хоть и небольшие, но вполне заметные изменения; в частности, для второго советского искусственного спутника Земли γ уменьшалось в ноябре 1957 года ежесуточно примерно на 0,002°. Используя более точные формулы для потенциала планеты, можно также детальнее изучить изменение величин $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

Задачи

1. Орбита американского спутника Земли «Авангард-1», запущенного в марте 1958 года, была наклонена к плоскости экватора под углом 34,3°. Его минимальная высота составляла 660 *км*, а максимальная — 3970 *км*. Аргумент перигея в полдень 17 марта 1958 года был равен 129°. Учитывая из факторов, возмущающих движение спутника, лишь сжатие Земли, дайте прогноз, каким примерно должен был оказаться аргумент перигея 12 марта 1959 года.

2. Средняя высота спутника над поверхностью Земли равна 500 *км*; орбита наклонена к плоскости экватора под углом в 45°. Определите скорость вращения плоскости орбиты и скорость вращения перигея.

3. Американский спутник «Эксплорер-7» (1959) имел в октябре — ноябре 1959 года следующие элементы орбиты: $a = 7200$ *км*, $\varepsilon = 0{,}038$, $\gamma = 50{,}33°$. Подсчитайте, какими были (в среднем) в течение этого времени $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

4. В течение первых двух месяцев после запуска второго советского путника (1957 год) его орбита имела следующие элементы:

$$\frac{a}{R_э} = 1{,}13, \quad \varepsilon = 0{,}09, \quad \gamma = 65{,}3°.$$

С какой угловой скоростью вращалась в течение этого времени плоскость орбиты спутника вокруг земной оси? Какова была средняя угловая скорость вращения перигея орбиты?

§ 3. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

1. Движение спутника Земли происходит в таких областях пространства, где плотность среды в миллиарды раз меньше плотности атмосферы у поверхности Земли. Так, например, плотность атмосферы на высоте 240 *км* меньше плотности атмосферы на уровне моря в 10^{10} раз, а на высоте 360 *км* — в 10^{11} раз. Однако длительное торможение низко летящего спутника в разреженной атмосфере приводит к постоянно накапливающимся изменениям некоторых параметров его орбиты.

В этом параграфе мы изучим движение спутника под действием двух сил: притяжения *сферической* планеты и сопротивления атмосферы; сжатием планеты будем пренебрегать.

Пусть спутник имеет массу m; пусть наибольшее из его сечений, перпендикулярных к направлению движения спутника (так называемое миделево сечение), имеет площадь s; скорость спутника обозначим через v, а плотность атмосферы — через ρ. Тогда величина силы $\boldsymbol{R}$, с которой атмосфера тормозит спутник, может быть вычислена по следующей формуле Ньютона:

$$R = \frac{1}{2} c_x s \rho v^2, \tag{1}$$

где c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления. Направление силы $\boldsymbol{R}$ противоположно вектору скорости спутника.

Вызываемое силой $\boldsymbol{R}$ ускорение имеет величину

$$\Phi = \frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v^2,$$

то есть

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v^2 \left(-\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v \boldsymbol{v}.$$

Так как

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_1 + v_n \boldsymbol{e}_2$$

(см. § 1), то

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v v_r, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v v_n, \; \Phi_3 = 0. \tag{2}$$

Плотность атмосферы ρ меняется с изменением высоты y спутника: $\rho = \rho(y)$. В некоторых работах принимают следующую приближенную формулу для $\rho(y)$:

$$\rho(y) = \rho_1 \frac{x}{\left(1 + \frac{y - y_0}{\alpha}\right)^k}, \tag{3}$$

где $\rho_1 = \mathrm{const}$, а константы x, α, k, y_0 выбираются в зависимости от диапазона высот спутника.

Из формул (2), (8.1.46) и (8.1.47) следует, что $\frac{d\Omega}{du} = 0$ и $\frac{d\gamma}{du} = 0$, то есть

$$\Omega = \Omega_0 = \text{const}, \; \gamma = \gamma_0 = \text{const}. \tag{4}$$

Таким образом, сопротивление атмосферы не приводит к изменению положения плоскости орбиты спутника.

Если учесть формулы (2), (8.1.48) — (8.1.50), то можно формулы для $\dot{p}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\omega}$ привести к виду [8.11]

$$\frac{dp}{du} = -\delta\rho\varphi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{5}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du} = -\delta\rho\psi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{6}$$

$$\frac{d\omega}{du} = -\delta\rho\chi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{7}$$

где

$$\varphi = \frac{p^2\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\psi = \frac{p\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\chi = \frac{p\sin\theta\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{2\varepsilon(1 + \varepsilon\cos\theta)},$$

$$\delta = c_x\frac{s}{m}, \quad \theta = u - \omega.$$

Для того чтобы избежать решения этой громоздкой системы нелинейных дифференциальных уравнений, применяют метод усреднения, с которым мы уже столкнулись в предыдущем параграфе. Для этого вычисляют средние изменения Δp, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\omega$ элементов p, ε, ω за один полный оборот спутника, то есть при изменении u от 0 до 2π:

$$\Delta p = -\delta\int_0^{2\pi}\rho\varphi(p, \varepsilon, \omega, u)du, \quad \Delta\varepsilon = -\delta\int_0^{2\pi}\rho\psi du,$$

$$\Delta\omega = -\delta\int_0^{2\pi}\rho\chi\, du. \tag{8}$$

При вычислении же этих интегралов рассматривают величины p, ε, ω как постоянные, ибо они за один оборот мало изменяются. Можно показать, что при таких предположениях $\Delta\omega = 0$. Это значит, что постоянно накапливающимися изменениями (вековыми возмущениями) величины ω допустимо в первом приближении пренебречь; иначе говоря, можно считать, что $\omega = \omega_0 = \mathrm{const}$. Вычислив при таком предположении величины Δp и $\Delta\varepsilon$, мы найдем среднее изменение элементов p и ε за один оборот спутника.

Не задерживаясь на обстоятельном изложении новейших результатов, относящихся к влиянию атмосферы и других факторов на движение космического аппарата, рассмотрим здесь еще два любопытных частных результата (при их изложении мы не будем стремиться к большой строгости).

2. «Парадокс спутника». В октябре 1957 года вместе с первым спутником была выведена на околоземную орбиту и его ракета-носитель. Вначале орбиты этих двух тел мало отличались друг от друга и были эллипсами малого эксцентриситета $\varepsilon \approx 0{,}05$. Ракета-носитель, которая была значительно больше по размерам, чем спутник, испытывала и значительно большее торможение. Естественно возникает вопрос: какое из этих двух тел должно было двигаться медленнее — спутник или ракета-носитель? С первого взгляда ответ кажется очевидным: то тело, которое сильнее тормозится атмосферой, то есть ракета-носитель. В действительности же этот ответ ошибочен! На самом деле ракета-носитель значительно опережала спутник и по количеству оборотов вокруг Земли, и по количеству пройденных километров.

Приведенный ниже простой расчет (см. [8.21], [8.22]) показывает, каким образом сказывается влияние сопротивления атмосферы на движение спутника, запущенного на круговую или почти круговую орбиту вокруг Земли.

Пусть спутник P (рис. 8.2) выведен на круговую орбиту вокруг Земли (A — центр Земли). Вследствие торможения атмосферой спутник начнет снижаться и по пологой спиралевидной кривой будет входить в более плотные слои атмосферы. Пусть движение спутника происходит в некоторой плоскости β. Она содержит точку A и вектор $\boldsymbol{v}$ скорости спутника.

В плоскости β выберем прямоугольную систему координат Axy с началом в центре Земли A (рис. 8.2). Будем на β смотреть как на плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть радиус-вектор $\overrightarrow{AP}$ в момент t образует с осью Ax угол φ; $\overrightarrow{PF} = \boldsymbol{v}$, $\angle APN = \frac{\pi}{2}$, $\angle NPF = \alpha$, $\boldsymbol{D}$ — сила торможения спутника атмосферой, $D = |\boldsymbol{D}|$,

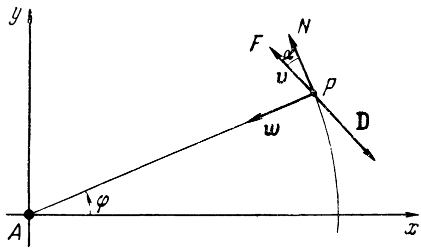

Рис. 8.2.

$\boldsymbol{w}$ — сила тяготения спутника к центру Земли, так что $w = |\boldsymbol{w}| = fMm/r^2$, M — масса Земли, m — масса спутника, $r = AP$. Сила $\boldsymbol{D}$ направлена противоположно вектору скорости $\boldsymbol{v}$, а сила $\boldsymbol{w}$ — вектору $\overrightarrow{AP}$, $v = |\boldsymbol{v}|$.

Согласно второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{D} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{9}$$

Перепишем это равенство в комплексной форме. Для этого заметим *), что

$$\boldsymbol{w} = -we^{i\varphi}, \quad \boldsymbol{D} = De^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\boldsymbol{v} = ve^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{10}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = [\dot{v} + iv(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})]\,e^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{11}$$

---

*) Напомним, что если некоторый вектор имеет длину ρ и наклонен к оси Ax под углом θ, то он изображается комплексным числом, имеющим такую запись в показательной форме:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Поэтому уравнение (9) принимает вид

$$-we^{i\varphi}+De^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=m\,[\dot{v}+iv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})]\,e^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)},$$

или $\left(\text{после умножения на } e^{-i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

$$-we^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}-D=m\,[\dot{v}+iv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})],\tag{12}$$

что равносильно двум вещественным равенствам:

$$w\sin\alpha-D=m\dot{v},\tag{13}$$

$$w\cos\alpha=mv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}).\tag{14}$$

Выразим $m\dot{v}$ только через w и α, используя равенство (14). Для этого заметим, что

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}(re^{i\varphi})=(\dot{r}+ir\dot{\varphi})\,e^{i\varphi}.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$ve^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\dot{r}+ir\dot{\varphi};$$

поэтому

$$-v\sin\alpha=\dot{r},\tag{15}$$

$$v\cos\alpha=r\dot{\varphi},\tag{16}$$

то есть

$$\dot{\varphi}=\frac{v\cos\alpha}{r}.\tag{17}$$

Очевидно, что

$$\dot{\alpha}=\frac{d\alpha}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$

Поэтому из (14) получим:

$$f\frac{Mm}{r^2}\cos\alpha=\frac{mv^2\cos\alpha}{r}\left(1+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right).\tag{18}$$

Пока сопротивление атмосферы не очень велико, можно считать, что α меняется медленно при вращении спутника вокруг Земли, то есть допустимо пренебречь величиной $d\alpha/d\varphi$. Тогда из (18) получим приближенное равенство

$$v^2 = f\frac{M}{r}. \tag{19}$$

Используя (15) и (19), можем написать:

$$m\dot{v} = m\frac{dv}{dr}\dot{r} = m\frac{dv}{dr}(-v\sin\alpha) =$$
$$= -\frac{m}{2}\sin\alpha\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{m}{2}\sin\alpha\frac{d}{dr}\left(f\frac{M}{r}\right) = \frac{w}{2}\sin\alpha,$$

то есть

$$m\dot{v} = \frac{1}{2}w\sin\alpha. \tag{20}$$

Теперь из равенства (13) следует:

$$\frac{1}{2}w\sin\alpha = D, \tag{21}$$

или

$$\sin\alpha = 2\frac{D}{w}. \tag{22}$$

Эту формулу мы несколько упростим. Вес P спутника равен $f\frac{Mm}{R^2}$, где R — радиус Земли. Если спутник движется на небольшой высоте (порядка 200—400 *км*), то можно для прикидок считать, что $\frac{r}{R}\approx 1$ (погрешность не превзойдет 12%), и поэтому w допустимо считать равным весу спутника. Угол снижения спутника α будет мал (если отвлечься от последних витков, описываемых спутником перед падением на Землю), так что допустимо считать $\sin\alpha = \alpha$ (α — в радианах!). Поэтому из (22) вытекает такая полезная для ориентировочных прикидок приближенная формула:

$$\alpha = 2\frac{D}{P}, \tag{23}$$

то есть *измеренный в радианах угол α снижения спутника, движущегося по почти круговой орбите, примерно вдвое* *больше отношения атмосферного торможения спутника к его весу.*

Из (13) и (21) видно, что

$$m\dot{v} = D. \tag{24}$$

Последняя формула и выражает «*парадокс спутника*»: *Вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает; ускорение в направлении движения оказывается таким же, каким бы оно было, если бы сила лобового сопротивления изменила свое направление на противоположное и толкала бы спутник вперед.*

Отсюда, в частности, следует, что из двух спутников, запущенных на одну и ту же круговую орбиту, быстрее будет двигаться тот, который испытывает большее торможение.

Заметим, что *после вхождения спутника в плотные слои атмосферы* (примерно на высоте порядка 120—100 *км*) угол α снижения спутника растет весьма быстро и уже недопустимо пренебречь производной $d\alpha/d\varphi$, как мы делали в предыдущем расчете. При опускании спутника ниже 100—120 *км* его движение резко отличается от движения на высотах порядка 170—200 *км* и выше. Из-за сильного торможения спутник начинает быстро спускаться в более плотные слои атмосферы. При этом скорость поворота $\dot{\varphi}$ радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$ спутника невелика (по сравнению с $\dot{\alpha}$), и мы получим достаточно правильную качественную картину, если в дальнейших рассуждениях пренебрежем величиной $\dot{\varphi}$. Тогда формула (14) примет вид

$$w\cos\alpha = mv\dot{\alpha},$$

то есть

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{w}{m}\frac{1}{v}\cos\alpha. \tag{25}$$

На высотах ниже 100 *км* допустимо величину w/m считать равной ускорению силы тяжести на поверхности Земли (g), так что (25) можно переписать так:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{g}{v}. \tag{26}$$

Пусть $\overset{\frown}{L_{\text{н}}L_{\text{к}}}$ — дуга, по которой спутник падает на Землю ($L_{\text{н}}$ — начало дуги — предполагается выбранным на высоте до 100—120 *км*, $L_{\text{к}}$ — точка падения на Землю). Интегрируя уравнение (26), найдем

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\alpha_{\text{н}}}^{\alpha_{\text{к}}} = \int\limits_{t_{\text{н}}}^{t_{\text{к}}} \frac{g}{v}\,dt, \tag{27}$$

где $t_{\text{н}}, \alpha_{\text{н}}$ и $t_{\text{к}}, \alpha_{\text{к}}$ относятся соответственно к точкам $L_{\text{н}}$ и $L_{\text{к}}$. Из (27) следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_{\text{к}}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_{\text{н}}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{g}{v_{\text{ср}}}(t_{\text{к}}-t_{\text{н}})}, \tag{28}$$

где $v_{\text{ср}}$ — скорость спутника в каком-то промежуточном положении на дуге $\overset{\frown}{L_{\text{н}}L_{\text{к}}}$.

Можно показать (и это подтверждается опытом), что спутник падает на Землю со сравнительно небольшой скоростью, которая по меньшей мере в несколько десятков раз меньше его скорости на последних витках вокруг Земли. Величина $v_{\text{ср}}$ тоже сравнительно невелика, а величина $\frac{g}{v_{\text{ср}}}(t_{\text{к}}-t_{\text{н}}) \gg 1$. Это значит, что угол $\frac{1}{2}\alpha_{\text{к}}+\frac{\pi}{4}$ близок к $\frac{\pi}{2}$, а следовательно, и угол $\alpha_{\text{к}}$ близок к $\frac{\pi}{2}$ (радиан). Иными словами, спутник падает на Землю почти отвесно (в действительности — под углом 60—80° к горизонту).

Не задерживаясь на подробном рассмотрении орбит *большого* эксцентриситета, отметим только, что в этом случае снижение спутника происходит почти исключительно за счет торможения в районе перигея, причем снижение перигея происходит значительно медленнее, чем снижение апогея. Например, если после запуска $h_{\alpha} = 700$ *км*, $h_{\pi} = 300$ *км*, то понижение апогея на 100 *км* соответствует снижению перигея лишь на 6 *км* (см. [8.11]). С течением времени вследствие торможения в атмосфере эксцентриситет орбиты спутника будет убывать и станет практически равным нулю в последние сутки, предшествующие крутому падению спутника на Землю.

3. «Срок жизни» спутника. Искусственные спутники Земли, подвергаясь торможению в верхней атмосфере, с течением времени опускаются в более плотные слои воздушного океана и в конце концов сгорают или падают на Землю. После запуска в СССР первого искусственного спутника было опубликовано большое число исследований, в которых изучается возможность предсказания продолжительности существования спутника по данным о его орбите, известным в первые дни его полета.

На продолжительности жизни спутника сказываются многие факторы. Это не только сопротивление верхних слоев атмосферы. Это также сплюснутость Земли, вращение атмосферы, давление солнечных лучей, тяготение спутника к Луне и Солнцу. Благодаря последним двум факторам перигей орбиты спутника совершает периодические колебания, и при опускании перигея в более плотные слои атмосферы испытываемое спутником торможение увеличивается, что приводит к сокращению срока его жизни. Так, например, вследствие воздействия Луны высота перигея американского спутника «Эксплорер-6» менялась каждые 3 месяца в пределах от 250 до 160 *км*; вследствие этого срок жизни этого спутника составил примерно 2 года вместо 20 лет, которые просуществовал бы спутник, если бы воздействие Луны отсутствовало.

Сплюснутость Земли приводит к перемещению перигея орбиты спутника без изменения расстояния от центра Земли. Если, скажем, перигей переместился от полярной области в экваториальную, то теперь он ближе к поверхности Земли и, следовательно, оказывается в более плотной среде, что должно сказаться на сроке жизни спутника.

Что касается самой атмосферы, то ее плотность в какой-либо точке зависит не только от высоты этой точки над уровнем моря, но и от других весьма разнообразных факторов. Так, например, она меняется в течение суток: скажем, на высоте 300 *км* плотность атмосферы в полдень почти вдвое больше, чем в полночь, а на высоте 1000 *км* — вероятно, в 60 раз больше. Плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. До сих пор еще не разработаны достаточно совершенные модели земной атмосферы. Однако имеющиеся сейчас сведения об атмосфере позволяют дать более или менее удовлетворительные прогнозы срока жизни спутника.

Расскажем здесь вкратце лишь об одном упрощенном приеме [8.23] такого прогнозирования, полезном для ориентировочных прикидок (существуют и более точные методы, см., например, [8.11] и [8.16]).

Мы будем предполагать, что Земля и ее атмосфера имеют сферическую структуру; плотность атмосферы будем считать изменяющейся по экспоненциальному закону, как это обычно делается в учебниках физики (вспомните так называемую «барометрическую формулу»): плотность ρ на высоте h над уровнем моря определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H} \tag{29}$$

(H и ρ_0 — константы).

Будем полагать, что орбита спутника представляет собой эллипс небольшого эксцентриситета ($0{,}02 < \varepsilon < 0{,}2$). Такими были орбиты многих спутников, запущенных в 1957—1964 годах.

Выше мы получили формулы для dp/du и $d\varepsilon/du$. Совершенно аналогично можно получить следующие формулы для $dp/d\theta$ и $d\varepsilon/d\theta$:

$$\frac{dp}{d\theta} = -\delta\rho p^2 \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -\delta\rho p \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2} (\varepsilon + \cos\theta). \tag{30}$$

Пользуясь известными формулами

$$r_\alpha = \frac{p}{1 - \varepsilon}, \quad r_\pi = \frac{p}{1 + \varepsilon},$$

можно после несложных выкладок найти значения для производных $dr_\alpha/d\theta$ и $dr_\pi/d\theta$:

$$\frac{dr_\alpha}{d\theta} = -\delta\rho r_\alpha^2 \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2} (1 + \cos\theta), \tag{31}$$

$$\frac{dr_\pi}{d\theta} = -\delta\rho r_\pi^2 \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}} (1 - \cos\theta). \tag{32}$$

Уравнение орбиты спутника

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \tag{33}$$

можно в силу малости ε заменить таким:

$$r = p\,(1 - \varepsilon \cos \theta), \tag{34}$$

ибо

$$(1 + \varepsilon \cos \theta)\,(1 - \varepsilon \cos \theta) = 1 - \varepsilon^2 \cos \theta \approx 1.$$

Пусть R — радиус Земли, h_π и h_α — высоты перигея и апогея орбиты спутника над поверхностью Земли. Так как $r = R + h$ и при $\theta = 0$ $r = r_\pi = R + h_\pi$, а при $\theta = \pi$ $r = r_\alpha = R + h_\alpha$, то уравнение (34) можно записать так:

$$h = h_\pi + c\,(1 - \cos \theta), \tag{35}$$

где

$$c = \frac{1}{2}(r_\alpha - r_\pi) = \frac{1}{2}(h_\alpha - h_\pi) = \varepsilon a. \tag{36}$$

Обозначим h_π/H через z, так что $h_\pi = Hz$. Используя уже применявшийся нами прием усреднения, подсчитаем изменение величин r_π и c за один полный оборот спутника (то есть при изменении θ от $-\pi$ до π); при этом в нашем упрощенном расчете мы в подынтегральном выражении заменим суммы вида $1 + \varepsilon\varphi\,(\theta)$ через 1. В результате получим

$$\Delta r_\pi = H \Delta z = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho\,(1 - \cos \theta)\,d\theta, \tag{37}$$

$$\Delta c = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos \theta\, d\theta, \tag{38}$$

где A — некоторая положительная константа, а ρ определяется формулой (29).

Точное вычисление указанных интегралов несколько кропотливо и требует привлечения так называемых бесселевых функций. Для упрощения расчета воспользуемся следующими соображениями. Так как орбита не является круговой ($\varepsilon > 0{,}02$), то снижение спутника происходит главным образом за счет его торможения в районе перигея, где плотность больше, чем в других точках орбиты. Это значит, что в интеграле (37) можно пределы интегрирования заменить на $-\alpha$ и α, где α — малое положительное число (например, $\alpha = 1$). При $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$ допустимо воспользоваться известной приближенной формулой

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2. \tag{39}$$

Из (35) получим

$$h \approx zH + \frac{1}{2}c\theta^2.$$

В результате подынтегральное выражение в (37) приобретает такой вид:

$$\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\frac{1}{2}c\theta^2/H}\ e^{-z}.$$

Функция $e^{-\frac{c\theta^2}{2H}}$ убывает очень быстро при росте θ. Поэтому интеграл от этой функции в пределах от $-\alpha$ до α не будет сильно отличаться от интеграла от той же функции в пределах от $-\infty$ до ∞. А при вычислении последнего интеграла можно воспользоваться известным тождеством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Выполнение этих выкладок приведет к следующему приближенному равенству ($C_1 = A\rho_0$)

$$H\Delta z = -C_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\frac{c\theta^2}{2H}-z}d\theta = -\frac{C_1}{4}\pi^{\frac{1}{2}}(c/2H)^{-\frac{3}{2}}e^{-z}.$$

Разделив $H\Delta z$ на период T обращения спутника $\left(T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}a^{3/2}\right)$, найдем Hdz/dt, а затем $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = -C_2 c^{-\frac{3}{2}}e^{-z}, \tag{40}$$

где C_2 — положительная константа.

Аналогично можно вычислить dc/dt:

$$\frac{dc}{dt} = -2C_2 c^{-\frac{1}{2}} e^{-z}. \tag{41}$$

Из последних двух уравнений нетрудно найти c как функцию от t. Действительно, разделив почленно (41) на (40), получим:

$$\frac{dc}{dz} = 2c, \ c = C_3 e^{2z}, \ e^{-z} = C_4 c^{-\frac{1}{2}}.$$

Учитывая (41), найдем

$$\frac{dc}{dt} = -C_5 c^{-1},$$

$$c = C_6 (t_0 - t)^{1/2}, \tag{42}$$

где C_3, C_4, C_5, C_6 и t_0 — константы, $C_6 > 0$. При $t \to t_0$ $c \to 0$, то есть орбита приближается к окружности.

Для реальных спутников, орбиты которых имеют перигей на высоте порядка 200—300 *км* и эксцентриситет $\varepsilon > 0{,}02$, снижение эксцентриситета до 0,001—0,002 практически совпадает (с точностью до одних-двух суток) с моментом прекращения существования спутника. Поэтому момент t_0 и можно без большой погрешности считать моментом прекращения существования спутника.

Для нахождения t_0 можно воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} a^3,$$

откуда

$$2\frac{dT}{T} = 3\frac{da}{a}, \ \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{2}{3}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}. \tag{43}$$

Легко понять, что при принятых нами допущениях и при той точности, которая допустима в данном рассуждении, можно считать

$$\frac{dc}{dt} = \frac{da}{dt}. \tag{44}$$

Действительно,

$$a = \frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi), \quad c = \frac{1}{2}(r_\alpha - r_\pi).$$

В течение одного оборота спутника снижение перигея во много раз меньше снижения апогея, так что

$$\Delta r_\pi \approx 0, \quad \Delta a \approx \frac{1}{2}\Delta r_\alpha, \quad \Delta c \approx \frac{1}{2}\Delta r_\alpha, \quad \frac{\Delta c}{T} \approx \frac{\Delta a}{T}, \tag{45}$$

а это равносильно (44). Из (42) и (44) видно, что

$$t_0 - t = -\frac{c}{2dc/dt} = -\frac{c}{2da/dt} = \frac{3}{4a}\frac{cT}{(-dT/dt)},$$

или окончательно

$$t_0 - t = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon T}{(-dT/dt)}, \tag{46}$$

$$t_0 - t = \frac{3}{8}\frac{h_\alpha - h_\pi}{a}\frac{T}{(-dT/dt)}. \tag{47}$$

Эти формулы и позволяют вычислить оставшийся срок жизни спутника, если, помимо обычно публикуемых сведений об орбите, известна еще быстрота уменьшения периода обращения спутника $(-dT/dt)$.

Для спутников, чьи орбиты удовлетворяют требованиям:

$$0{,}02 < \varepsilon < 0{,}2 \text{ и } 180\ \textit{км} < h_\pi < 400\ \textit{км},$$

формулы (45) — (47) дают правильный ответ с погрешностью порядка 10%.

Приведем пример: 9 ноября 1957 года перигей первого искусственного спутника находился на высоте 210 *км*, апогей — на высоте 810 *км*. Быстрота уменьшения периода обращения спутника составляла 2,94 секунды за сутки. Легко подсчитать, что $a = 6880$ *км*, $T = 5610$ *сек*.

По формуле (47) получим

$$t_0 - t = \frac{3}{8}\frac{810 - 210}{6880}\frac{5610}{2{,}94} \approx 60\ \textit{сут}.$$

Итак, через 60 суток после 9 ноября, то есть примерно 8 января 1958 года, должно было прекратиться существование спутника (в действительности спутник упал на Землю 4 января 1958 года).

Отметим еще, что рассуждениями, весьма сходными с ранее приведенными, можно получить другую формулу, весьма удобную для грубых прикидок [8.19]: если h_α и h_π — высоты апогея и перигея орбиты спутника, $-dh_\alpha/dt$ — быстрота снижения апогея (за сутки), S — оставшееся время существования спутника (в сутках), то

$$S = \frac{1}{2} \frac{h_\alpha - h_\pi}{(-dh_\alpha/dt)}. \tag{48}$$

При тех же предположениях, что и выше, ответ, даваемый формулой (48), может, по-видимому, содержать погрешность порядка 25%.

Например, если сейчас для какого-нибудь спутника $h_\alpha = 600$ *км*, $h_\pi = 250$ *км* и апогей снижается на 3,5 *км* в сутки, то оставшийся срок жизни спутника составляет примерно

$$\frac{600-250}{2 \cdot 3{,}5} = 50 \text{ сут.}$$

Задачи

1. Период обращения первого советского спутника в начале октября 1957 года составлял около 96 *мин* и убывал примерно на 3 *сек* за сутки. На сколько примерно убывала ежесуточно большая полуось орбиты?

2. По данным, опубликованным в печати, 9 ноября 1957 года ракета-носитель первого искусственного спутника имела перигей на высоте 210 *км*, а апогей на высоте 695 *км*. Суточное уменьшение периода обращения составляло 6,3 *сек* в сутки. Дайте прогноз вероятной даты падения этой ракеты на Землю. Сравните с точной датой падения ракеты.