## § 6. ДОПОЛНЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

**1.** Пространственная ограниченная задача трех тел. В предыдущих трех параграфах мы ради простоты ограничились случаем, когда движение обоих притягивающих центров и их спутника происходит в одной и той же плоскости.

Непосредственным обобщением этой задачи является «ограниченная пространственная круговая задача трех тел», о которой мы говорили в § 2.

Пользуясь интегралом Якоби (7.2.22), можно во вращающемся пространстве ввести в рассмотрение *поверхности* нулевой относительной скорости (поверхности Хилла), отделяющие области, в которых возможно движение спутника, от областей, в которых движение наверняка невозможно.

Еще более общий случай ограниченной задачи трех тел мы получим, если допустим, что $(A_1, m_1)$ и $(A_2, m_2)$ движутся относительно их барицентра $C$ не по окружностям, а по каким-то иным коническим сечениям.

**2.** Теоремы о необратимости и симметрии в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел. Если в какой-то области пространства движение спутника двух притягивающих центров $(A_1, m_1)$ и $(A_2, m_2)$ $(m_1 < m_2)$ возможно, то, разумеется, он может двигаться не по любой кривой из этой области и не в любом направлении. На следующие любопытные элементарные факты обратил внимание американский ученый А. Миеле (Miele).

а) *Теорема о необратимости*: если во вращающейся системе отсчета $xyz$ возможно прямое движение спутника по траектории, заданной уравнением $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, то обратное движение вдоль этой траектории физически невозможно.

б) *Теорема о симметрии*: если физически возможна траектория

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \tag{A}$$

то физически возможны еще такие три траектории:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} - z(t)\boldsymbol{k}, \tag{B}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(t) = x(-t)\boldsymbol{i} - y(-t)\boldsymbol{j} + z(-t)\boldsymbol{k}, \tag{C}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3(t) = x(-t)\boldsymbol{i} - y(-t)\boldsymbol{j} - z(-t)\boldsymbol{k}. \tag{D}$$

Траектории (B), (C), (D) симметричны траектории (A), соответственно, относительно плоскости движения звезд $A_1$ и $A_2$, относительно плоскости $Cxz$ и относительно прямой $A_2A_1$.

3. Проблема захвата. Большой интерес для космонавтики представляет следующая проблема захвата в ограниченной круговой задаче трех тел: может ли «непритягивающая» материальная точка (например, космическая ракета), пришедшая «из бесконечности» в некоторую ограниченную область $D$ пространства, где она подвергается притяжению двух «звезд», остаться навсегда в этой области?

С первого взгляда может показаться очевидным, что всегда возможен такой «удачный» выбор направления и величины скорости «непритягивающей» точки, чтобы она, например, навсегда осталась внутри сферы притяжения одной из двух звезд. Так, кажется возможным направить космическую ракету с Земли к Марсу с тем, чтобы она вошла в сферу притяжения Марса (относительно Солнца) с малой скоростью и затем осталась внутри этой сферы.

Однако тщательный анализ приводит к совершенно иным выводам. Еще в 1930 году швейцарский математик Э. Хопф показал, что пришедшая из бесконечности непритягивающая точка, притягиваемая двумя звездами, должна, вообще говоря, снова удалиться в бесконечность. Иными словами, захват в ограниченной задаче трех тел чрезвычайно маловероятен *).

Весьма интересный анализ был произведен советским механиком В. А. Егоровым [6.1], [7.1]. Рассматривая случай, когда область $D$ есть сфера притяжения или сфера действия меньшей звезды относительно большей звезды, он пришел к следующему выводу: если в круговой ограниченной задаче трех тел отношение притягивающих масс $m_1/m_2$ достаточно мало, то непритягивающая точка, пришедшая из бесконечности в сферу притяжения меньшей звезды, обязательно выйдет из этой сферы. Вывод остается в силе, если вместо сферы притяжения брать сферу действия меньшей звезды.

*) Точнее, множество начальных данных, при которых возможен захват, имеет нулевую меру в смысле Лебега. Однако результат Хопфа не исключает возможности захвата при некоторых «исключительных» значениях начальных данных.

Для того чтобы теорема Егорова имела место, достаточно, чтобы отношение масс $m_1 / m_2$ было порядка $10^{-4}$ или меньше. Отсюда, в частности, следует, что космическая ракета, посланная с Земли и попавшая с сферу притяжения или сферу действия Марса или Венеры, обязательно выйдет из этих сфер.

Теорема Егорова не позволяет сделать аналогичные выводы для систем Земля — Луна — ракета или Солнце — Юпитер — ракета. Для подобных случаев оказывается целесообразным следующее *приближенное* рассмотрение возможности захвата, предложенное В. А. Егоровым. Назовем *траекторией сближения* такую траекторию непритягивающего спутника $P$, которая а) начинается вблизи одного из притягивающих центров ($A_2$) и б) на первом обороте точки $P$ относительно точки $A_2$ (то есть еще до того, как радиус-вектор $A_2P$ сделает полный оборот вокруг точки $A_2$) входит в сферу действия второго притягивающего центра $A_1$.

В. А. Егоров рассматривает случай, когда $A_2$ — Земля, а $A_1$ — Луна. Он показывает, что траектория сближения обязательно должна выйти из сферы действия Луны. Иными словами, захват Луной космического корабля с Земли на траектории сближения невозможен. Значит, если захват снаряда с Земли и может произойти, то это во всяком случае не может быть на траектории сближения. Вывод В. А. Егорова следует из того, что участок траектории сближения внутри сферы действия Луны весьма близок к гиперболе (в селеноцентрической системе координат, то есть в системе отсчета с началом в центре Луны и с неизменно ориентированными осями координат).

Аналогично можно показать, что неуправляемый снаряд, который запущен с Земли и вошел в сферу действия какой-либо планеты (относительно Солнца) на первом своем обороте вокруг Солнца, обязательно выйдет из этой сферы действия (если он только не столкнется с планетой).

**4.** Осцилляция в ограниченной задаче трех тел. Будем рассматривать движение спутника двух звезд в инерциальной системе отсчета с началом в их барицентре $C$.

Если непритягивающему спутнику $P$ двух притягивающих центров ($A_1$, $m_1$) и ($A_2$, $m_2$) сообщить в какой-либо точке пространства достаточно большую скорость, то он уйдет в бесконечность (вспомните, например, задачу о третьей космической скорости, которую можно решить и в предположении, что ракета вовсе лишена способности притягивать).

Если же непритягивающему спутнику сообщена достаточно малая скорость, то он навсегда останется внутри некоторого конечного шара с центром в барицентре данных звезд.

Может показаться с первого взгляда, что при *любой* величине начальной скорости, сообщенной спутнику, возможен только один из этих двух исходов.

Советский математик К. А. Ситников обнаружил (см. [5.2]), что возможен еще и третий исход, а именно, может случиться, что спутник $P$ будет совершать колебательное (осцилляционное) движение: при $t \to \infty$ его расстояния от каждого из притягивающих центров $A_1$, $A_2$ не остаются ограниченными и в то же время эти расстояния не стремятся к бесконечности.

К. А. Ситников строит конкретный пример системы трех тел, в которой имеет место осцилляция. Пусть звезды $A_1$ и $A_2$ имеют равные массы $m_1 = m_2 = M$; $C$ — их барицентр; $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета; $C\xi\eta$ — плоскость, в которой движутся точки $A_1$ и $A_2$.

Предположим, что притягивающие центры $A_1$ и $A_2$ при своем движении описывают эллипсы с большой полуосью $a$ и эксцентриситетом $\varepsilon$, отличным от нуля. Движение точек $(A_1, M)$ и $(A_2, M)$ будет вполне определено, если для какого-то одного момента будет задана величина угла $\varphi$ между осью $C\xi$ и вектором $\overrightarrow{CA_1}$. Пусть при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, а непритягивающий спутник $P$ находится в точке $C$ и имеет скорость $v_0$, направленную по оси $C\zeta$. Для такого частного случая ограниченной задачи трех тел К. А. Ситников доказывает следующий факт.

Для каждого значения $\varphi_0$ и каждой последовательности положительных чисел $\{S_k\}$ (в частности, для любой последовательности, стремящейся к бесконечности) существует такое значение $v_0$, что при $t > 0$, $t \to \infty$ спутник $P$ бесконечное число раз пройдет через точку $C$, удаляясь от нее после $k$-го прохождения на расстояние, большее, чем $S_k$, $k = 1, 2, \ldots$

5. Периодические орбиты. Дифференциальные уравнения ограниченной плоской круговой задачи трех тел могут быть решены для любого данного конечного промежутка времени с любой требуемой точностью, если воспользоваться методами численного интегрирования. Однако получаемые таким образом результаты не позволяют судить о движении непритягивающего спутника вне этого промежутка времени. Исключение составляет тот случай, когда движение периодическое.

Движение спутника $P$ в ограниченной плоской круговой задаче трех тел называют *периодическим*, если его координаты $x(t)$, $y(t)$ во вращающейся системе отсчета являются периодическими функциями времени, то есть существует такая константа $\lambda > 0$, что $x(t+\lambda) = x(t)$, $y(t+\lambda) = y(t)$ при любом $t$. Если движение точки $P$ является периодическим и мы знаем его в течение только одного периода, то тем самым мы знаем движение для любого промежутка времени. В течение последних 70 лет появилось значительное число исследований, посвященных периодическим орбитам ограниченной задачи трех тел. Так, например, группа датских астрономов (Т. Ти́ле, Э. Стремгрен и другие) дали полную классификацию периодических решений для так называемой Копенгагенской задачи, то есть для ограниченной плоской круговой задачи трех тел при условии, что массы притягивающих центров $A_1$ и $A_2$ равны ($m_1 = m_2$). Аналогичное исследование при $m_1 / m_2 = 1 : 10$ выполнил английский астроном Дж. Дарвин в последние годы XIX столетия. Фундаментальные результаты и методы в исследовании периодических орбит принадлежат русскому математику А. М. Ляпунову (1857—1918) и французскому математику А. Пуанкаре (1856—1912).