитирующей.

Ограниченную задачу трех тел впервые рассматривал Л. Эйлер в связи с теорией движения Луны (1772 год).

В прошлом столетии эту задачу изучали немецкий математик К. Г. Якоби, американский астроном Дж. В. Хилл, французский математик А. Пуанкаре, русский математик А. М. Ляпунов и др. Хилл применил эту задачу к построению своей теории движения Луны.

Большое внимание привлекла эта задача в XX веке (работы Т. Леви-Чивиты, Дж. Биркгофа, Н. Д. Моисеева, Г. Н. Дубошина и др.).

Один из наиболее простых вариантов ограниченной задачи трех тел возникает при следующих дополнительных условиях:

а) меньшая звезда движется вокруг большей по окружности;

б) в инерциальном пространстве спутник и обе звезды движутся в одной и той же плоскости.

Этот вариант ограниченной задачи трех тел называется *ограниченной плоской круговой задачей трех тел*. К этой задаче сводится, например, изучение движения космической ракеты под воздействием Земли и Солнца в случае, когда орбита ракеты находится в плоскости эклиптики.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

1. Пусть две активно гравитирующие материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) движутся относительно их барицентра C по окружностям. Нас интересует движение пассивно гравитирующей материальной точки (P, m)

*) Термины «звезда» и «спутник» (системы двух притягивающих центров) употребляются здесь условно, исключительно ради краткости.

«спутника») в гравитационном поле, создаваемом этими двумя «звездами».

Выберем правоориентированную прямоугольную систему координат $CXYZ$ (рис. 7.1) с началом в барицентре C двух звезд (A_1, m_1) и (A_2, m_2) и с осями, постоянно ориентированными в пространстве. При этом ось абсцисс CX изберем таким образом, чтобы она совпала с осью CA_1 в какой-то начальный момент времени ($t = 0$); за плоскость CXY примем плоскость, в которой движутся материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) относительно их барицентра; положительное направление оси аппликат CZ выберем таким образом, чтобы из каждой точки положительного луча этой оси движение точек A_1 и A_2 относительно их барицентра было видно проходящим против часовой стрелки.

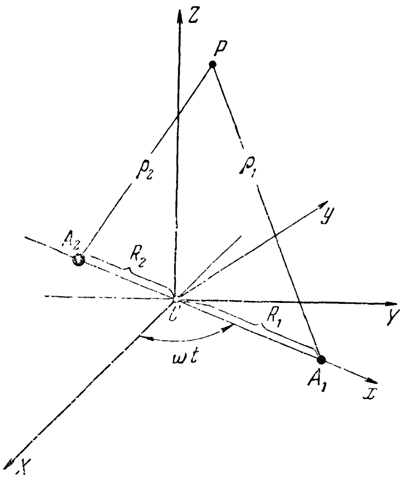

Рис. 7.1.

Введем обозначения:

$$\overrightarrow{CA_1} = \boldsymbol{R}_1, \quad \overrightarrow{CA_2} = \boldsymbol{R}_2, \quad \overrightarrow{CP} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A_1P} = \boldsymbol{\rho}_1, \quad \overrightarrow{A_2P} = \boldsymbol{\rho}_2, \quad a = A_2A_1, \\ M = m_1 + m_2, \quad \mu = m_1/M\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как C — барицентр точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2), то $m_1R_1 = m_2R_2$. Кроме того, $R_1 + R_2 = a$. Отсюда следует, что

$$R_1 = \mu a, \quad R_2 = (1 - \mu)\, a. \tag{3}$$

Силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, с которыми звезды (A_1, m_1) и (A_2, m_2) притягивают точку (P, m), равны соответственно

$$fm_1m\,(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R})/\rho_1^3 \text{ и } fm_2m\,(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R})/\rho_2^3. \tag{4}$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2,$$

откуда

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R})+\frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}). \qquad (5)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения точки (P, m) в инерциальной системе $CXYZ$.

2. Известный немецкий математик К. Г. Якоби еще в 1834 году заметил, что ценную информацию о движении спутника (P, m) можно получить, если перейти к другой системе отсчета, а именно, к системе отсчета, вращающейся вокруг оси CZ вместе с осью A_2A_1.

Выберем новую (уже неинерциальную) правоориентированную систему отсчета $Cxyz$. Пусть осью абсцисс Cx в *каждый* момент времени (не только при $t=0$!) служит ось CA_1, плоскость Cxy совпадает с плоскостью CXY, а ось Cz — с осью CZ.

Обозначим через ω угловую скорость, с которой звезды A_1 и A_2 обращаются вокруг их барицентра. Таким образом, новая система координат вращается вокруг оси CZ с угловой скоростью ω.

В этом параграфе мы выведем дифференциальные уравнения движения спутника P во *вращающейся* системе отсчета $Cxyz$. Предварительно установим одно вспомогательное тождество.

Обозначим единичные векторы осей системы координат $CXYZ$ через $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ соответственно, а системы координат $Cxyz$ — через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Пусть координаты точки P в этих системах отсчета соответственно равны X, Y, Z и x, y, z. Тогда

$$\boldsymbol{R}=X\boldsymbol{I}+Y\boldsymbol{J}+Z\boldsymbol{K}. \qquad (6)$$

Положим

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (7)$$

Понятно, что

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}.$$

Ускорение точки P относительно системы отсчета $CXYZ$ определяется по формуле

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{X}\boldsymbol{I} + \ddot{Y}\boldsymbol{J} + \ddot{Z}\boldsymbol{K}, \tag{8}$$

а скорость и ускорение той же точки P относительно системы отсчета $Cxyz$ — по аналогичным формулам

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Выразим $\ddot{\boldsymbol{R}}$ через $\ddot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r}$ и ω.

Нетрудно убедиться в том, что

$$X = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \quad Y = x\sin\omega t + y\cos\omega t, \quad Z = z \tag{10}$$

и

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}\cos\omega t - \boldsymbol{j}\sin\omega t, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{i}\sin\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t, \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}). \tag{11}$$

Если, пользуясь формулами (10), вычислить $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ и подставить полученные выражения вместе с величинами $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ в формулу (8), то после упрощений получим:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} + 2\omega(-\dot{y}\boldsymbol{i} + \dot{x}\boldsymbol{j}) - \omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}). \tag{12}$$

Введем в рассмотрение (как это часто делается в механике) *вектор* угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}.$$

Тогда, воспользовавшись тождеством $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, равенство (12) можно переписать так:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{13}$$

Это и есть искомое вспомогательное тождество.

3. Перейдем теперь к выводу уравнения движения спутника P во *вращающейся* системе отсчета $Cxyz$.

Пусть звезды A_1 и A_2 имеют в системе отсчета $CXYZ$ координаты $(X_1, Y_1, 0)$ и $(X_2, Y_2, 0)$. В системе отсчета $Cxyz$ они имеют координаты $(x_1, 0, 0)$ и $(x_2, 0, 0)$, где $x_1 = (1-\mu)a$ и $x_2 = -\mu a$. Ясно, что

$$\boldsymbol{R}_1 = X_1\boldsymbol{I} + Y_1\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{R}_2 = X_2\boldsymbol{I} + Y_2\boldsymbol{J}.$$

Положим

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{CA}_1 = \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{CA}_2 = \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{r}_2. \tag{14}$$

Воспользовавшись равенствами (14) и (13), из уравнения (5) получим соотношение:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}) - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}), \tag{15}$$

где

$$\rho_k = |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}| = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2 + z^2}, \quad k = 1, 2.$$

Уравнение (15) и есть *векторное* дифференциальное уравнение движения спутника P во вращающейся системе координат. Другую запись того же уравнения получим, если воспользуемся равенством (12)

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 2\omega(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j}) + \omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}). \tag{16}$$

Последнее векторное уравнение равносильно системе из трех скалярных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{fm_1}{\rho_1^3}y - \frac{fm_2}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{fm_1}{\rho_1^3}z - \frac{fm_2}{\rho_2^3}z. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

При конкретных числовых значениях величин m_1, m_2 и для небольших промежутков времени можно решить эту систему приближенно, если привлечь хорошо разработанные в современной математике методы численного интегрирования дифференциальных уравнений и воспользоваться быстродействующими вычислительными машинами. Таким образом, можно предвычислить траекторию полета космического аппарата на тех участках, где необходимо учитывать его тяготение к *двум* небесным телам (например, вблизи границы сферы действия одного из этих тел).

4. В теоретических исследованиях для упрощения выкладок часто пользуются следующей системой *канонических* единиц: за единицу массы принимают сумму масс двух притягивающих центров ($m_1 + m_2 = 1$); за единицу расстояния — расстояние между притягивающими центрами A_1A_2 ($a = A_1A_2 = 1$); за единицу времени — то время, которое потребуется точке A_1 для описания вокруг A_2 дуги в 1 радиан (в инерциальной системе отсчета).

В этой системе единиц период T обращения точки A_1 вокруг A_2 составляет 2π единиц. Но по формуле (2.9.10) $a^3/T^2 = f(m_1 + m_2)/4\pi^2$. При $a = 1$, $T = 2\pi$, $m_1 + m_2 = 1$ получим, что $f = 1$. Итак, в *канонической системе единиц* $f = 1$. В канонической системе единиц можно в уравнениях (17) m_1 заменить на μ, m_2 — на $1 - \mu$, f — на 1, ω — на 1:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x),\\
\ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}y,\\
\ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}z.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Полагая в уравнениях (17), (18) $z \equiv 0$, получим дифференциальные уравнения движения спутника в ограниченной *плоской* круговой задаче трех тел. Так как при $z \equiv 0$ третье из уравнений (18) превращается в тождество $0 \equiv 0$, то рассматриваемая плоская задача описывается системой дифференциальных уравнений *четвертого* порядка относительно двух вещественных функций $x(t)$ и $y(t)$.

Уравнение (15), характеризующее движение спутника (P, m) во вращающейся системе отсчета $Cxyz$, отличается от уравнения движения спутника в инерциальной системе отсчета (5) только новыми слагаемыми $-2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})$ и $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ в правой части уравнения (15). Каков же их физический смысл?

Появление этих слагаемых связано с неинерциальностью системы отсчета $Cxyz$. Величина $\boldsymbol{a}_{ц} \equiv -\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ [или, что то же, $\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$] — это центробежное ускорение. Оно имеет компоненты $\omega^2 x$ и $\omega^2 y$. В случае плоской ограниченной задачи трех тел это ускорение направлено так же, как и радиус-вектор спутника $\overrightarrow{CP}$. Второе слагаемое $\boldsymbol{a}_{к} \equiv -2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})$ или, что то же, $2\omega(\dot{y}\boldsymbol{i}-\dot{x}\boldsymbol{j})$, — взятое со знаком «минус» *кориолисово* ускорение. Его компоненеты равны $2\omega\dot{y}$ и $-2\omega\dot{x}$. Оно направлено, очевидно, перпендикулярно к вектору скорости спутника. В случае *плоской* ограниченной задачи трех тел вектор кориолисова ускорения лежит в плоскости орбиты спутника.

Движение спутника относительно *инерциальной* системы отсчета $CXYZ$ будем кратко называть *абсолютным* движением, а его движение относительно *вращающейся* системы отсчета $Cxyz$ назовем для краткости *относительным* движением. Аналогичным образом будем различать абсолютную и относительную скорости и абсолютное и относительное ускорения спутника.

Заметим еще, что уравнения (17) можно записать в виде, более удобном для запоминания. Для этой цели введем в рассмотрение функцию

$$U=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+f\frac{m_1}{\rho_1}+f\frac{m_2}{\rho_2}\,. \tag{19}$$

Легко проверить, что систему (17) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=2\omega\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial x},\\ \ddot{y}&=-2\omega\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

5. Интеграл Якоби. Умножая первое из уравнений (20) на $2\dot{x}$, второе — на $2\dot{y}$, а третье — на $2\dot{z}$ и складывая полученные произведения, найдем:

$$2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Обозначим через v скорость спутника относительно вращающейся системы отсчета $Cxyz$. Тогда

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = v^2$$

и

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Отсюда

$$v^2 = 2U - c, \tag{21}$$

где c — константа.

Равенство (21) является первым интегралом для системы (20). Он носит название *интеграла Якоби*. Этот интеграл можно записать и в виде

$$v^2 = \omega^2(x^2+y^2) + 2f\frac{m_1}{\rho_1} + 2f\frac{m_2}{\rho_2} - c. \tag{22}$$

Если в какой-то момент времени известны относительная скорость спутника и его положение, а следовательно, его расстояния ρ_1 и ρ_2 от обоих притягивающих центров, то из интеграла Якоби можно найти константу c. Если затем будет задано положение спутника в какой-либо другой момент времени, то с помощью интеграла Якоби можно будет и для этого момента времени вычислить относительную скорость спутника (но только по абсолютной величине, а не по направлению). При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (17) пользуются обычно интегралом Якоби в качестве эффективного средства для контроля правильности вычислений.