в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР было рассчитано в переменных Ти́ле около тысячи различных траекторий возможного полета космического аппарата под действием Земли и Луны [6.1].

§ 4. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

1. В ближайших двух параграфах мы сделаем некоторые выводы из уравнения (7.3.8) для ограниченной плоской круговой задачи трех тел. Для простоты будем полагать, что нами выбрана *каноническая* система единиц, так что $\omega = 1$, $a = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $f = 1$, $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$. Предположим для определенности, что

$$m_1 < m_2.$$

Тогда

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

Уравнение (7.3.8) движения спутника относительно вращающейся плоскости Cxy имеет в канонических единицах вид

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(z_1 - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(z_2 - z). \tag{1}$$

Пусть спутник в какой-то момент времени $t = t_0$ находится в точке M вращающейся плоскости Cxy и имеет нулевую относительную скорость (то есть нулевую скорость относительно вращающейся системы координат). Останется ли он в этой точке вращающейся плоскости?

Рассмотрим сначала два конкретных случая.

а) Точка M — это барицентр C двух притягивающих центров (A_1, μ) и $(A_2, 1-\mu)$. В этом случае при $t = t_0$ $z = 0$ и $\dot{z} = 0$. Поэтому ускорение $\ddot{z}$ при $t = t_0$ согласно формуле (1) равно

$$\ddot{z} = \frac{\mu}{\rho_1^3} z_1 + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} z_2.$$

Но в данном случае

$$\rho_1 = r_1,\ \rho_2 = r_2,\ z_1 = r_1 = 1 - \mu > \frac{1}{2},$$

$$z_2 = -r_2 = -\mu,\ \mu < \frac{1}{2}.$$

Поэтому при $t = t_0$

$$\ddot{z} = \frac{\mu(1-\mu)}{(1-\mu)^3} - \frac{(1-\mu)\mu}{\mu^3} = \frac{1}{\mu^2(1-\mu)^2}[\mu^3 - (1-\mu)^3] < 0.$$

Итак, имея нулевую скорость в точке C, спутник будет иметь отличное от нуля, а именно отрицательное, ускорение. Значит, он будет падать на бóльшую звезду A_2.

б) M — точка равных притяжений двух притягивающих центров (A_1, μ) и $(A_2, 1-\mu)$, лежащая на отрезке A_1A_2. В данном случае $\mu/\rho_1^2 = (1-\mu)/\rho_2^2$, откуда

$$\mu \frac{z_1 - z}{\rho_1^3} = (1-\mu)\frac{z - z_2}{\rho_2^3},$$

ибо $z_1 - z = \rho_1$, $z - z_2 = \rho_2$.

Поэтому [см. (1)] в момент $t = t_0$ $\ddot{z} = z$. Но точка M, как точка равных притяжений, ближе к меньшей звезде A_1, а барицентр C ближе к большей звезде A_2, так что M лежит на луче CA_1. Следовательно, $z > 0$, и поэтому $\ddot{z} > 0$ (при $t = t_0$): спутник будет двигаться по направлению к меньшей звезде A_1.

2. Пусть теперь M — *произвольная* точка вращающейся плоскости; пусть в момент времени t_0 спутник P находится в точке M и имеет нулевую относительную скорость.

Из-за тяготения к притягивающим центрам A_1 и A_2 спутник P, вообще говоря, не удержится в точке M и начнет как-то перемещаться по вращающейся плоскости. Например, он может в течение какого-то промежутка времени приближаться к точке A_1 и удаляться от точки A_2.

Возникает вопрос: нет ли во вращающейся плоскости таких особых, «привилегированных» точек, в которых спутник мог бы находиться в покое (относительно вращающейся плоскости) неограниченно долго?

Оказывается, такие точки существуют.

Такая точка M вращающейся плоскости, в которой спутник будет находиться неограниченно долго, если его начальная относительная скорость равна нулю, называется *точкой либрации*, или *точкой относительного равновесия*.

Итак, если спутник придет в какую-то точку M с нулевой относительной скоростью, то он все равно не удержится в этой точке, его «вытянут» из этой точки притягивающие его звезды. Исключение составит лишь тот случай, когда точка M окажется точкой либрации.

3. Сколько же существует точек либрации? Как они расположены на плоскости? И как их можно найти?

Так как в точке либрации относительная скорость спутника должна оставаться тождественно равной нулю ($\dot{z} = 0$), то и относительное ускорение $\ddot{z} = 0$. Уравнение (1) в точке либрации z принимает вид

$$z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(-\mu - z) = 0 \tag{2}$$

или

$$\left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1\right) z = \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right). \tag{3}$$

Имеем два случая:

1) $\operatorname{Im} z \neq 0$. Уравнение (3) принимает в этом случае вид

$$\alpha \cdot z = \beta, \tag{4}$$

где α и β — вещественные числа. Число z, для которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, удовлетворит этому условию тогда и только тогда, когда одновременно $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Действительно, если бы $\alpha \neq 0$, то левая часть (4) была бы мнимым числом, а правая — вещественным, что невозможно; а если $\alpha = 0$, то должно быть и $\beta = 0$. В нашем случае получим

$$\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 = 0 \tag{5}$$

и

$$\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right) = 0. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\rho_2 = \rho_1$, а из (5) получим, что $\rho_1 = 1$, так что $A_1M = A_2M = A_1A_2 = 1$.

Итак, точкой либрации является вершина M правильного треугольника, построенного на отрезке A_1A_2 как на основании. Имеются, очевидно, две такие точки (рис. 7.3, точки L_4 и L_5). Их называют *треугольными* точками либрации.

2) $\operatorname{Im} z = 0$. Мы теперь ищем точки либрации, лежащие на прямой A_1A_2. Задача сводится к разысканию *вещественных* корней уравнения (2). Рассмотрим отдельно три интервала прямой A_1A_2:

$$\text{а) } (z_2, z_1), \text{ б) } (z_1, +\infty), \text{ в) } (-\infty, z_2).$$

Будем сначала искать точку либрации L_1 на отрезке (z_2, z_1).

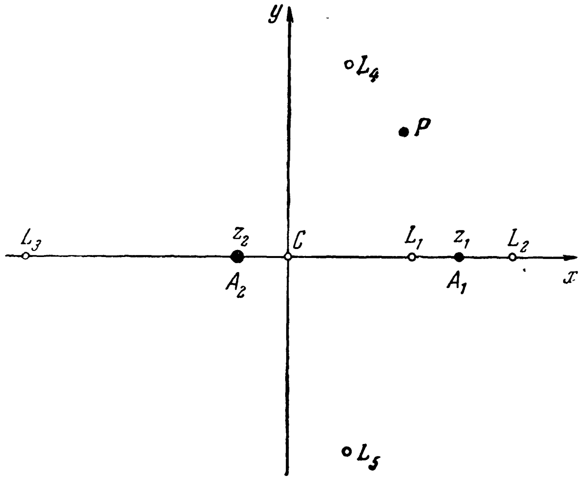

Рис. 7.3.

Выразим в уравнении (2) все неизвестные через ρ_1 ($\rho_1 = L_1A_1$):

$$\rho_2 = 1 - \rho_1, \quad z = 1 - \mu - \rho_1.$$

Получим

$$1 - \mu - \rho_1 + \frac{\mu}{\rho_1^2} - \frac{1-\mu}{(1-\rho_1)^2} = 0, \tag{7}$$

то есть

$$\rho_1^5 - (3-\mu)\rho_1^4 + (3-2\mu)\rho_1^3 - \mu(\rho_1^2 - 2\rho_1 + 1) = 0. \tag{7'}$$

Таким образом, задача сводится к решению некоторого уравнения пятой степени относительно ρ_1. Можно показать, что это уравнение имеет *только один вещественный* корень. При малых μ этот корень удобно вычислить путем разложения его в степенной ряд по степеням $(\mu/3)^{1/3}$. Можно показать, что

$$\rho_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots \qquad (8)$$

(где под $(\mu/3)^{1/3}$ следует понимать *вещественное* значение корня $\sqrt[3]{\mu/3}$).

Аналогичным образом можно показать, что существует только одна точка либрации L_2 на интервале (z_1, ∞) и одна L_3 на интервале $(-\infty, z_2)$. При малых μ удобно найти положение этих точек с помощью разложений величин ρ_1 или ρ_2 в степенные ряды.

Для L_2

$$\rho_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots \qquad (9)$$

Для L_3

$$\rho_2 = 1 - \frac{7}{12}\mu - \frac{23\cdot 7^2}{12^4}\mu^3 - \ldots \qquad (10)$$

Отсюда видно, что при малом μ, то есть при $m_1 \ll m_2$, точка либрации L_1 расположена ближе к меньшей звезде, чем L_2, примерно на $\frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^3$ канонических единиц и что расстояние точки L_3 от большей звезды меньше расстояния между притягивающими центрами A_2 и A_3 примерно на $\frac{7}{12}\mu$, так что при малых μ L_3 и A_1 примерно симметричны относительно A_2. Точки L_1, L_2, L_3 называют *прямолинейными*, или *коллинеарными*, точками либрации.

На рис. 7.4 изображены все пять точек либрации. Неколлинеарные точки либрации L_4 и L_5 лежат на окружности с центром в звезде A_2, проходящей через другую звезду A_1. Через L_4 мы обозначаем ту из этих двух точек либрации, которая находится на 60° впереди *) звезды A_1, через L_5 —

*) По ходу движения точки A_1 вокруг A_2.

ту, которая находится на 60° позади этой звезды. Три точки L_5, A_1, L_4 представляют собой последовательные вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность с центром A_2 и радиусом A_2A_1.

Вернемся к уравнению (7'). Его можно записать и так:

$$\rho_1^3\,[(3-2\mu)-\rho_1\,(3-\mu)+\rho_1^2]=\mu\,(1-\rho_1)^2,$$

откуда

$$\rho_1=\left\{\frac{\mu\,(1-\rho_1)^2}{[(3-2\mu)-\rho_1\,(3-\mu)+\rho_1{}^2]}\right\}^{1/3}. \qquad (11)$$

Вещественный корень ρ_1 этого уравнения иногда [7.4] находят методом неподвижной точки (см. § 3 главы III). Если ради краткости обозначить правую часть формулы (11) через $\varphi(\rho_1)$, то последовательные приближения $\rho_1^{(n)}$ к искомому корню ρ_1 можно вычислять по формуле

$$\rho^{(n+1)}=\varphi\,(\rho_1^{(n)}),$$

$$n=0,\,1,\,2,\,\ldots;$$

нулевое приближение $\rho_1^{(0)}$ можно принять, например, равным 0. Аналогично можно поступить и применительно к точкам либрации L_2 и L_3.

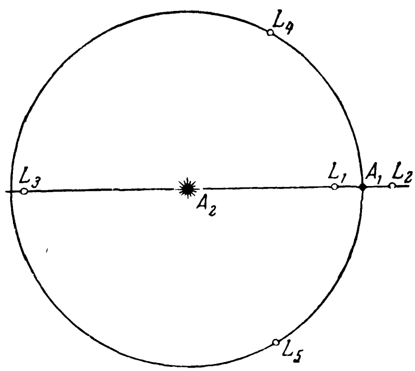

Рис. 7.4.

Пример. Определим положение точек либрации для системы Земля — Луна, принимая, что Луна движется вокруг Земли по окружности радиуса $a=384\,400$ *км*. В канонических единицах измерения $a=1$, $\mu=1:82{,}35$.

По формулам (8), (9), (10) для L_1 находим $\rho_1\approx\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\approx 0{,}15$ канонических единиц, то есть $\rho_1\approx 58\,000$ *км*; для L_2: $\rho_1\approx\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\approx 0{,}17$ канонических единиц, то есть $\rho_1\approx 65\,000$ *км*; для L_3

получим $\rho_2 \approx 1 - \frac{7}{12}\mu \approx 0{,}99$ канонических единиц, то есть $\rho_2 \approx 380\,600$ *км*.

4. Решением уравнения (1) является функция вида

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

которая, будучи подставленной в (1), обращает это уравнение в тождество. Геометрический смысл решения — это возможная траектория спутника. Найденные пять точек либрации — это пять частных решений уравнения (1) (точку, в которой все время находится спутник, также следует рассматривать как траекторию спутника).

Подробный анализ показывает, что треугольные точки либрации L_4 и L_5 при достаточно малых μ ($\mu < 0{,}038\ldots$) являются *устойчивыми* решениями уравнения (1). Это значит, что если спутник в начальный момент $t = t_0$ расположен не в самой точке L_4 (или L_5), а на некотором достаточно малом расстоянии от нее и имеет достаточно малую относительную скорость, то с течением времени спутник останется внутри малой окрестности точки L_4 (или L_5).

Наоборот, точки L_1, L_2, L_3 являются неустойчивыми решениями. Это значит, что при любом сколь угодно малом смещении спутника от такой точки либрации спутник может удалиться на значительное расстояние от этой точки.

Устойчивость точек либрации L_4 и L_5 находит интересное воплощение в солнечной системе. Пусть L_4 и L_5 — точки либрации для системы двух тел Солнце — Юпитер. В силу ранее сказанного всякое малое небесное тело, оказавшееся в какой-то момент времени достаточно близко от одной из этих точек и имеющее достаточно малую относительную скорость, должно остаться вблизи этой точки либрации неограниченно долго.

Именно так, по-видимому, обстоит дело с астероидами так называемой Троянской группы, которые концентрируются вблизи треугольных точек либрации системы Солнце — Юпитер.

Естественно полагать, что и вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна также скапливаются какие-то космические тела. Любопытно, что это предположение подтвердилось: в марте—апреле 1961 года астроном Краковской обсерватории К. Кордилевский после десятилетних поисков обнаружил два космических «облака», по-видимому, состоящих из метеорной пыли, в районе точки либрации L_4, а через некоторое время подобные «облака» были им найдены в районе точки либрации L_5 [7.5]. Возможно, что эти точки либрации будут в дальнейшем использованы для помещения в них «космического буя» — космической обсерватории. Достоинством такой обсерватории будет неизменность расстояний до Земли и Луны и вследствие этого — простота пересчета результатов наблюдений, полученных в такой обсерватории к виду, удобному для наблюдателя с Земли. Правда, возмущающее действие Солнца может оказать значительное влияние на положение такого «буя».

§ 5. ЛИНИИ ХИЛЛА

Интеграл Якоби позволяет выделить такую часть плоскости, куда непритягивающий спутник системы двух звезд в течение всего своего движения заведомо никогда попасть не сможет. На это впервые обратил внимание американский астроном Дж. В. Хилл в своих исследованиях движения Луны (1877 год).

В канонических единицах измерения интеграл Якоби (7.2.22) записывается в виде

$$v^2 = 2U - c, \tag{1}$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}. \tag{2}$$

Допустим, что в момент времени t_0 спутник находился на расстояниях ρ_{10} и ρ_{20} от звезд A_1 и A_2 и имел относительную скорость v_0. Пусть ρ_0 — расстояние спутника от барицентра C. Постоянная c интеграла Якоби выражается через начальные данные ρ_{10}, ρ_{20}, ρ_0 при помощи формул

$$c = 2U_0 - v_0^2, \tag{3}$$

где

$$2U_0 = \rho_0^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_{10}} + \frac{1-\mu}{\rho_{20}}\right). \tag{4}$$