ГЛАВА VIII

ОТКЛОНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ОТ КЕПЛЕРОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

§ 1. ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ОРБИТЫ

1. В главах II—IV мы подробно ознакомились с движением «спутника» (P, m) под действием тяготения к некоторому притягивающему центру (A, M). Траекторию, по которой движется спутник P относительно притягивающего центра A, обычно называют кеплеровой.

При изучении движения спутника, помимо тяготения к притягивающему центру, часто оказывается необходимым учитывать и другие факторы, которые действуют на спутник и существенно сказываются на описываемой им траектории. К таким факторам относятся:

1) тяготение к другим небесным телам (например, тяготение спутника Земли к Луне или Солнцу);

2) сопротивление атмосферы;

3) несферическая структура центрального тела (например, сплюснутость Земли);

4) световое давление на спутник;

5) электромагнитные силы, возникающие вследствие перемещения металлических частей спутника в электромагнитном поле центрального тела.

Равнодействующую $\boldsymbol{F}$ всех сил, учитываемых при решении задачи о движении спутника, можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{г}} + \boldsymbol{F}_{\text{в}}.$$

Одно из них, $\boldsymbol{F}_{\text{г}}$ —«главная» сила, с которой спутник P притягивается к центральному телу, рассматриваемому как материальная точка; она определяется через массу центрального тела M, массу спутника m и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, соединяющий барицентр A центрального тела со спутником P, по закону всемирного тяготения:

$$\boldsymbol{F}_{\text{г}} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Второе слагаемое $\boldsymbol{F}_{\text{в}}$, обычно по модулю значительно меньшее, чем $\boldsymbol{F}_{\text{г}}$, называется возмущающей силой. Ускорение $\boldsymbol{\Phi}$, сообщаемое ею спутнику, называют возмущающим ускорением. Таким образом, уравнение движения спутника имеет вид

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_{\text{в}},$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Phi}. \tag{1}$$

Если бы возмущающее ускорение $\boldsymbol{\Phi}$ было равно нулю, то уравнение (1) представляло бы собой дифференциальное уравнение задачи двух тел и определило бы кеплерову орбиту (эллипс, гиперболу или параболу). Положение, форма, размеры орбиты и положение самого спутника на ней полностью характеризовались бы шестью константами — элементами этой орбиты Ω, γ, ε, p, ω, τ *).

Если же $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$, то орбита, вообще говоря, не будет коническим сечением. Но мы можем все же считать, что спутник в каждый момент времени t находится на некотором коническом сечении, а именно на той кеплеровой орбите, на которой он оказался бы, если бы в момент t вдруг прекратилось действие возмущающей силы.

Для каждого момента времени t будет своя такая кеплерова орбита. Иначе говоря, коническое сечение, на котором находится спутник, меняется с течением времени, оно как бы «дышит», то разбухая, то сжимаясь, то поворачиваясь в пространстве. Это значит, что элементы этой орбиты, вообще говоря, меняются с течением времени, они являются функциями от времени t. Но в каждый момент времени t такое коническое сечение касается истинной траектории спутника в той самой точке, где в этот момент и

*) Через τ мы в этой главе обозначаем момент прохождения спутника через перицентр.

находится спутник. Непрерывно меняющаяся кеплерова орбита, которая строится указанным выше образом, называется *оскулирующей орбитой*, а ее элементы

$$\Omega(t),\ \gamma(t),\ \varepsilon(t),\ p(t),\ \omega(t),\ \tau(t) \tag{2}$$

называют *оскулирующими*.

Если шесть функций (2) известны, то можно найти положение спутника в любой момент времени t_1.

Например, если окажется, что $\varepsilon(t_1) < 1$ и $\gamma(t_1) \neq 0$, то три координаты спутника P в момент t_1 можно вычислить по формулам (4.2.25) (предварительно придется вычислить a, b и E, что нетрудно сделать). По сходным формулам можно найти положение спутника и в том случае, когда $\varepsilon(t_1) > 1$ или $\varepsilon(t_1) = 1$.

Для нахождения шести функций (2) используют вспомогательные уравнения, которые связывают производные от этих функций с самими функциями. Эти дифференциальные уравнения называются *уравнениями Ньютона — Лагранжа*.

Для вывода уравнений Ньютона — Лагранжа воспользуемся приемом, предложенным А. И. Лурье [8.9].

2. В дальнейшем нам потребуются некоторые несложные вспомогательные факты, относящиеся к кинематике твердого тела, вращающегося вокруг некоторой точки A.

1) Если тело вращается вокруг некоторой оси, проходящей через точку A, с угловой скоростью *) ω, то можно это вращение задать вектором $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — орт оси вращения; при этом скорость $\boldsymbol{v}$ каждой точки P этого тела определяется через ее радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R} \equiv \overrightarrow{AP}$) по формуле

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

или

$$d\boldsymbol{R}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

2) При *любом* движении твердого тела, имеющего неподвижную точку A, можно в каждый момент времени t подобрать такой вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$, что для любой точки P этого тела будет иметь место равенство

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

*) Угловая скорость ω, о которой говорится в этом пункте, не имеет ничего общего с аргументом перицентра ω (одним из элементов орбиты спутника), о котором мы говорили выше.

где $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{AP}$. Ось, проходящая через точку A и определяемая вектором $\boldsymbol{\omega}$, называется *мгновенной осью вращения* тела, а сам вектор $\boldsymbol{\omega}$ — *мгновенной угловой скоростью тела.*

3) При сложении нескольких движений твердого тела, имеющего неподвижную точку A, мгновенные угловые скорости складываются.

4) Движение тела, обладающего неподвижной точкой A, полностью определено, если в каждый момент времени известно положение осей подвижной системы отсчета $A\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы отсчета $Axyz$. Пусть можно перейти от системы $Axyz$ к системе $A\xi\eta\zeta$ при помощи трех последовательных поворотов вокруг осей, определяемых единичными векторами $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, соответственно на углы α_1, α_2, α_3 (α_k и $\boldsymbol{n}_k$ могут меняться с течением времени). Тогда мгновенные скорости вращения вокруг каждой из этих осей характеризуются векторами

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\alpha}_1(t)\boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\alpha}_2(t)\boldsymbol{n}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\alpha}_3(t)\boldsymbol{n}_3, \tag{6}$$

а мгновенная скорость вращения тела может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3,$$

то есть

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}_1\boldsymbol{n}_1 + \dot{\alpha}_2\boldsymbol{n}_2 + \dot{\alpha}_3\boldsymbol{n}_3.$$

3. Выведем теперь уравнения Ньютона — Лагранжа. Пусть движение спутника P (рис. 8.1) рассматривается относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $Axyz$ с началом в притягивающем центре A. Единичные векторы осей обозначим соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Рассмотрим в каждый момент времени t три взаимно ортогональных единичных вектора: вектор $\boldsymbol{e}_1$ — орт радиуса-вектора спутника $\overrightarrow{AP}$; вектор $\boldsymbol{e}_2$ — единичный вектор поперечной составляющей скорости спутника $\boldsymbol{v}_n$ (этот вектор лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор спутника $\overrightarrow{AP}$ и вектор его скорости $\boldsymbol{v}$); вектор $\boldsymbol{e}_3$, определяемый формулой

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

Перенося эти три единичных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в одну точку A, получим ортогональный триэдр, который можно рассматривать как некоторое твердое тело. С течением времени этот триэдр будет вращаться, но одна его точка (A)

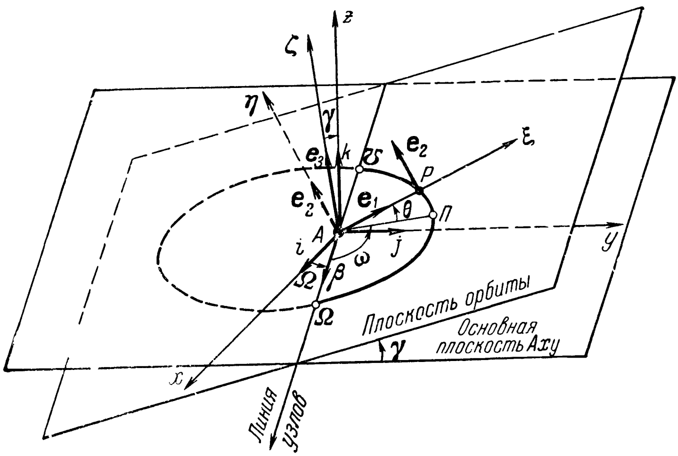

Рис. 8.1.

останется все время неподвижной. Поэтому к триэдру $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ можно применить положения кинематики твердого тела (см. п. 2).

Оси $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ подвижной системы координат $A\xi\eta\zeta$ направим вдоль векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Проекции возмущающего ускорения $\boldsymbol{\Phi}$ на эти оси обозначим соответственно через Φ_1, Φ_2, Φ_3. Если бы в момент t прекратилось действие возмущающей силы $F_в$, то спутник стал бы двигаться по какому-то коническому сечению (по кеплеровой орбите). Обозначим элементы этой орбиты относительно системы отсчета $Axyz$ через

$$\Omega,\ \gamma,\ p,\ \varepsilon,\ \omega,\ \tau.$$

Если бы спутник двигался по этой орбите, то в любой последующий момент его положение и скорость определялись бы формулами задачи двух тел, выведенными в главе II. Таким образом, уравнение орбиты имело бы вид

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_1, \tag{7}$$

где

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \tag{8}$$

а скорость $\boldsymbol{v}$ определялась бы формулой

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_1 + v_n \boldsymbol{e}_2, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{K}{p}}\, \varepsilon \sin \theta, \\ v_n &= \sqrt{\frac{K}{p}}\,(1 + \varepsilon \cos \theta) = \frac{\sqrt{Kp}}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В этих формулах при движении по *кеплеровой* орбите меняется θ, а величины ε, p остаются постоянными.

В *возмущенном* движении, меняя t, мы будем переходить от одной кеплеровой орбиты к другой. Каждый раз радиус-вектор и скорость спутника будут определяться по формулам (7) — (10), но в этих формулах не только θ, но и ε и p будут функциями от времени.

В момент времени t спутник, двигаясь по своей реальной, «возмущенной» орбите, имеет некоторую скорость, которая может быть определена по формуле

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{11}$$

С другой стороны, если бы в этот момент t прекратилось действие возмущающей силы, то спутник, имея ту же мгновенную скорость $\boldsymbol{v}$, стал бы двигаться по *кеплеровой* орбите. Но в таком случае его скорость определялась бы по формуле (9). Следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2. \tag{12}$$

Это равенство должно иметь место в каждый момент времени t, оно является тождеством, и поэтому его можно продифференцировать по t:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2). \tag{13}$$

С другой стороны, по условию (1)

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2) = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}. \tag{14}$$

Из (12) и (7) имеем

$$\frac{d(r\boldsymbol{e}_1)}{dt} = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2. \tag{15}$$

Два векторных равенства (14) и (15) и являются, по сути дела, дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В дальнейшем мы: 1) заменим их шестью скалярными равенствами; 2) выразим входящие в эти равенства величины через оскулирующие элементы $\varepsilon(t)$, $p(t)$, $\Omega(t)$, $\gamma(t)$, $\omega(t)$, $\tau(t)$ и их первые производные; 3) получим выражения для производных от оскулирующих элементов. Это и будут уравнения Ньютона — Лагранжа.

4. Итак, сначала заменим *два векторных равенства* (14), (15) *шестью скалярными*. Производя дифференцирование в левых частях уравнений (15), (14), получим:

$$r\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_1 = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2, \tag{16}$$

$$v_r\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \frac{dv_r}{dt}\boldsymbol{e}_1 + v_n\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + \frac{dv_n}{dt}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}. \tag{17}$$

Освободимся от входящих в (16) и (17) векторов $\frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt}$, $k = 1, 2, 3$, выразив их через $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и $\{\omega_k\}$.

Рассматривая триэдр $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ как твердое тело, мы можем записать вектор мгновенной скорости его вращения $\boldsymbol{\omega}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3, \tag{18}$$

причем согласно тождеству (4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_1, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_2, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Заменяя в этих формулах $\boldsymbol{\omega}$ при помощи (18), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} &= -\omega_2\boldsymbol{e}_3 + \omega_3\boldsymbol{e}_2, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} &= \omega_1\boldsymbol{e}_3 - \omega_3\boldsymbol{e}_1, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} &= -\omega_1\boldsymbol{e}_2 + \omega_2\boldsymbol{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Подставляя теперь найденные значения производных в (16), (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах, получим шесть скалярных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ r\omega_3 &= v_n, \\ \omega_2 &= 0, \\ \frac{dv_r}{dt} - v_n\omega_3 &= -\frac{K}{r^2} + \Phi_1, \\ v_r\omega_3 + \frac{dv_n}{dt} &= \Phi_2, \\ -v_r\omega_2 + v_n\omega_1 &= \Phi_3. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы легко находятся величины $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dv_r}{dt}$, $\frac{dv_n}{dt}$, ω_1, ω_2, ω_3:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = v_r,\\
&\frac{dv_r}{dt} = \frac{v_n^2}{r} - \frac{K}{r^2} + \Phi_1,\\
&\frac{dv_n}{dt} = -\frac{v_r v_n}{r} + \Phi_2,\\
&\omega_1 = \frac{\Phi_3}{v_n},\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \frac{v_n}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Таким образом, вместо двух векторных равенств (14), (15) мы теперь имеем шесть скалярных равенств (21).

5. Входящие в (21) вспомогательные величины ω_1, ω_2, ω_3 попытаемся выразить через *оскулирующие элементы и их производные*.

Величины ω_1, ω_2, ω_3 — это проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, определяемые ортами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_3 \boldsymbol{e}_3.$$

Вспомним, что $\boldsymbol{\omega}$ — это вектор мгновенной угловой скорости вращения триэдра $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Положение этого триэдра относительно неподвижной системы отсчета $Axyz$ характеризуется тремя углами Ω, γ, ω. Для того чтобы перейти от системы отсчета $Axyz$ к системе $A\xi\eta\zeta$, необходимо совершить последовательно три поворота: на угол Ω вокруг оси Az (определяемой ортом $\boldsymbol{k}$), затем на угол γ вокруг линии узлов $A\Omega$ (определяемой ортом $\boldsymbol{\beta}$), и, наконец, на угол u ($u = \omega + \theta$) вокруг оси $A\zeta$ (определяемой ортом $\boldsymbol{e}_3$) *). Мгновенные угловые скорости вращения вокруг каждой из этих осей равны соответственно $\dot{\Omega}\boldsymbol{k}$, $\dot{\gamma}\boldsymbol{\beta}$, $\dot{u}\boldsymbol{e}_3$. Поэтому в каждый момент времени мгновенная угловая скорость вращения триэдра $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Omega}{dt}\boldsymbol{k} + \frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{\beta} + \frac{du}{dt}\boldsymbol{e}_3. \tag{22}$$

*) Угол u обычно называют *аргументом широты*.

Если выразим векторы β *и* $\boldsymbol{k}$ *через* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ *и подставим эти выражения в* (22), *то затем легко найдем* ω_1, ω_2, ω_3.

Вектор β лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и направлен под углом u к орту $\boldsymbol{e}_1$ и под углом $u + 90°$ к орту $\boldsymbol{e}_2$. Поэтому

$$\beta = \cos u\, \boldsymbol{e}_1 - \sin u\, \boldsymbol{e}_2. \tag{23}$$

Разложим вектор $\boldsymbol{k}$ по ортам триэдра:

$$\boldsymbol{k} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3. \tag{24}$$

Вектор $\boldsymbol{k}$ наклонен к орту $\boldsymbol{e}_3$ под углом γ. Поэтому

$$c_3 = \cos\gamma. \tag{25}$$

Чтобы найти c_1 и c_2, умножим (24) векторно на $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_3 = -c_1\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_1. \tag{26}$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_3 = \sin\gamma \cdot \beta. \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$c_1 = \sin\gamma \sin u, \quad c_2 = \sin\gamma\cos u.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{k} = \sin\gamma\sin u\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\gamma\cos u\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\, \boldsymbol{e}_3. \tag{28}$$

Подставляя выражения (28) и (23) для β и $\boldsymbol{k}$ в (22) и группируя коэффициенты при ортах, получим проекции вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижного триэдра:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\gamma\sin u \frac{d\Omega}{dt} + \cos u \frac{d\gamma}{dt}, \\ \omega_2 &= \sin\gamma\cos u \frac{d\Omega}{dt} - \sin u \frac{d\gamma}{dt}, \\ \omega_3 &= \cos\gamma \frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Таким образом, *мы выразили величины* ω_1, ω_2, ω_3 *через оскулирующий элемент,* γ, *аргумент широты и* u *производные от* Ω, γ, u.

6. *Используя* (29) *и* (21), *найдем* $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, *а также* $\frac{du}{dt}$.

Действительно, подставляя значения для ω_1, ω_2, ω_3 из (29) в последние три равенства системы (21) и привлекая еще (10), получим систему трех линейных уравнений относительно производных $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{du}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\gamma\sin u\frac{d\Omega}{dt}+\cos u\frac{d\gamma}{dt}=\Phi_3\frac{r}{\sqrt{Kp}},\\ &\sin\gamma\cos u\frac{d\Omega}{dt}-\sin u\frac{d\gamma}{dt}=0,\\ &\cos\gamma\frac{d\Omega}{dt}+\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Из первых двух уравнений легко находятся производные $\frac{d\Omega}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{\sqrt{Kp}}\frac{\sin u}{\sin\gamma}\Phi_3, \tag{31}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{r\cos u}{\sqrt{Kp}}\Phi_3, \tag{32}$$

а затем из третьего получаем $\frac{du}{dt}$:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}-\frac{r}{\sqrt{Kp}}\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3. \tag{33}$$

Так как $u=\omega+\theta$, то отсюда легко можно найти величину $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\omega}{dt}+\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}-\frac{r}{\sqrt{Kp}}\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3. \tag{34}$$

Уравнения (31), (32) *являются двумя из шести уравнений системы Ньютона — Лагранжа*, а уравнение (34) мы используем далее для получения остальных уравнений этой системы.

7. Найдем теперь

$$\frac{d\omega}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Для этого обратимся к первым трем уравнениям системы (21). Используя (8) и (10), перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{K}{r^2}\,\varepsilon\cos\theta + \Phi_1, \\ \frac{dv_n}{dt} &= -\frac{K}{r^2}\,\varepsilon\sin\theta + \Phi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Из (8) и (10) видно, что величины r, v_r, v_n зависят от t через посредство трех функций θ, ε, p. Поэтому по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \frac{dv_n}{dt} &= \frac{\partial v_n}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

При помощи (8) и (10) находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{\varepsilon\sin\theta}{p}\,r^2, \quad \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{r}{p}, \quad \frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = -\frac{r^2}{p}\cos\theta, \\ &\frac{\partial v_r}{\partial\theta} = \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\cos\theta, \quad \frac{\partial v_r}{\partial p} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{\varepsilon\sin\theta}{p}, \\ &\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} = \sqrt{\frac{K}{p}}\sin\theta, \quad \frac{\partial v_n}{\partial\theta} = -\sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \\ &\frac{\partial v_n}{\partial p} = -\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{1}{2r}, \quad \frac{\partial v_n}{\partial\varepsilon} = \sqrt{\frac{K}{p}}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Подставляя величины (37) и (34) в (36), а затем (36) в уравнения (35), получим три линейных уравнения относительно $\frac{d\omega}{d'}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned}
&-\varepsilon\sin\theta\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{r}\frac{dp}{dt}-\cos\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{r\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3,\\
&-\varepsilon\cos\theta\frac{d\omega}{dt}-\frac{\varepsilon\sin\theta}{2p}\frac{dp}{dt}+\sin\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\\
&\qquad\qquad=\frac{r\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3+\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_1,\\
&\varepsilon\sin\theta\frac{d\omega}{dt}-\frac{1}{2r}\frac{dp}{dt}+\cos\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\\
&\qquad\qquad=-\frac{r\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3+\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_2,
\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

где

$$\Psi_3=\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3.$$

Складывая первое и третье уравнения, найдем $\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{dp}{dt}=2r\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_2.\tag{39}$$

Подставляя найденное $\frac{dp}{dt}$ в первое и второе уравнения и привлекая уравнение (8), после несложных выкладок получим

$$\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{K}}\left[-\frac{\cos\theta}{\varepsilon}\Phi_1+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\theta}{\varepsilon}\Phi_2-\right.$$
$$\left.-\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3\right],\tag{40}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\sqrt{\frac{p}{K}}\left\{\sin\theta\,\Phi_1+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta+\varepsilon\frac{r}{p}\right]\Phi_2\right\}.\tag{41}$$

Приведем еще без вывода формулы для производной оскулирующего элемента τ:

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{r^2}{\varepsilon K}\left[(\varepsilon\sin\theta\, N-\cos\theta)\,\Phi_1+\frac{p}{r}N\Phi_2\right]. \tag{42}$$

Здесь

$$N=\frac{2p^2}{r^2}\int_0^{\theta}\frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}. \tag{43}$$

Уравнения (31), (32), (39) — (42) *и представляют собой искомую систему уравнений Ньютона — Лагранжа.*

8. Во многих практически встречающихся случаях возмущающее ускорение Φ не зависит явно от времени t. Тогда и правые части дифференциальных уравнений Ньютона — Лагранжа тоже не зависят явно от t. В этом случае целесообразно принять за независимое переменное вместо времени t аргумент широты u [8.11]. Воспользуемся для этого уравнением (33), которое перепишем в виде

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{Kp}}{r^2\Gamma}, \tag{44}$$

где

$$\Gamma=\frac{1}{1-\frac{r^3}{Kp}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3}. \tag{45}$$

Переходя в уравнениях (31), (32), (39) — (42) к дифференцированию по u, при помощи (44) получим:

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{r^3\Gamma}{Kp}\frac{\sin u}{\sin\gamma}\Phi_3, \tag{46}$$

$$\frac{d\gamma}{du}=\frac{r^3\Gamma}{Kp}\cos u\,\Phi_3, \tag{47}$$

$$\frac{dp}{du}=\frac{2r^3\Gamma}{K}\Phi_2, \tag{48}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du}=\frac{r^2\Gamma}{K\varepsilon}\left[\sin\theta\,\Phi_1+\cos\theta\left(1+\frac{r}{p}\right)\Phi_2+\varepsilon\frac{r}{p}\Phi_2\right], \tag{49}$$

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r^2\Gamma}{K\varepsilon}\left[\cos\theta\,\Phi_1 + \varepsilon\sin\theta\left(1 + \frac{r}{p}\right)\Phi_2 - \right.$$

$$\left. - \varepsilon\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3\right], \quad (50)$$

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{r^4\Gamma}{\varepsilon K\sqrt{Kp}}\left[(\varepsilon\sin\theta\,N - \cos\theta)\,\Phi_1 + \frac{p}{r}N\,\Phi_2\right]. \quad (51)$$

Заметим, что формулы (46) — (51) получаются из уравнений (31), (32), (39) — (42), если в последних заменить t на u и правую часть умножить на $r^2\Gamma/\sqrt{Kp}$.

§ 2. ВЛИЯНИЕ СПЛЮСНУТОСТИ ПЛАНЕТЫ НА ТРАЕКТОРИЮ СПУТНИКА

Как мы уже отмечали в главе I (§ 3), потенциал планеты, имеющей форму сжатого сфероида, можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$U = \frac{K}{r} + J_2 K\frac{R_э^2}{r^3}\frac{1}{2}(3\sin^2\Psi - 1), \quad (1)$$

где r — расстояние от барицентра планеты (A) до спутника (P), Ψ — угол наклона радиуса-вектора спутника $\overrightarrow{AP}$ к плоскости экватора, $R_э$ — экваториальный радиус планеты, J_2 — безразмерная константа, $K = fM_п$, $M_п$ — масса планеты. В случае Земли $J_2 = -1082{,}8\cdot 10^{-6}$.

Отметим без доказательства, что J_2 можно вычислить по формуле

$$J_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta^2 R_э}{g_э} - 2\alpha\right), \quad (2)$$

где $g_э$ — ускорение силы тяготения к планете на экваторе, δ — угловая скорость вращения планеты вокруг ее оси и α — сжатие планеты.

Будем рассматривать движение спутника планеты в следующей системе отсчета: за основную плоскость Axy примем плоскость экватора; направление оси Ax сохраним неизменным в пространстве (в частности, в случае Земли ось Ax направим в точку весеннего равноденствия); ось