поисков обнаружил два космических «облака», по-видимому, состоящих из метеорной пыли, в районе точки либрации L_4, а через некоторое время подобные «облака» были им найдены в районе точки либрации L_5 [7.5]. Возможно, что эти точки либрации будут в дальнейшем использованы для помещения в них «космического буя» — космической обсерватории. Достоинством такой обсерватории будет неизменность расстояний до Земли и Луны и вследствие этого — простота пересчета результатов наблюдений, полученных в такой обсерватории к виду, удобному для наблюдателя с Земли. Правда, возмущающее действие Солнца может оказать значительное влияние на положение такого «буя».

§ 5. ЛИНИИ ХИЛЛА

Интеграл Якоби позволяет выделить такую часть плоскости, куда непритягивающий спутник системы двух звезд в течение всего своего движения заведомо никогда попасть не сможет. На это впервые обратил внимание американский астроном Дж. В. Хилл в своих исследованиях движения Луны (1877 год).

В канонических единицах измерения интеграл Якоби (7.2.22) записывается в виде

$$v^2 = 2U - c, \tag{1}$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}. \tag{2}$$

Допустим, что в момент времени t_0 спутник находился на расстояниях ρ_{10} и ρ_{20} от звезд A_1 и A_2 и имел относительную скорость v_0. Пусть ρ_0 — расстояние спутника от барицентра C. Постоянная c интеграла Якоби выражается через начальные данные ρ_{10}, ρ_{20}, ρ_0 при помощи формул

$$c = 2U_0 - v_0^2, \tag{3}$$

где

$$2U_0 = \rho_0^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_{10}} + \frac{1-\mu}{\rho_{20}}\right). \tag{4}$$

В силу интеграла Якоби в любой момент времени координаты и скорость спутника P удовлетворяют условию

$$v^2 = 2U - c, \tag{5}$$

где

$$2U = r^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right). \tag{6}$$

Очевидно, в любой точке, куда спутник может попасть, имеет место неравенство $v^2 \geqslant 0$, то есть $2U - c \geqslant 0$. А область, в которой $2U - c < 0$,— это область, где движение заведомо невозможно.

Линия

$$2U - c = 0 \tag{7}$$

отделяет множество тех точек вращающейся плоскости, где движение спутника, вообще говоря, возможно, от множества точек, где движение спутника наверняка невозможно. Такая линия называется *линией Хилла*, или *линией нулевой относительной скорости* (как видно из (3), в каждой точке такой линии должно быть $v = 0$). Уравнение линии Хилла (7) можно переписать и так:

$$x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \tag{8}$$

Меняя c, мы получим семейство линий Хилла.

Сначала представим себе линию Хилла при большом c. Уравнение (8) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = c + \varepsilon, \tag{9}$$

где ε будет мало, если ρ_1 и ρ_2 велики. Если бы ε было равно 0, то уравнение (9) представляло бы собой уравнение окружности с центром C радиуса $\sqrt{c}$. Если же $\varepsilon \neq 0$, но мало по сравнению с c, то линия (9) близка к окружности:

$$x^2 + y^2 = c. \tag{10}$$

Таким образом, при большом c и больших ρ_1 и ρ_2 уравнению (8) удовлетворяют координаты точек, лежащих на кривой, близкой к окружности (10). При малых ρ_1 и ρ_2 (то есть при малых x и y) уравнение (8) перепишем в виде

$$\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{1-\mu}{\rho_2}=\frac{c}{2}-\alpha, \tag{11}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2}(x^2+y^2). \tag{12}$$

Отвлечемся временно от равенства (12).

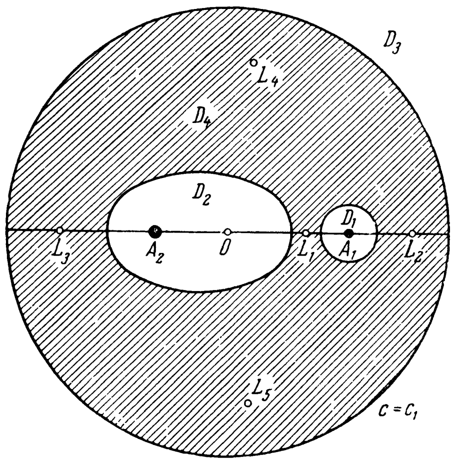

Рис. 7.5.

Равенство (11) при $\alpha=0$ представляет собой уравнение хорошо изученной линии

$$\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{1-\mu}{\rho_2}=\frac{c}{2}, \tag{13}$$

которую называют *овалом*. При достаточно больших $c=c$ эта линия распадается на два замкнутых контура, описанных вокруг каждой из точек A_2 и A_1 (рис. 7.5); при меньших $c=c_3<c_1$ эта линия имеет форму гимнастической гантели, причем более «массивная» часть «гантели» описана около большей звезды A_2 (см. рис. 7.7). Если $\alpha\neq 0$, но достаточно мало (по сравнению с c), то линия (11) будет мало отличаться от овала.

Таким образом, при большом c линия Хилла разбивает всю плоскость на четыре области (см. рис. 7.5). Во всех точках каждой из этих областей величина $2U - c$ сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, например, в D_3, достаточно рассмотреть *одну* какую-либо точку из D_3. Если возьмем в области D_3 точку $P(x, y)$, настолько далекую от C, чтобы было

$$x^2 + y^2 > 2c$$

и

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} < c,$$

то получим, что $2U - c > 0$. Значит, и во всей области D_3 $2U - c > 0$.

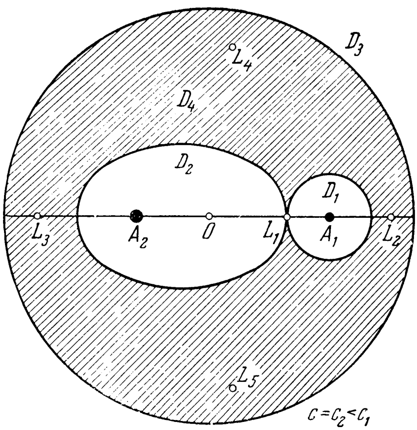

Рис. 7.6.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в областях D_2 и D_1 $2U - c > 0$, а в области D_4 $2U - c < 0$. Таким образом, при большом c спутник в своем движении не может попасть в область D_4 (на рис. 7.5 она заштрихована); если движение возможно, то лишь в областях D_1, D_2, D_3.

При уменьшении c происходит сжатие наружной ветви кривой (7) и расширение ее внутренних ветвей. Картина деформации кривой (7) при изменении c показана на рис. 7.5—7.11 *). Здесь

$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 > c_6 > c_7.$$

При некоторых частных значениях константы c может произойти самоприкосновение кривой (7), то есть прикосновение различных ее ветвей. Точка самоприкосновения будет особой для кривой Хилла. В такой точке частные про-

*) Эти рисунки носят ориентировочный характер и должны дать лишь качественное представление об изменении областей, в которых движение невозможно.

изводные функции $2U - c$ должны быть равны нулю, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

Пусть в такой точке оказался спутник с нулевой относительной скоростью: $\dot{z} = 0$. Из уравнения движения спутника (см.(7.3.14))

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} i \tag{15}$$

следует, что в такой точке $\ddot{z} = 0$. Но в предыдущем параграфе мы выяснили, что точки, в которых при выполнении условия $\dot{z} = 0$ имеет место равенство $\ddot{z} = 0$, являются точками либрации. Следовательно, каждая особая точка кривой (7) является точкой либрации.

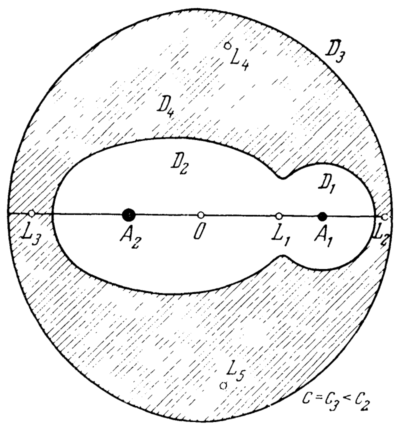

Рис. 7.7.

Следуя рассуждениям советского механика В. А. Егорова, проследим за эволюцией величины c и самой кривой Хилла (7) при нарастании начальной скорости v_0 спутника P, если последний находится в достаточно малой окрестности точки A_2 *).

Пусть в какой-то начальный момент t_0 спутник находится в точке P_0 на расстояниях ρ_{20} и ρ_{10} от звезд A_2 и A_1 вблизи звезды A_2 и получил начальную относительную скорость v_0. Константу c можно найти из зависимости

$$c = 2U_0 - v_0^2, \tag{16}$$

*) В. А. Егоров рассматривал случай, когда A_1 — Луна, A_2 — Земля.

где

$$U_0 = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) + \frac{\mu}{\rho_{10}} + \frac{1-\mu}{\rho_{20}}. \tag{17}$$

Если $v_0 = 0$ или v_0 мало, то спутник P останется внутри некоторого овала, описанного около притягивающего центра A_2. Из (16) видно, что при росте начальной скорости v_0 константа c будет убывать; при этом овал около точки A_2 и сходный овал около точки A_1 будут «разбухать».

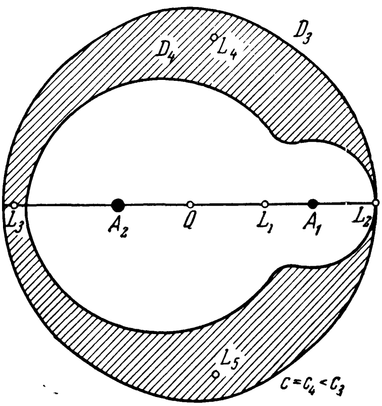

Рис. 7.8.

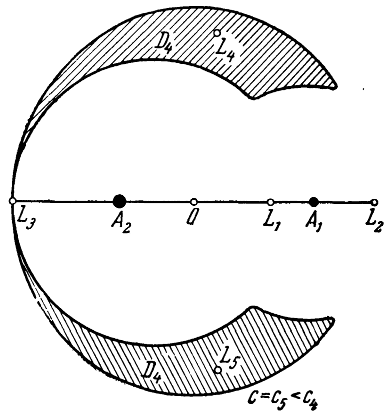

Рис. 7.9.

При некотором значении начальной скорости $v_0 = v_0^{(1)}$ овалы, описанные около притягивающих центров A_1 и A_2, сомкнутся в точке либрации L_1 (рис. 7.6). Зная положение этой точки (то есть ее координаты $x^{(1)}$, $y^{(1)}$), можно найти константу $c^{(1)}$ из уравнения

$$2U(x^{(1)}, y^{(1)}) - c^{(1)} = 0$$

[ср. с формулой (7); на рис. 7.6 $c^{(1)}$ обозначено через c_2].

При удачном выборе направления начальной скорости $v_0^{(1)}$ в принципе возможно достижение спутником точки либрации L_1, а при дальнейшем малом увеличении начальной скорости v_0 возможен перелет спутника из овала D_2 в овал D_1.

При дальнейшем возрастании начальной скорости v_0 величина c будет убывать [см. формулу (16)]. При определенных значениях c, равных определенным числам $c^{(2)}$, или $c^{(3)}$, или $c^{(4)}$ $(c^{(2)} > c^{(3)} > c^{(4)})$, уравнение (7) будет представлять собой уравнение кривой, имеющей особой точкой соответствующую точку либрации L_2, L_3, L_4 или L_5 (на рис. 7.8 и 7.9 $c^{(2)} \equiv c_4$, $c^{(3)} \equiv c_5$).

Значения этих чисел $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, $c^{(4)}$ можно найти, подставив в уравнение (7) вместо (x, y) координаты соответствующих точек либрации L_2, L_3, L_4. Интеграл Якоби (16) тогда позволит найти те минимальные относительные скорости $v_0^{(2)}$, $v_0^{(3)}$, $v_0^{(4)}$ в заданной точке P_0, при которых в принципе становится возможным достижение этих точек либрации *).

При скоростях, немного больших чем $v_0^{(2)}$, спутник может начать удаляться в бесконечность, но при этом он должен обязательно пройти вблизи точки L_2 (рис. 7.8)

При дальнейшем нарастании скорости v_0 будет расширяться «горловина» у точки L_2. Если спутник при такой начальной скорости сможет удалиться на бесконечно большое расстояние от звезд A_1 и A_2, то он обязательно пройдет через эту горловину.

Так будет обстоять дело до тех пор, пока начальная скорость v_0 меньше, чем $v_0^{(3)}$.

Если начальная скорость $v_0 = v_0^{(3)}$, то можно сообщить спутнику эту скорость в таком направлении, чтобы он достиг точки L_3 с нулевой относительной скоростью (рис. 7.9). При скорости, немного большей чем $v_0^{(3)}$, спутник может неограниченно удалиться от звезд A_1 и A_2, проходя через горловину вблизи точки либрации L_3.

При дальнейшем нарастании начальной скорости v_0 будет расширяться горловина у точки L_3 (как, впрочем, и у точки L_2), а области, не доступные спутнику ни при каком направлении начальной скорости, будут сжиматься к треугольным точкам либрации L_4 и L_5. При $v_0 > v_0^{(4)}$ спутник P может неограниченно удалиться от звезд A_1 и A_2, двигаясь в плоскости по любому направлению (рис. 7.11).

*) Скорости $v_0^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, иногда называют *критическими*.

Приведем в качестве примера значения критических скоростей для случая, когда притягивающими центрами служат Земля и Луна (табл. 2), причем малое тело (космическая ракета) находится в начальный момент в точке P_0 на высоте 200 *км* над поверхностью Земли, то есть на сфере радиуса 6570 *км*, описанной около центра Земли *).

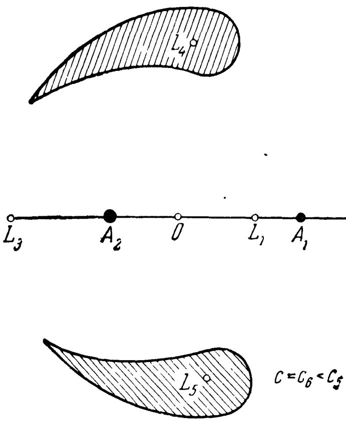

Рис. 7.10.

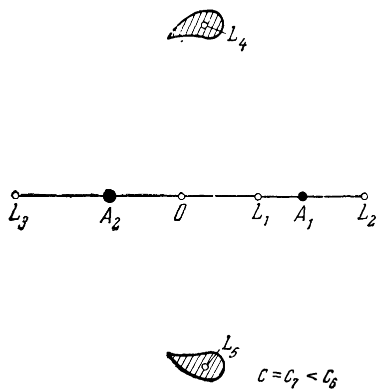

Рис. 7.11.

Как показывает более тщательный анализ, положение ракеты на этой сфере практически не влияет на значение соответствующей критической скорости.

Таблица 2

Точки либрации	Критическая относительная скорость, необходимая для достижения точки либрации, *м/сек*
L_1	10 848,90
L_2	10 849,68
L_3	10 857,38
L_4 (или L_5)	10 858,54

*) Данные заимствованы из [6.1].