$$\frac{d\omega}{du}=\frac{r^2\Gamma}{K\varepsilon}\left[\cos\theta\,\Phi_1+\varepsilon\sin\theta\left(1+\frac{r}{p}\right)\Phi_2-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3\right], \qquad (50)$$

$$\frac{d\tau}{du}=\frac{r^4\Gamma}{\varepsilon K\sqrt{Kp}}\left[(\varepsilon\sin\theta\,N-\cos\theta)\,\Phi_1+\frac{p}{r}N\,\Phi_2\right]. \qquad (51)$$

Заметим, что формулы (46) — (51) получаются из уравнений (31), (32), (39) — (42), если в последних заменить t на u и правую часть умножить на $r^2\Gamma/\sqrt{Kp}$.

§ 2. ВЛИЯНИЕ СПЛЮСНУТОСТИ ПЛАНЕТЫ НА ТРАЕКТОРИЮ СПУТНИКА

Как мы уже отмечали в главе I (§ 3), потенциал планеты, имеющей форму сжатого сфероида, можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$U=\frac{K}{r}+J_2K\frac{R_э^2}{r^3}\frac{1}{2}(3\sin^2\Psi-1), \qquad (1)$$

где r — расстояние от барицентра планеты (A) до спутника (P), Ψ — угол наклона радиуса-вектора спутника $\overrightarrow{AP}$ к плоскости экватора, $R_э$ — экваториальный радиус планеты, J_2 — безразмерная константа, $K=fM_п$, $M_п$ — масса планеты. В случае Земли $J_2=-1082{,}8\cdot10^{-6}$.

Отметим без доказательства, что J_2 можно вычислить по формуле

$$J_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\delta^2R_э}{g_э}-2\alpha\right), \qquad (2)$$

где $g_э$ — ускорение силы тяготения к планете на экваторе, δ — угловая скорость вращения планеты вокруг ее оси и α — сжатие планеты.

Будем рассматривать движение спутника планеты в следующей системе отсчета: за основную плоскость Axy примем плоскость экватора; направление оси Ax сохраним неизменным в пространстве (в частности, в случае Земли ось Ax направим в точку весеннего равноденствия); ось

Az направим в один из полюсов планеты; ось Ay выберем так, чтобы система $Axyz$ была правоориентированной. За возмущающую силу мы примем разность между силой, с которой спутник притягивается к планете, и силой, с которой спутник притягивался бы к точке A, если бы в ней была сосредоточена вся масса планеты.

Возмущающая сила имеет потенциал

$$U_1 = J_2 K \frac{R_э^2}{2r^3} (3 \sin^2 \Psi - 1). \tag{3}$$

Вычислим проекции возмущающего ускорения $\mathbf{\Phi}$, сообщаемого спутнику, на оси координат $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$:

$$\Phi_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Проектируя на небесную сферу плоскости меридиана, экватора и орбиты спутника, получим прямоугольный сферический треугольник. Величины u, Ψ, γ являются в этом треугольнике соответственно гипотенузой, катетом и углом, противолежащим этому катету. Согласно известной формуле сферической тригонометрии [0.17]

$$\sin \Psi = \sin u \sin \gamma.$$

Поэтому

$$U_1 = J_2 \frac{KR_э^2}{2r^3} (3 \sin^2 u \cdot \sin^2 \gamma - 1). \tag{5}$$

Дадим r приращение Δr, а u и γ менять не будем. Тогда $\Delta\xi = \Delta r$, $\Delta\eta = \Delta\zeta = 0$, а U_1 получит приращение ΔU_1. Поэтому

$$\Phi_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta r} = \frac{\partial U_1}{\partial r},$$

то есть

$$\Phi_1 = -\frac{3}{2} J_2 \frac{KR_э^2}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 \gamma - 1). \tag{6}$$

Дадим величине u малое приращение Δu, а r и γ закрепим. Тогда ξ и ζ не изменятся, а η получит приращение, равное $r \cdot \Delta u$; U_1 получит приращение ΔU_1. Поэтому

$$\Phi_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \to 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta \eta} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta U_1}{r \Delta u} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

то есть

$$\Phi_2 = \frac{3}{2} J_2 \frac{KR_э^2}{r^4} \sin 2u \sin^2 \gamma. \qquad (7)$$

При помощи несколько более сложных выкладок можно показать, что

$$\Phi_3 = \frac{3}{2} J_2 \frac{KR_э^2}{r^4} \sin u \sin 2\gamma. \qquad (8)$$

Получим теперь (в первом приближении) скорость изменения элементов орбиты спутника в предположении, что оскулирующая орбита — эллипс. Начнем с долготы восходящего узла Ω. Обозначим через $d\Omega/dN$ изменение параметра Ω за один оборот спутника, то есть от того момента, когда $u = 0$, до того момента, когда $u = 2\pi$:

$$\frac{d\Omega}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du. \qquad (9)$$

Но в силу (8) и (8.1.46)

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \Gamma}{Kp} \frac{\sin u}{\sin \gamma} \cdot \frac{3}{2} J_2 \frac{KR_э^2}{r^4} \sin u \sin 2\gamma =$$

$$= 3J_2 \frac{R_э^2 \Gamma}{p^2} \cos \gamma \sin^2 u \, [1 + \varepsilon \cos (u - \omega)].$$

Проинтегрируем это выражение по u от 0 до 2π. При этом можно в первом приближении принять, что $\Gamma \approx 1$ и что в течение одного оборота можно считать p, ω и γ постоянными.

$$\frac{d\Omega}{dN} = 3J_2 \frac{\pi R_э^2}{p^2} \cos \gamma \ \textit{рад/об} = 3J_2 \frac{180 \cdot R_э^2}{p^2} \cos \gamma \ \textit{град/об}. \qquad (10)$$

Совершенно аналогично можно из (7), (8) и (8.1.50) получить:

$$\frac{d\omega}{dN} = 3J_2 \frac{\pi R_э^2}{p^2}(5\cos^2\gamma - 1) \ рад/об =$$
$$= 3J_2 \frac{180 \cdot R_э^2}{p^2}(5\cos^2\gamma - 1) \ град/об. \qquad (11)$$

Что касается других элементов орбиты спутника (p, ε, γ, τ), то они могут из-за сплюснутости планеты испытывать довольно значительные *периодические* изменения. Однако окончательные изменения этих элементов орбиты за один полный оборот будут весьма малыми и ими можно в первом приближении пренебречь.

Формулы (10) и (11) иногда записывают в ином виде, удобном в случае малого эксцентриситета ε. Пусть экваториальный радиус планеты ($R_э$) и большая полуось орбиты спутника (a) измеряются в *км*, а гравитационный параметр K имеет размерность *км*^{3}/*сек*^{2}; тогда период обращения спутника (T) составляет $2\pi a^{3/2}/\sqrt{K}$ *сек.*

Поэтому в среднем за одну секунду Ω изменится на величину $\frac{d\Omega}{dN}/T$, то есть на

$$\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K_э}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos\gamma \ рад.$$

Итак, мы пришли к следующей приближенной формуле:

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos\gamma \ рад/сек, \qquad (12)$$

или

$$\dot{\Omega} = \frac{180}{\pi} 86\,400 \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos\gamma}{(1-\varepsilon^2)^2} \ град/сут \qquad (13)$$

(здесь сутки понимаются как земные средние солнечные сутки).

Для орбит спутников Земли, имеющих эксцентриситет $\varepsilon < 0{,}1$, можно заменить формулу (13) более простой, если учесть, что $J_2 = -1082{,}8 \cdot 10^{-6}$, $K = 398\,600$ *км³/сек²*, $R_э = 6378$ *км*:

$$\dot{\Omega} \approx -10\left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \cos\gamma \text{ град/сут.} \tag{14}$$

Аналогичным образом можно упростить формулу (11): угловую скорость $\dot{\omega}$ движения перицентра спутника можно вычислять по следующей приближенной формуле:

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{4} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} (5\cos^2\gamma - 1) \text{ рад/сек.} \tag{15}$$

Для спутников Земли (при $\varepsilon < 0{,}1$)

$$\dot{\omega} \approx 5\left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} (5\cos^2\gamma - 1) \text{ град/сут.} \tag{16}$$

Из формул (10), (12) видно, что сжатие планеты вызывает вращение восходящего узла орбиты в направлении, противоположном направлению вращения спутника. В течение небольших промежутков времени (в случае близких спутников Земли — до нескольких суток) это вращение можно считать равномерным.

Это вращение происходит тем быстрее, чем меньше наклон плоскости орбиты к плоскости экватора. Для спутника, проходящего через оба полюса планеты, восходящий узел, а вместе с ним и вся плоскость орбиты практически не вращаются вокруг оси планеты. Для спутников, близких к экваториальным, это вращение происходит наиболее быстро; для почти экваториального спутника Земли эта скорость может составить около 9° в сутки. Для первых советских спутников Земли плоскость орбиты вращалась вокруг оси Земли примерно со скоростью 4° в сутки.

Формулы (11) и (15) показывают, что перицентр спутника, а вместе с ним и ось орбиты спутника вращаются в плоскости орбиты практически равномерно. Это вращение будет происходить в том же направлении, что и движение спутника, если $5\cos^2\gamma - 1 > 0$, то есть $\gamma < 63{,}4°$, и в противоположном направлении, если $\gamma > 63{,}4°$. При критическом значении $\gamma = 63{,}4°$ перицентр практически вращаться не будет. Если γ близко к $63{,}4°$ (для первых советских спутников Земли $\gamma \approx 65^\circ$), то перицентр будет поворачиваться медленно. Например, при $\gamma = 65^\circ$ перицентр будет перемещаться против движения спутника со скоростью $0{,}4^\circ$ за сутки. В случае спутников, у которых орбиты близки к плоскости экватора, величина $\dot{\omega}$ может достигать 17° за сутки. В обратном направлении предельное возможное значение $\dot{\omega}$ составляет примерно $-4{,}5^\circ$ за сутки (при $\gamma = 90^\circ$). Такая картина имела место, например, для американского полярного спутника «Дискаверер-2» ($\gamma = 89{,}9^\circ$, $p / R_э = 1{,}046$, $\dot{\omega} = -4{,}3$ *град/сут*).

Из формул (10) и (11) видно, что чем больше среднее расстояние (a) спутника от центра планеты, тем меньше $d\Omega/dN$ и $d\omega/dN$, то есть тем медленнее будут вращаться плоскость орбиты и большая полуось орбиты. Наличие в формулах (12) и (15) сомножителя $(R_э/a)^{7/2}$ показывает, что $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ быстро убывают при увеличении среднего расстояния спутника от центра планеты.

Если воспользоваться равенством $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi)$ и приближенной формулой $(1 + x)^{-3,5} \approx 1 - 3{,}5x$, верной для малых x, то для низколетящих спутников Земли можно из (14) и (16) получить такие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Omega} &\approx -10\left(1 - \frac{7}{4}\,\frac{H_\alpha + H_\pi}{R}\right)\cos\gamma \textit{ град/сут},\\ \dot{\omega} &\approx 5\left(1 - \frac{7}{4}\,\frac{H_\alpha + H_\pi}{R}\right)(5\cos^2\gamma - 1) \textit{ град/сут}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Приведенные выше формулы (10) и (11) показывают, что сжатие планеты приводит к значительным изменениям *положения* орбиты близкого спутника планеты; однако сжатие *практически не сказывается на форме и размерах орбиты.*

Что касается элементов орбиты γ, p, ε, τ, то для выяснения скорости их изменения за каждый оборот необходимо воспользоваться более точными формулами для потенциала планеты; этого можно достигнуть, например, оставляя в формуле (1.3.5) еще один или несколько членов, кроме первых двух. Подробное исследование показывает, что наклонение орбиты претерпевает в некоторых случаях хоть и небольшие, но вполне заметные изменения; в частности, для второго советского искусственного спутника Земли γ уменьшалось в ноябре 1957 года ежесуточно примерно на 0,002°. Используя более точные формулы для потенциала планеты, можно также детальнее изучить изменение величин $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

Задачи

1. Орбита американского спутника Земли «Авангард-1», запущенного в марте 1958 года, была наклонена к плоскости экватора под углом 34,3°. Его минимальная высота составляла 660 *км*, а максимальная — 3970 *км*. Аргумент перигея в полдень 17 марта 1958 года был равен 129°. Учитывая из факторов, возмущающих движение спутника, лишь сжатие Земли, дайте прогноз, каким примерно должен был оказаться аргумент перигея 12 марта 1959 года.

2. Средняя высота спутника над поверхностью Земли равна 500 *км*; орбита наклонена к плоскости экватора под углом в 45°. Определите скорость вращения плоскости орбиты и скорость вращения перигея.

3. Американский спутник «Эксплорер-7» (1959) имел в октябре — ноябре 1959 года следующие элементы орбиты: $a = 7200$ *км*, $\varepsilon = 0{,}038$, $\gamma = 50{,}33°$. Подсчитайте, какими были (в среднем) в течение этого времени $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

4. В течение первых двух месяцев после запуска второго советского путника (1957 год) его орбита имела следующие элементы:

$$\frac{a}{R_э} = 1{,}13, \quad \varepsilon = 0{,}09, \quad \gamma = 65{,}3°.$$

С какой угловой скоростью вращалась в течение этого времени плоскость орбиты спутника вокруг земной оси? Какова была средняя угловая скорость вращения перигея орбиты?

§ 3. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

1. Движение спутника Земли происходит в таких областях пространства, где плотность среды в миллиарды раз меньше плотности атмосферы у поверхности Земли. Так, например, плотность атмосферы на высоте 240 *км* меньше плотности атмосферы на уровне моря в 10^{10} раз, а на высоте 360 *км* — в 10^{11} раз. Однако длительное торможение низко летящего спутника в разреженной атмосфере приводит к постоянно накапливающимся изменениям некоторых параметров его орбиты.