§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

1. Дифференциальные уравнения движения «спутника» в инерциальной и вращающейся системах отсчета можно вывести, привлекая простейшие сведения о комплексных переменных. Пусть движение пассивно гравитирующего спутника (P, m) происходит в той же плоскости, в которой движутся оба притягивающих центра (A_1, m_1) и (A_2, m_2) (рис. 7.2). Выберем в этой плоскости инерциальную прямоугольную систему координат CXY с началом в барицентре C точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2); ось CX расположим так, чтобы она совпала с осью CA_1 в момент времени $t = 0$. Плоскость CXY примем за плоскость комплексного переменного Z. Пусть в произвольный момент времени t точки A_1, A_2, P имели соответственно комплексные координаты Z_1, Z_2, Z.

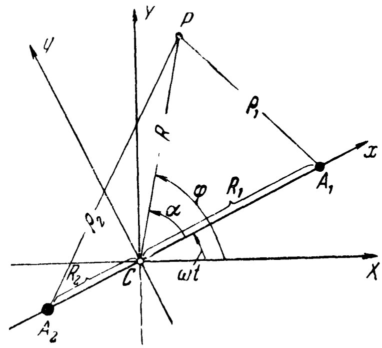

Рис. 7.2.

Тогда

$$CA_1 = |Z_1| = R_1, CA_2 = |Z_2| = R_2, CP = |Z| = R, A_2A_1 = a;$$
$$A_1P = |Z_1 - Z| = \rho_1, \quad A_2P = |Z_2 - Z| = \rho_2, \tag{1}$$
$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Заметим попутно, что $m_1R_1 = m_2R_2$, $R_1 + R_2 = a$, откуда следует, что

$$R_1 = \mu a, \quad R_2 = (1 - \mu) a.$$

Силы, с которыми точка (P, m) притягивается к точкам (A_1, m_1) и (A_2, m_2), могут быть записаны в комплексной форме следующим образом:

$$fm_1m \frac{Z_1 - Z}{\rho_1^3} \quad \text{и} \quad fm_2m \frac{Z_2 - Z}{\rho_2^3}.$$

Пользуясь вторым законом Ньютона, найдем:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = f\frac{m_1}{\rho_1^3}(Z_1 - Z) + f\frac{m_2}{\rho_2^3}(Z_2 - Z). \tag{3}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения спутника в инерциальной системе отсчета CXY.

2. Перейдем теперь к выводу уравнения движения спутника во *вращающейся* системе отсчета.

Пусть точки A_1 и A_2 вращаются вокруг точки C с угловой скоростью ω. Заставим прямоугольную систему координат Cxy вращаться вокруг точки C с той же угловой скоростью ω, причем ось Cx направим вдоль прямой A_2A_1.

Обозначим комплексные координаты точек A_1, A_2, P относительно вращающейся системы отсчета Cxy через z_1, z_2 и z; пусть $\sphericalangle A_1CP = \alpha$, $CP = R$ (R и α — функции от t). Ясно, что

$$z_1 = R_1, \quad z_2 = -R_2, \quad z = Re^{i\alpha}. \tag{4}$$

Числа Z_1, Z_2 и Z (комплексные координаты точек A_1, A_2, P в *инерциальной* системе отсчета $CXYZ$) можно также записать в показательной форме:

$$Z_1 = R_1e^{i\omega t}, \quad Z_2 = R_2e^{i(\omega t+\pi)} = -R_2e^{i\omega t}, \quad Z = Re^{i(\alpha+\omega t)}. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) следует, что

$$Z_1 = z_1e^{i\omega t}, \quad Z_2 = z_2e^{i\omega t}, \quad Z = ze^{i\omega t}. \tag{6}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), после упрощений получим искомое уравнение движения спутника во вращающейся системе отсчета. Проделаем соответствующие выкладки:

$$\left.\begin{aligned} \dot Z &= (\dot z + i\omega z)e^{i\omega t}, \quad \ddot Z = (\ddot z + 2i\omega\dot z - \omega^2 z)e^{i\omega t},\\ Z_1 - Z &= (z_1 - z)e^{i\omega t}, \quad Z_2 - Z = (z_2 - z)e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

После подстановки этих выражений в (3) и сокращения на $e^{i\omega t}$ найдем:

$$\ddot z = -2i\omega\dot z + \omega^2 z + f\frac{m_1}{\rho_1^3}(z_1 - z) + f\frac{m_2}{\rho_2^3}(z_2 - z). \tag{8}$$

Это дифференциальное уравнение *второго* порядка относительно комплексной координаты z и есть искомое дифференциальное уравнение движения спутника во вращающейся системе отсчета.

Величина $a_ц = \omega^2 z$, входящая в правую часть уравнения (8), — это *центробежное* ускорение (оно одинаково направлено с вектором z). А величина $a_к = -2i\omega\dot{z}$ — это *ускорение Кориолиса*, взятое со знаком «минус». Вектор $\boldsymbol{a}_k$ образуется из вектора скорости $\dot{z}$, если последний умножить на 2ω («растянуть» вектор $\dot{z}$), а затем повернуть на 90° по часовой стрелке в плоскости движения точки P.

Если ввести вспомогательную функцию U по формуле

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 |z|^2 + f\frac{m_1}{\rho_1} + f\frac{m_2}{\rho_2}, \tag{9}$$

то легко проверить, что уравнение (8) записывается в более компактном виде

$$\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10}$$

Умножая (10) почленно на

$$\dot{\bar{z}} = \dot{x} - i\dot{y},$$

найдем:

$$\ddot{z}\dot{\bar{z}} + 2i\omega|\dot{z}|^2 = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + i\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{x}\right).$$

Приравняем вещественные части обеих частей последнего равенства:

$$\operatorname{Re}(\ddot{z}\dot{\bar{z}}) = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y},$$

то есть

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}\dot{\bar{z}} + \dot{z}\ddot{\bar{z}}) = \frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\dot{z}\cdot\dot{\bar{z}}) = 2\frac{dU}{dt},$$

откуда

$$|\dot{z}|^2 = 2U - c. \tag{11}$$

Это и есть интеграл Якоби в комплексной форме.

Заметим, что в канонических единицах уравнения (8) — (11) принимают следующий вид:

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(-\mu - z), \tag{12}$$

$$U = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}, \tag{13}$$

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{14}$$

$$|\dot{z}|^2 = 2U - c. \tag{15}$$

3. Интеграл Якоби в инерциальной системе отсчета. Перейдем в интеграле Якоби (11) от переменного z обратно к переменному Z.

Пусть $\dot{Z}$ — скорость спутника относительно системы отсчета CXY, а $V = |\dot{Z}|$.

Так как $z = Ze^{-i\omega t}$, то

$$\dot{z} = (\dot{Z} - i\omega Z)\, e^{i\omega t},$$

$$|\dot{z}|^2 = |\dot{Z} - i\omega Z|^2.$$

Воспользуемся легко проверяемым тождеством, верным для любых *комплексных* чисел α и β:

$$|\alpha - \beta i|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\operatorname{Im}(\alpha\cdot\bar{\beta}).$$

Тогда получим:

$$|\dot{z}|^2 = |\dot{Z}|^2 + \omega^2|Z|^2 - 2\omega \operatorname{Im}(\dot{Z}\cdot\bar{Z}).$$

Обозначим через φ угол между осью CX и радиусом-вектором $\overrightarrow{CP}$. Мы можем записать Z в показательной форме: $Z = Re^{i\varphi}$. Отсюда

$$\dot{Z}\cdot\bar{Z} = (\dot{R} + iR\dot{\varphi})R,$$

$$\operatorname{Im}(\dot{Z}\bar{Z}) = R^2\dot{\varphi}.$$

Поэтому

$$|\dot{Z}|^2 = V^2 + \omega^2R^2 - 2\omega R^2\dot{\varphi}.$$

Интеграл Якоби (11) преобразуется теперь к следующему виду:

$$V^2 - 2\omega R^2\dot{\varphi} = \frac{2fm_1}{\rho_1} + \frac{2fm_2}{\rho_2} - c.$$

Умножая это равенство почленно на $\frac{1}{2}m$ (m — масса спутника), получим другую запись интеграла Якоби:

$$\frac{1}{2}mV^2 - m\left[\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right] - \omega mR^2\dot{\varphi} = -C. \qquad (16)$$

Выясним физический смысл отдельных составляющих этого интеграла. Величина $\frac{1}{2}mV^2$ — это кинетическая энергия спутника. Величина $m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$ — это работа, которую необходимо затратить, чтобы, преодолевая притяжение притягивающих центров, удалить спутник в бесконечность. Иначе говоря, $-m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$ — это потенциальная энергия спутника. Величина

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$$

— это полная энергия спутника.

Выражение $I = mR^2\dot{\varphi}$ — это кинетический момент спутника. Если учесть, что $\frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}$ — это секториальная скорость dS/dt спутника (относительно барицентра C), то кинетический момент можно представить в виде

$$I = 2m\frac{dS}{dt}.$$

В ограниченной задаче *двух* тел, как мы видели в § 3 главы II, полная энергия спутника остается постоянной в течение всего времени его движения. То же имеет место и для его секториальной скорости, а значит, и для его кинетического момента. А в ограниченной задаче *трех* тел меняется и энергия (E) спутника, и его кинетический момент (I). Но из (16) видно, что неизменной остается разность

$$E - \omega I = -C = \text{const}. \tag{17}$$

4. Преобразование Тиле. Правая часть дифференциального уравнения (12) возрастает неограниченно, если спутник в своем движении неограниченно приближается к одному из притягивающих центров. Это обстоятельство, затрудняющее численное интегрирование уравнения движения спутника, можно обойти, если воспользоваться преобразованием, предложенным датским математиком и астрономом Т. Тиле.

Прежде чем применить это преобразование, совершим во *вращающейся* плоскости Cxy перенос начала координат в середину O отрезка A_2A_1, но сохраним старое направление осей. Таким образом получим новую систему координат $O\xi\eta$, причем $O\xi \| Cx$, $O\eta \| Cy$. От переменного $z = x + iy$ перейдем к промежуточному переменному $\zeta = \xi + i\eta$ по формуле

$$\zeta = \delta + 2z,$$

где

$$\delta = 1 - 2\mu. \tag{18}$$

Можно проверить, что дифференциальное уравнение (12) и интеграл Якоби (15) примут вид

$$\ddot{\zeta} = -2i\dot{\zeta} + \left(\frac{\partial U'}{\partial \xi} + i\frac{\partial U'}{\partial \eta}\right), \tag{19}$$

где

$$U' = \frac{1}{2}|\zeta|^2 - \delta\xi + \frac{8\mu}{\rho_1} + \frac{8(1-\mu)}{\rho_2}, \tag{20}$$

и

$$|\dot{\zeta}|^2 = 2U' + h'. \tag{21}$$

К уравнению движения спутника в виде (19) мы и применим преобразование Тиле:

$$\zeta = \cos w, \quad dt = \rho_1\rho_2 d\tau. \tag{22}$$

Здесь $w = u + iv$ — комплексное переменное.

В чем смысл преобразования Ти́ле? От времени t мы переходим к другой переменной τ, так что

$$d\tau = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\,dt. \tag{23}$$

Это значит, что при подходе спутника к одному из притягивающих центров (то есть когда ρ_1 или ρ_2 мало) мы вместо каждого малого промежутка времени dt получаем во много раз больший промежуток $d\tau$ для введенной нами величины τ. Эта величина τ заменит в уравнении спутника (19) время t. Иначе говоря, величина τ выполняет такую же роль, как время t в уравнении (19); τ — это новое, вспомогательное «время», которое, как видно из (23), как бы растягивается, когда спутник подходит к одному из притягивающих центров. Быстрое движение вблизи одного из притягивающих центров рассматривается через «лупу времени», как в замедленном кинофильме.

Обратимся теперь к первой формуле преобразования Ти́ле (22). Известно, что вблизи притягивающего центра орбита спутника мало отличается от конического сечения (эллипса, гиперболы и т. п.). С другой стороны, можно показать, что при отображении $\zeta = \cos w$ прямым плоскости комплексного переменного w, параллельным осям координат, соответствуют эллипсы и гиперболы (быть может, вырождающиеся) плоскости переменного ζ. Таким образом, — хотя бы для некоторых из возможных траекторий — дуги траектории спутника вблизи притягивающего центра будут изображаться в плоскости w в виде линий, близких к прямолинейным отрезкам. Правая часть уравнения (12) разрывна в тех точках плоскости переменного ζ, которые соответствуют притягивающим центрам A_1 и A_2 (то есть для которых $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$). Аналогичным недостатком обладает, разумеется, и уравнение (19). Но можно показать, что после перехода к переменным Ти́ле w ($w = u + iv$) уравнение (19) переходит в уравнение, у которого правая часть в точках, соответствующих притягивающим центрам, уже является непрерывной и, более того, регулярной (аналитической) функцией.

Переменные Ти́ле применяются для расчета траекторий космических аппаратов. Так, например, в 1953—1955 годах в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР было рассчитано в переменных Ти́ле около тысячи различных траекторий возможного полета космического аппарата под действием Земли и Луны [6.1].

§ 4. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

1. В ближайших двух параграфах мы сделаем некоторые выводы из уравнения (7.3.8) для ограниченной плоской круговой задачи трех тел. Для простоты будем полагать, что нами выбрана *каноническая* система единиц, так что $\omega = 1$, $a = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $f = 1$, $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$. Предположим для определенности, что

$$m_1 < m_2.$$

Тогда

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

Уравнение (7.3.8) движения спутника относительно вращающейся плоскости Cxy имеет в канонических единицах вид

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(z_1 - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(z_2 - z). \qquad (1)$$

Пусть спутник в какой-то момент времени $t = t_0$ находится в точке M вращающейся плоскости Cxy и имеет нулевую относительную скорость (то есть нулевую скорость относительно вращающейся системы координат). Останется ли он в этой точке вращающейся плоскости?

Рассмотрим сначала два конкретных случая.

а) Точка M — это барицентр C двух притягивающих центров (A_1, μ) и $(A_2, 1-\mu)$. В этом случае при $t = t_0$ $z = 0$ и $\dot{z} = 0$. Поэтому ускорение $\ddot{z}$ при $t = t_0$ согласно формуле (1) равно

$$\ddot{z} = \frac{\mu}{\rho_1^3} z_1 + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} z_2.$$

Но в данном случае

$$\rho_1 = r_1,\ \rho_2 = r_2,\ z_1 = r_1 = 1 - \mu > \frac{1}{2},$$

$$z_2 = -r_2 = -\mu,\ \mu < \frac{1}{2}.$$