ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1. Солнце притягивает Луну примерно вдвое сильнее, чем Земля.

2. $U = f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right).$

§ 2

1. Материальная точка (P, M) притягивается сильнее к гантели, чем к материальной точке $(O, 2m)$.

2. Пусть $2a$ — длина стержня, δ — его линейная плотность, m — масса шарика P. Примем за начало координат середину O стержня (рис. 1.7). Пуэть $OP = R > a$. Подсчитаем потенциал dU на точку P, который создает элемент стержня dx:

$$dU = f\frac{\delta dx}{R - x}.$$

Потенциал, создаваемый всем стержнем на точку P, равен

$$U = \int_{-a}^{a} f\delta\,\frac{dx}{R - x} = f\delta\,[\ln(R + a) - \ln(R - a)].$$

Такому потенциалу соответствует сила

$$F_1 = \frac{dU}{dR} = f\delta\left(\frac{1}{R + a} - \frac{1}{R - a}\right) = -f\delta\,\frac{2a}{R^2 - a^2}.$$

Стержень притягивает точку (P, m) с силой

$$F = mF_1 = mf\delta\frac{2a}{R^2 - a^2}.$$

Если бы мы всю массу M стержня сосредоточили в его середине O, то образовавшаяся материальная точка (O, M) притягивала бы шарик (P, m) с силой

$$\Phi = \frac{fMm}{R^2} = \frac{2fm\delta a}{R^2}.$$

Ясно, что $F > \Phi$. Итак, стержень AB притягивает шарик (P, m) сильнее, чем точка (O, M). Силу F можно было бы, конечно, подсчитать непосредственно, не прибегая к предварительному вычислению потенциала U:

$$F = \int_{-a}^{a} \frac{fm\delta dx}{(R-x)^2}.$$

3. Подсчет потенциала сферы радиуса R, массы M и поверхностной плотности δ на точку P, находящуюся на расстоянии r от центра сферы, приводит к формуле

$$U = f\frac{2\pi\delta R^2}{rR}\left[(r+R) - |r-R|\right] = f\frac{M}{2rR}\left[(r+R) - |r-R|\right].$$

Рассмотрим два случая: $r > R$ и $r < R$.

1) $r > R$. Тогда $U = f\dfrac{M}{r}$. В точности такой же потенциал на точку P создает материальная точка (O, M). А это значит, что сфера притягивает внешнюю точку $(P, 1)$ с такой же силой, с какой точку P притягивает точка (O, M).

2) $r < R$. Тогда $U = f\dfrac{M}{R} = \text{const}$. Это значит, что сфера совсем не притягивает точку $(P, 1)$, если последняя лежит внутри сферы (равнодействующая сил, с которыми частицы сферы притягивают точку $(P, 1)$, равна нулю).

4. Если точка P лежит внутри сферы радиуса ρ $(OP = r < \rho)$ и t определяется по формуле (1.2.3), то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{t}\, d\varphi = \frac{2}{\rho}.$$

Воспользовавшись этим равенством, можно показать, что $U = \text{const}$, т. е. результирующая сила, с которой полый шар действует на материальную точку P, лежащую внутри его полости, равна нулю.

5. Четыре материальные точки (A_k, M) притягивают точку (P, m) приблизительно на 10% слабее, чем материальная точка $(O, 4M)$.

ГЛАВА II

§ 1

1. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то каждое тело вблизи экватора при падении на Землю имело бы некоторое ускорение свободного падения g_0. Из-за вращения Земли вокруг оси это тело получает центробежное ускорение $a_{ц} = \omega^2 R_{э}$, где ω — это угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси. Так как Земля делает полный оборот вокруг своей оси («относительно неподвижных звезд») за 86 164 *сек*, то

$$a_{ц} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 \cdot 6378{,}2 \cdot 10^3 \approx 0{,}0339 \text{ м/сек}^2.$$

Наблюдаемое на экваторе ускорение свободного падения $g_э$ есть разность между ускорением g_0 свободного падения относительно невращающейся Земли и центробежным ускорением $a_ц$: $g_э = g_0 - a_ц$, откуда $g_0 = g_э - a_ц \approx 9{,}8143$ *м/сек*^{2}. Пусть над экватором, на расстоянии 6378,2 *км* от центра Земли, помещена масса m. Сила F, с которой эта масса притягивается к Земле, равна mg_0. Если бы Земля была идеальным шаром со сферическим распределением плотности, то эта сила не изменилась бы, если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре. Из-за сплюснутости Земли эта сила изменится, но изменение будет незначительным и им можно пренебречь. Поэтому допустимо считать, что $F = fmM_з/R_э^2 = mg_0$. Следовательно, $K_з = fM_з = g_0 R_э^2 = 10^{-3} \cdot 9{,}8143 \times$ $\times (6378{,}2)^2 = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}.

2. $K_ю = K_з \dfrac{M_ю}{M_з} = 126{,}5 \cdot 10^6$ *км*^{3}/*сек*^{2}.

§ 3

1. Обозначим через m массу ракеты, через K — гравитационный параметр планеты. Тогда $Km/R^2 = mg$, откуда $K = gR^2$. Пусть ракета получила у поверхности планеты настолько малую начальную скорость v_0, что она не удалилась в бесконечность, а пришла в точку на высоте H над поверхностью планеты, имея там нулевую скорость. Согласно интегралу энергии

$$v_0^2 - \frac{2K}{R} = -\frac{2K}{R+H},$$

откуда $v_0^2 = \dfrac{2gRH}{R+H}$. При больших H ($H \to \infty$)

$$v_0^2 = \frac{2gR}{\dfrac{R}{H}+1} \approx 2gR;$$

при малых H ($H \to 0$)

$$v_0^2 = \frac{2gH}{\dfrac{R}{H}+1} \approx 2gH.$$

2. $v \approx 11{,}11$ *км/сек*.

§ 4

1. $\sigma_2 \dot{z} - \sigma_3 \dot{y} + K\dfrac{x}{r} = -\lambda_1, \qquad \sigma_3 \dot{x} - \sigma_1 \dot{z} + K\dfrac{y}{r} = -\lambda_2,$

$$\sigma_1 \dot{y} - \sigma_2 \dot{x} + K\frac{z}{r} = -\lambda_3.$$

2. Из (2.4.3), (2.2.1) и (2.3.2) с помощью тождеств

$$\boldsymbol{r}^2 = r^2, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}), (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

легко получить:

$$\begin{aligned} \lambda^2 = \boldsymbol{\lambda}^2 &= K^2 + \frac{2K}{r}\,\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v})^2 = \\ &= K^2 + 2\frac{K}{r}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}) + \sigma^2\cdot\boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v})^2 = \\ &= K^2 - 2\frac{K}{r}\sigma^2 + \sigma^2 v^2 = K^2 + h\sigma^2. \end{aligned}$$

§ 5

1. Плутон подходит к Солнцу ближе, чем Нептун, примерно на 0,2 а. е. (около трех миллионов километров).

2. $r_\alpha = 152\cdot 10^6$ *км*, $r_\pi = 147\cdot 10^6$ *км*.

3. Пусть $A'\text{П}$ (рис. Р.1) — линия апсид орбиты спутника, CD — линия встречи плоскости орбиты с плоскостью экватора. В течение одного оборота спутник проходит над северным полушарием дугу $\overset{\frown}{C\text{П}D}$, а над южным — дугу $\overset{\frown}{DA'C}$.

Пусть C' и D' — точки, соответственно симметричные точкам C и D относительно прямой $A'\text{П}$.

$$\overset{\frown}{C\text{П}D} = \overset{\frown}{C\text{П}C'} + \overset{\frown}{C'D},$$

$$\overset{\frown}{DA'C} = \overset{\frown}{DA'D'} + \overset{\frown}{D'C}.$$

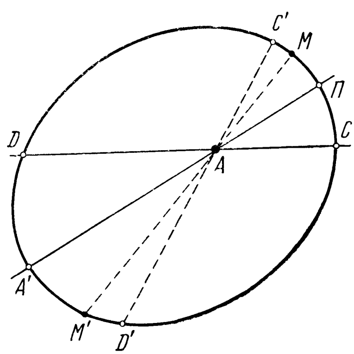

Рис. Р.1.

Пусть M — произвольная точка дуги $\overset{\frown}{C\text{П}C'}$, M' — точка на дуге $\overset{\frown}{DA'D'}$, в которой эту дугу пересекает прямая MA. Обозначим истинные аномалии точек M и M' через θ и θ'. Ясно, что $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\cos\theta > 0$. Но $\theta' = \theta + \pi$, так что $\cos\theta' = -\cos\theta < 0$. Мы имеем:

$$AM = p/(1 + \varepsilon\cos\theta), \quad AM' = p/(1 + \varepsilon\cos\theta') = p/(1 - \varepsilon\cos\theta).$$

Отсюда видно, что $AM' > AM$. Но из интеграла энергии (2.3.2) ясно, что чем дальше спутник от центра Земли, тем его скорость меньше.

Поэтому в любой точке M дуги $\overset{\frown}{СПС'}$ спутник движется быстрее, чем в соответствующей ей точке M' дуги $\overset{\frown}{DA'D'}$. Следовательно, и всю дугу $\overset{\frown}{СПС'}$ спутник проходит быстрее, чем дугу $\overset{\frown}{DA'D'}$.

Что же касается дуг $\overset{\frown}{C'D}$ и $\overset{\frown}{D'C}$, то ввиду их симметрии относительно линии апсид $A'П$ спутник проходит их за одинаковые промежутки времени. Теперь ясно, что дугу $\overset{\frown}{СПD}$ спутник проходит быстрее, чем дугу $\overset{\frown}{DA'C}$. Спутник находился дольше над южным полушарием, чем над северным.

§ 6

2. 1,8 *км/сек.*

3. Обозначим через K гравитационный параметр Солнца. В момент t_0

$$v_r = v_0 \sin\alpha = \frac{K}{\sigma}\varepsilon\sin\theta_0,\quad \sigma = v_0 r_0\cos\alpha.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$v_0\sin\alpha = \frac{K\,\varepsilon\sin\theta_0}{v_0 r_0\cos\alpha}. \tag{I}$$

Из уравнения орбиты корабля найдем, что

$$1+\varepsilon\cos\theta_0 = \frac{p}{r_0} = \frac{\sigma^2}{Kr_0} = \frac{r_0 v_0^2\cos^2\alpha}{K}. \tag{II}$$

Из (I) и (II) можем найти $\varepsilon\sin\theta_0$ и $\varepsilon\cos\theta_0$:

$$\varepsilon\sin\theta_0 = (r_0 v_0^2/K)\sin\alpha\cos\alpha, \tag{III}$$

$$\varepsilon\cos\theta_0 = (r_0 v_0^2/K)\cos^2\alpha - 1. \tag{IV}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{(r_0 v_0^2/K)\sin 2\alpha}{(r_0 v_0^2/K)\cos^2\alpha - 1}. \tag{V}$$

Полученная формула позволяет вычислить истинную аномалию корабля в момент t_0. Возводя равенства (III) и (IV) почленно в квадрат и складывая их, найдем после несложных преобразований:

$$\varepsilon^2 = [(r_0 v_0^2/K) - 1]^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha. \tag{VI}$$

Кроме того,

$$p = \sigma^2/K = v_0^2 r_0^2\cos^2\alpha/K. \tag{VII}$$

Затем r_π легко вычислить по формуле $r_\pi = p/(1+\varepsilon)$.

4. Величину γ можно выразить через r и через величины θ_0, p, ε, найденные при решении предыдущей задачи. Приведем здесь и другое решение, не опирающееся на задачу 3:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta_0 + \gamma) = 1 - \cos\gamma + (1 + \varepsilon\cos\theta_0) \times \left(\cos\gamma - \frac{\varepsilon\sin\theta_0}{1 + \varepsilon\cdot\cos\theta_0}\sin\gamma\right).$$

Но в момент t_0

$$v_r = \frac{\sigma}{p}\varepsilon\sin\theta_0, \quad v_n = \frac{\sigma}{p}(1 + \varepsilon\cos\theta_0),$$

так что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_r}{v_n} = \frac{\varepsilon\sin\theta_0}{1 + \varepsilon\cos\theta_0}.$$

Кроме того, из равенства

$$r_0 = p/(1 - \varepsilon\cos\theta_0)$$

следует, что

$$1 + \varepsilon\cos\theta_0 = p/r_0.$$

Поэтому

$$\frac{p}{r} = 1 - \cos\gamma + \frac{p}{r_0}(\cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma).$$

Из последнего равенства находим

$$\left(1 - \frac{r_0}{p}\right)\cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma = \frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{p}. \tag{I}$$

Здесь

$$p = v_0 r_0^2\cos^2\alpha/K. \tag{II}$$

Решив тригонометрическое уравнение (I), найдем γ.

5. Полагая в формулах (I) и (II) из решения задачи 4 $r_0 = R_З$, $r = R_В$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, получим

$$\frac{R_З}{R_В} = \frac{K}{v_0^2 R_З\cos^2\alpha}(1 - \cos\gamma) + \cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma.$$

Определяя отсюда v_0^2, имеем

$$v_0^2 = \frac{2K(1 - \cos\gamma)}{R_З[A(1 + \cos 2\alpha) + B\sin 2\alpha]},$$

где

$$A = \frac{R_З}{R_В} - \cos\gamma, \quad B = \sin\gamma.$$

Можно выбрать угол λ так, чтобы

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\lambda,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\lambda\qquad(-\pi<\lambda\leqslant\pi).$$

Тогда

$$v_0^2=\frac{2K(1-\cos\gamma)}{R_З\,[A+\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\alpha-\lambda)]}.$$

Отсюда следует, что v_0 принимает минимальное значение

$$v_0=\sqrt{\frac{2K\,(1-\cos\gamma)}{R_З(A+\sqrt{A^2+B^2})}}$$

при $\alpha=\frac{1}{2}\lambda$ $\left(\text{то есть } \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)$.

§ 7

1. $v_{кр}=29{,}8$ *км/сек*, $v_{пар}=42{,}1$ *км/сек*.

2. Пусть H — высота суточного спутника над поверхностью Земли, v — его скорость, R — радиус Земли. Земля делает один полный оборот вокруг своей оси за 86 164 *сек*. Следовательно, средняя угловая скорость вращения Земли равна $2\pi/86164$ *рад*. Такую же угловую скорость должен иметь суточный спутник, то есть

$$\frac{v}{R+H}=\frac{2\pi}{86164}.$$

Но $v=\sqrt{K_З/(R+H)}$. Поэтому $\sqrt{K_З/(R+H)^3}=2\pi/86164$. Отсюда можно найти $R+H$, а затем H: $H\approx 35\,800$ *км*.

3. $h=v^2-\frac{2K}{r}=2{,}31^2-\frac{2\cdot 398\,600}{320\,000}>0$. Поэтому траектория ракеты — гиперболическая.

4. $v_{кр}=\sqrt{\frac{r_0}{60r_0}}\,v_{I}\approx 1{,}02$ *км/сек*,

$$v_{пар}=v_{кр}\sqrt{2}\approx 1{,}02\cdot 1{,}41\approx 1{,}43 \text{ км/сек}.$$

5. Средний радиус Луны $r_Л=1738$ *км*. Пусть $m_З$ и $m_Л$ — массы Земли и Луны, $r_З$ — радиус Земли, $v_{IЛ}$ и $v_{IЗ}$ — значения первой космической скорости для Луны и для Земли.

$$v_{IЛ}=\sqrt{\frac{fm_З}{r_З}}\sqrt{\frac{m_Л}{m_З}\,\frac{r_З}{r_Л}}=v_{IЗ}\sqrt{\frac{1}{81{,}4}\,\frac{6370}{1740}}\approx 1{,}7 \text{ км/сек}.$$

Вторая космическая скорость относительно Луны равна

$$v_{II\,Л}=v_{IЛ}\sqrt{2}\approx 2{,}4 \text{ км/сек}.$$

§ 9

1. При помощи интеграла энергии (2.9.4) и правила рычага можно найти

$$v_\alpha = \frac{v_\pi r_\pi}{r_\alpha} = \frac{2K - r_\pi v_\pi^2}{v_\pi r_\pi}.$$

2. $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{K}{a}} = 29{,}8$ *км/сек*,

$$v_\pi^2 = \frac{K}{a}\frac{r_\alpha}{r_\pi} = \frac{K}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx \frac{K}{a}(1+2\varepsilon) \text{ при малых } \varepsilon.$$

Отсюда $v_\pi \approx v_{\text{ср}}(1+\varepsilon)$. Аналогично получаем $v_\alpha \approx v_{\text{ср}}(1-\varepsilon)$.

$$v_\pi \approx 30{,}3 \text{ км/сек}, \; v_\alpha \approx 29{,}3 \text{ км/сек}.$$

3. Пусть A — центр Земли, B и C — апогей и перигей лунной орбиты, $a_Л$ и $\varepsilon_Л$ — большая полуось и эксцентриситет.

$$AB = a_Л(1+\varepsilon_Л) \approx 405\,000 \text{ км},$$

$$AC = a_Л(1-\varepsilon_Л) \approx 363\,000 \text{ км}.$$

Рассмотрим сначала полет к точке B. Пусть $П$ — перигей орбиты космолета. $r_\pi = AП = 6370 + 230 = 6600$ *км*. Большая полуось орбиты космолета равна

$$a = \frac{AB + AП}{2} \approx 206 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Начальная скорость космолета (в перигее $П$ его орбиты) определяется из формулы

$$v_\pi^2 = K_З\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right).$$

Отсюда получим $v_\pi \approx 10{,}9$ *км/сек*. Аналогично можно вычислить скорость v_π, необходимую космолету для попадания в Луну в перигее ее орбиты.

4. В этом случае $r = a$ и по формуле (2.8.2)

$$v = \sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{K}{r}} = v_{\text{кр}}.$$

5. Пусть R — радиус Земли, K — гравитационный параметр Земли, $r_\alpha = R + H$, $2a = r_\alpha + r_\pi$.

Начальная скорость v_α определяется равенством

$$v_\alpha^2 = K\left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2K}{r_\alpha}\,\frac{r_\pi}{2a} = \frac{2K}{R+H}\,\frac{r_\pi}{R+H+r_\pi} = \frac{2K}{R+H}\left(1 - \frac{R+H}{R+H+r_\pi}\right).$$

Но по условию должно быть $r_\pi \geqslant R + h$, откуда

$$R + H + r_\pi \geqslant R + H + h.$$

Поэтому

$$\frac{R+H}{R+H+r_\pi} \leqslant \frac{R+H}{2R+H+h},$$

$$v_\alpha^2 \geqslant \frac{2K}{R+H}\left(1 - \frac{R+H}{2R+H+h}\right)$$

или

$$v_\alpha \geqslant \sqrt{\frac{2K}{2R+H+h}\cdot\frac{R+h}{R+H}}.$$

6. Из рис. 2.10 ясно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{О\varPi}{\varPi B}$$

(здесь $\frac{1}{2}\varphi$ есть $\angle AOB$). Но $\varPi B = AD = d$, $О\varPi = |a|$. Кроме того, $v_\infty^2 = h = \frac{K}{|a|}$, так что $|a| = \frac{K}{v_\infty^2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \frac{K}{v_\infty^2 d}$.

7. Из интеграла энергии и интеграла площадей имеем:

$$v_\alpha^2 - \frac{2K}{d} = v^2 - \frac{2K}{R}, \quad v_\alpha d = Rv\sin\varphi.$$

Отсюда находим:

$$v^2 = \frac{2Kd\,(d-R)}{R\,(d^2 - R^2\sin\varphi)}.$$

Так как $v^2 = K\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$, то легко вычислить a:

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 - R^2\sin^2\varphi}{d - R\sin^2\varphi}.$$

Эксцентриситет после этого находится при помощи соотношения $d = a(1+\varepsilon)$.

8. Задачу можно решить тем же способом, что и предыдущую.

9. Пусть в момент старта АМС ее скорость была равна v, а местная параболическая скорость — $v_{\text{пар}}$. Константа энергии h может быть найдена по формуле

$$h = v_0^2 - \frac{2K_3}{r_0} = 4{,}05^2 - \frac{2\cdot 398\,600}{488\,900 + 6400} \approx 14{,}8.$$

Так как $h > 0$, то движение АМС проходило по гиперболе. В силу формулы (2.7.11)

$$v^2 - v_{\text{пар}}^2 = h.$$

По условию $v - v_{\text{пар}} = d$. Отсюда $v + v_{\text{пар}} = h/d$, и поэтому

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d} + d\right);$$

$$v_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d} - d\right) \approx 10{,}9 \ \textit{км/сек}.$$

Если отделение АМС от ракеты произошло на расстоянии r от центра Земли ($r = R + H$, где R — радиус Земли), то

$$v_{\text{пар}}^2 = \frac{2K_З}{r}, \quad r = \frac{2K_З}{v_{\text{пар}}^2}, \quad H = \frac{2K_З}{v_{\text{пар}}^2} - R \approx 380 \ \textit{км}.$$

Величину $|a|$ главной полуоси АМС найдем из зависимости

$$h = \frac{K_З}{|a|}.$$

10. $v_0^2 = \dfrac{2K}{r_0} + h = v_{\text{пар}}^2 + h = v_{\text{пар}}^2 - \dfrac{K}{a}$. Отсюда

$$a = \frac{K}{v_{\text{пар}}^2 - v_0^2}.$$

Если гравитационный параметр K неизвестен, но известно расстояние r_0 спутника от звезды ($AP = r_0$), то можно воспользоваться тем, что $v_{\text{пар}}^2 = \dfrac{2K}{r_0}$, так что

$$K = \frac{1}{2} v_{\text{пар}}^2 r_0 \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{2} \frac{r_0}{1 - \dfrac{v_0^2}{v_{\text{пар}}^2}}.$$

11. $\varepsilon = \dfrac{v_0^2}{v_{\text{кр}}^2} - 1.$

12. 1) Большая полуось не зависит от α, ибо определяется из соотношения $v_0^2 = K\left(\dfrac{2}{r_0} + \dfrac{1}{a}\right)$; $r_\pi = a(1-\varepsilon)$, $r_0 = a(1-\varepsilon_0)$. Поэтому

$$r_\pi = r_0 \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_0}. \qquad \text{(I)}$$

2) $\varepsilon^2 = 1 + h\dfrac{\sigma^2}{K^2}$, где $\sigma = v_0 r_0 \sin\alpha$, $h = v_0^2 - \dfrac{2K}{r_0}$. Поэтому

$$\varepsilon^2 - 1 = h\,\frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{K}.$$

В частности, при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$\varepsilon_0^2 - 1 = h\,\frac{v_0^2\, r_0^2}{K}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 - 1 = (\varepsilon_0^2 - 1)\sin^2\alpha, \quad \varepsilon^2 = 1 + (\varepsilon_0^2 - 1)\sin^2\alpha,$$

то есть

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 + (1 - \varepsilon_0^2)\cos^2\alpha. \qquad \text{(II)}$$

13. Пусть $AC = r$; ε, a, p — эксцентриситет, главная полуось и фокальный параметр орбиты космолета. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{v_n}{v_r}$, то $\operatorname{tg}\varphi = (1 + \varepsilon\cos\theta)/(\varepsilon\sin\theta)$, откуда $\varepsilon = 1/(\operatorname{tg}\varphi\sin\theta - \cos\theta)$. Но $p = \sigma^2/K$, $\sigma = rv\sin\varphi$, так что $p = r^2v^2\sin^2\varphi/K$. Так как $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, то $\cos\theta = \left(\dfrac{p}{r} - 1\right)/\varepsilon$, то есть

$$\cos\theta = \left(\frac{rv^2\sin^2\varphi}{K} - 1\right)/(\operatorname{tg}\varphi\sin\theta - \cos\theta),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\,\frac{rv^2\sin 2\varphi}{rv^2\sin^2\varphi - K} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sin^2\varphi - (v_{\text{кр}}/v)^2},$$

где $v_{\text{кр}}$ — это круговая скорость на расстоянии r от центра звезды A.

14. Частный случай задачи 13: $\varphi = 60°$, $v = 35$ *км/сек*, $v_{\text{кр}} = 30$ *км/сек*. Получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 120°}{\sin^2 60° - \left(\frac{6}{7}\right)^2}.$$

§ 10

1. Пусть M — масса звезды, m — масса спутника, T — период его обращения вокруг звезды, a — большая полуось его орбиты.

Теоретически мыслим случай, когда период T будет меньше T_0. Для этого спутник должен иметь настолько большую массу, чтобы

$$a^3M < (M + m)R^3,$$

то есть чтобы

$$m > M\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right).$$

Однако практически этот случай нереален.

2. $r_\alpha = H_\alpha + R$ (R — радиус Земли), $r_\pi = H_\pi + R$,

$$2a = H_\alpha + H_\pi + 2R, \quad H_\pi = 2(a - R) - H_\alpha,$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K_З}{4\pi^2} = 10\,100 \quad км^3/сек^2, \qquad T = 106\cdot 60 \quad сек,$$

$$a = \sqrt[3]{10\,100\,(106\cdot 60)^2} \approx 7420 \quad км.$$

Так как $R \approx 6370$ *км*, $H_\alpha = 1880$ *км*, то $H_\pi \approx 220$ *км*.

4. Пусть A — центр Земли, B — перигей орбиты Луны.

а) Время полета t к перигею Луны.

$AП = 6600$ *км*, $AB = 363\,300$ *км*, $a \approx 185\,000$ *км*. Найдем период обращения T такого снаряда вокруг Земли:

$$\frac{a^3}{T^2} = 10\,100 \quad км/сек^2,$$

$$T = \sqrt{\frac{185\,000^3}{10\,100}} \quad сек \approx 220 \quad час.$$

Следовательно, полет к перигею Луны займет $\frac{T}{2} \approx 110$ *час* $=$ $= 4$ *сут* 14 *час*.

б) Время полета t_α к апогею Луны вычисляется аналогично: $t_\alpha \approx 5$ *сут* 10 *час*.

5. $a = \sqrt[3]{KT^2/4\pi^2} = 40\,700$ *км*, $H_\alpha = 2a - 2R_З - H_\pi \approx 68\,000$ *км*,

$$v_\alpha = \sqrt{K\left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{a}\right)} \approx 0{,}95 \quad км/сек.$$

6. Пусть $M_З$ и $M_Л$ — массы Земли и Луны, $T_Л$ и $T_р$ — периоды обращения Луны и ракеты вокруг Земли. Тогда

$$\frac{T_Л^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M_З + M_Л)}, \qquad \frac{T_р^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM_З}.$$

Поэтому

$$\frac{T_Л}{T_р} = \left(1 + \frac{M_Л}{M_З}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{M_Л}{M_З} < 1.$$

Обозначим через l длину лунной орбиты. За 1 *сек* ракета проходит $\frac{l}{T_р}$ *км*, а Луна $\frac{l}{T_Л}$ *км*, причем $\frac{l}{T_Л} > \frac{l}{T_р}$, ибо $T_р > T_Л$.

Итак, Луна проходит за каждую секунду на $\frac{l}{T_Л} - \frac{l}{T_р}$ *км* больше, чем ракета. Чтобы пройти отделяющую их половину орбиты и нагнать ракету, Луне потребуется время

$$\frac{1}{2}\,l\Bigg/\left(\frac{l}{T_Л} - \frac{l}{T_р}\right) = \frac{T_Л}{2\left(1 - \frac{T_Л}{T_р}\right)} \approx \frac{M_З}{M_Л}\,T_Л \approx 81T_Л\,.$$

Итак, примерно через 80 лунных месяцев, то есть через 6—6,5 лет, Луна догнала бы ракету (ракета упала бы на Луну). Притяжение Луны, которым мы пренебрегли, только ускорит этот процесс.

7. $T \approx 450$ *сут.*

8. $a \approx 134\cdot 10^6$ *км*, $r_\alpha = 2a - r_\pi \approx 148\cdot 10^6$ *км*.

9. $R_З = 6371$ *км*, $H_\pi = 213$ *км*, $H_\alpha = 1560$ *км*,

$$a = R_З + \frac{H_\pi + H_\alpha}{2} \approx 7260 \quad \textit{км},$$

$$T = 2\pi a\,\sqrt{a/K} \approx 102{,}6 \quad \textit{мин.}$$

10. Орбита космолета — эллипс с большой полуосью

$$a = \frac{1}{2}(R_З + R_М) \approx 168\cdot 10^6 \quad \textit{км}.$$

Пусть t — искомое время перелета. Тогда период обращения космолета вокруг Солнца равен $2t$. По третьему закону Кеплера $a^3/4t^2 = R_З^3/T_З^2$, причем период обращения Земли $T_З \approx 365$ дней. Поэтому

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R_З}\right)^{3/2} T_З \approx \frac{1}{2}\cdot 365\cdot\left(\frac{168\cdot 10^6}{150\cdot 10^6}\right)^{3/2} \approx 260 \quad \textit{сут.}$$

11. $t \approx 150$ *сут*, $v \approx 27$ *км/сек.*

§ 11

1. Пусть перелет совершается по дуге AB (рис. Р.2): $r_0 = SA = 150\cdot 10^6$ *км*, $r_1 = SB = 228\cdot 10^6$ *км*, $v_0 = 29{,}8$ *км/сек*, $fM_С = 132{,}5\times 10^9$ *км³/сек²* (где $M_С$ — масса Солнца). Ясно, что $a = 189\cdot 10^6$ *км*.

По формуле (5) найдем, что $K = \dfrac{v_0^2}{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}} = 11\cdot 10^{10}$ *км³/сек²*. Но в силу (4)

$s = m\,\dfrac{fM_С - K}{ar_0^2} = 222\,000$ *м²*. Если парус имеет форму круга, то его радиус $R \approx 270$ *м*, $m_0 = \rho s \approx 450$ *кг*.

2. Остаются в силе интеграл энергии, интеграл площадей, интеграл Лапласа и их следствия. Орбита может быть только гиперболой (или прямой), ибо в каждый момент времени $h = v_0^2 - 2K/r_0 > 0$ и поэтому $\varepsilon > 1$.

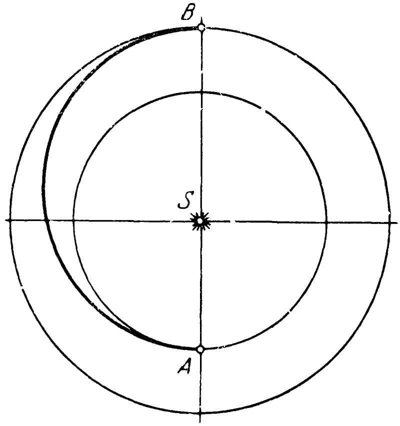

Рис. Р.2.

§ 12

1. Уравнение спирали в комплексной форме имеет вид

$$w = r_0 e^{c\theta} e^{i\theta} = r_0 e^{(c+i)\theta}, \quad |w| = r = r_0 e^{c\theta} \ (c \neq 0). \tag{I}$$

Покажем, что можно так подобрать функцию $\theta = \theta(t)$ и константу c, чтобы функция (I) удовлетворяла уравнению (35). Число K можем представить в показательной форме: $K = |K| e^{i\beta}$. Уравнение (35) перепишем так:

$$\ddot{w} = -|K| e^{i(\theta+\beta)}/r^2. \tag{II}$$

Из (I) следует, что

$$\dot{w} = r_0 (c + i) e^{(c+i)\theta} \dot{\theta}, \tag{III}$$

$$\ddot{w} = r_0 (c + i) [\ddot{\theta} + (c + i)\dot{\theta}^2] e^{(c+i)\theta}. \tag{IIIa}$$

Из (IIIa) и (II) найдем, что

$$r_0^3 e^{3c\theta} [(c + i)^2 \dot{\theta}^2 + (c + i)\ddot{\theta}] = -|K| e^{i\beta}. \tag{IV}$$

Приравнивая соответственно вещественные и мнимые части обеих частей последнего равенства, получим

$$r_0^3 e^{3c\theta} [(c^2 - 1)\dot{\theta}^2 + c\ddot{\theta}] = -|K| \cos\beta, \tag{V}$$

$$r_0^3 e^{3c\theta} [2c\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}] = -|K| \sin\beta. \tag{VI}$$

Искомая функция $\theta(t)$ должна удовлетворять обоим уравнениям (V) и (VI). Умножая (VI) на c и вычитая затем из него (V), получим уравнение

$$r_0^3 e^{3c\theta}\dot{\theta}^2(c^2+1) = |K|(\cos\beta - c\sin\beta), \tag{VII}$$

откуда

$$e^{3c\theta}\dot{\theta}^2 = D,$$

где

$$D = |K|(\cos\beta - c\sin\beta)/[r_0^3(c^2+1)]. \tag{VIII}$$

Ясно, что уравнение (VII) имеет решение лишь в том случае, когда

$$\cos\beta - c\sin\beta \geqslant 0. \tag{IX}$$

При таком дополнительном ограничении из (VII) следует

$$e^{\frac{3c\theta}{2}}\dot{\theta} = \delta, \tag{X}$$

где

$$\delta = +\sqrt{D} \text{ или } \delta = -\sqrt{D};$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3/2c\theta}) = \frac{3}{2}c\delta. \tag{XI}$$

Пусть $\theta = 0$ при $t = t_0$. В таком случае

$$e^{3/2c\theta} - 1 = \frac{3}{2}c\delta(t-t_0), \tag{XII}$$

$$\theta = \frac{2}{3c}\ln\left[1 + \frac{3}{2}c\delta(t-t_0)\right]. \tag{XIII}$$

Умножая обе части равенства (XII) на $r_0^{3/2}$, найдем:

$$r^{3/2} - r_0^{3/2} = \frac{3}{2}cr_0^{3/2}\delta(t-t_0). \tag{XIV}$$

Функция (XIII) является решением уравнения (X), вытекающего из уравнений (V) и (VI). Но она не всегда будет удовлетворять самим уравнениям (V) и (VI).

Выясним, при какой же зависимости между параметрами функция (XIII) будет удовлетворять также обоим уравнениям (V) и (VI).

Из (X) видно, что $\dot{\theta} = \delta e^{-\frac{3}{2}c\theta}$. Поэтому

$$\ddot{\theta} = \delta e^{-\frac{3}{2}c\theta}\left(-\frac{3}{2}c\right)\dot{\theta} = -\frac{3}{2}cDe^{-3c\theta}. \tag{XV}$$

Подставляя эти значения для $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ в (VI), получим:

$$c(\cos\beta - c\sin\beta) = -2(c^2+1)\sin\beta, \tag{XVI}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{c}{c^2+2}. \tag{XVIa}$$

Таким образом, функция (XIII) удовлетворяет уравнению (VI) в том и только том случае, когда β и c связаны зависимостью (XVIa). Легко проверить, что при выполнении равенства (XVI) функция (XIII) удовлетворяет также уравнению (V), а значит, и уравнению (IV).

Из равенства (34) видно, что вещественная и мнимая части числа K равны соответственно

$$K_1 = fM - \frac{\alpha r_0^2}{m} s\cos^3\varphi \quad \text{и} \quad K_2 = -\frac{\alpha r_0^2}{m} s\cos^2\varphi\sin\varphi. \qquad \text{(XVII)}$$

Ясно, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{K_2}{K_1}.$$

Таким образом, спираль $r = r_0 e^{c\theta}$ может оказаться орбитой корабля с солнечным парусом лишь в том случае, когда константа c и угол ориентации паруса φ связаны зависимостью

$$\alpha r_0^2 s\cos^2\varphi\sin\varphi / (-\alpha r_0^2 s\cos^3\varphi + fMm) = c/(c^2+2). \qquad \text{(XVIII)}$$

2. Указание. Находим последовательно c, β, D, $\dot\theta_0$, $\dot\omega_0$ и время перелета $t - t_0$ из формул (XVIII), (XVIa), (VIII), (X), (IIIa), (XIV) решения задачи 1 (при этом $\theta_0 = 0$).

3. Как видно из формулы (XIV) решения задачи 1, угол φ следует выбрать так, чтобы величина c^2D имела максимальное значение. Из (VIII) следует, что $c^2D = \lambda\,(cK_2)$, где λ — некоторая константа, не зависящая от φ. Поэтому

$$\frac{d(cK_2)}{d\varphi} \equiv c\frac{dK_2}{d\varphi} + K_2\frac{dc}{d\varphi} = 0. \qquad \text{(XIX)}$$

Производные $dc/d\varphi$ и $dK_2/d\varphi$ находим из (XVII) и (XVIII). Из системы двух уравнений (XVIII) и (XIX) можно теперь найти искомый угол φ. Эту систему удобно решить графически.

ГЛАВА III

§ 1

1. Используя формулу (6), найдем $\tau \approx 51$ *час.*

2. Полагая в формуле (6) $p = 2r_\pi = 2$ а. е., $r = 30{,}1$ а. е. $K\hat{c} = k^2$ (а.е.)^3/*сут*^{2}, $k = 0{,}01720$, получим $\tau \approx 13$ лет.

3. $\theta = {}^3/_2\pi$, $\sin\theta = -1$, $a = 6630$ *км*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $\frac{T}{2\pi} = a\sqrt{\frac{a}{K}} = 855{,}3$, $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a) = 0{,}025$. По формуле (8) $\tau = 855{,}3\cdot({}^3/_2\,\pi + 2\cdot 0{,}025)$ *сек* ≈ 68 *мин*, $t_1 = t_0 + \tau \approx 10$ *час* 8 *мин*.

§ 2

1. Пусть E — эксцентрическая аномалия точки P встречи космолета с орбитой Луны, $r = AP = 384\,400$ *км*. Время перелета τ можно найти из уравнения Кеплера

$$\tau = \frac{1}{n}(E - \varepsilon\sin E),$$

причем $r = a(1 - \varepsilon\cos E)$. Найдем последовательно a, ε, n, $\cos E$, E, $\sin E$. По условию $v_\pi = 10{,}95$ *км/сек*, $r_\pi = 6600$ *км*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $r = 384\,400$ *км*. Но $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - v_\pi^2 r_\pi} = 449\cdot10^3$ *км*, $n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{K}{a}} = 2{,}1\cdot10^{-6}$; $r_\pi = a(1-\varepsilon)$, откуда $\varepsilon = 1 - \frac{r_\pi}{a} = 0{,}9853$, $\cos E = \frac{a-r}{a\varepsilon} = 0{,}1460$. По таблицам найдем $E = 1{,}425$, $\sin E = 0{,}9894$. Поэтому

$$\tau = \frac{1}{n}(E - \varepsilon\sin E) \approx 60 \text{ час.}$$

2. $r_\pi = 6600$ *км*, $v_\pi = 12{,}0$ *км/сек*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - r_\pi\cdot v_\pi^2} = -17\,170$ *км*. Орбита — гипербола (ибо $a < 0$). Произведя расчет в том же порядке, что и в предыдущей задаче, получим $\tau \approx 20$ *час*.

3. $\tau = \frac{1}{n}(E - \varepsilon\sin E)$. В силу (14)

$$\cos E = \frac{a - r}{a\varepsilon}.$$

Так как по условию $0 < E < \pi$, то

$$\sin E = +\sqrt{1 - \cos^2 E}, \quad E = \arccos\left[\frac{a-r}{a\varepsilon}\right], \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}.$$

Поэтому

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}}\left[\arccos\frac{a-r}{a\varepsilon} - \varepsilon\sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}\right].$$

4. Из (2.9.5) и (4) найдем:

$$v^2 = \frac{K}{a}\,\frac{1 + \varepsilon\cos Z}{1 - \varepsilon\cos Z},$$

$$v_n = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sqrt{Kp}}{r} = \sqrt{\frac{K(1-\varepsilon^2)}{a}}\,\frac{1}{1 - \varepsilon\cos Z} = \frac{nb}{1 - \varepsilon\cos Z},$$

$$v_r^2 = \frac{K}{p}\varepsilon^2\sin^2\theta = \frac{K}{p}(\varepsilon^2 - \varepsilon^2\cos^2\theta) =$$

$$= \frac{K}{a(1-\varepsilon^2)}\left[\varepsilon^2 - \left(\frac{1-\varepsilon^2}{1 - \varepsilon\cos Z} - 1\right)^2\right] - \frac{K}{a}\,\frac{\varepsilon^2\sin^2 Z}{(1 - \varepsilon\cos Z)^2},$$

откуда

$$v_r = \frac{na\varepsilon\sin Z}{1 - \varepsilon\cos Z}.$$

При $0 < \varepsilon < 1$ следует в этих формулах положить $Z = E$, а при $\varepsilon > 1$ — заменить Z, $\sin Z$, $\cos Z$, n, a, b соответственно на iH, $i \operatorname{sh} H$, $\operatorname{ch} H$, $-i\,|n|$, $-|a|$, $-i\,|b|$.

5. $$\tau = \frac{1}{n}\left[2 \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right],$$

где

$$n = \sqrt{a^3/K}.$$

В случае гиперболической орбиты ($\varepsilon > 1$) можно избежать возникающих в этой формуле мнимых величин, если воспользоваться тождествами $n = -i\,|n|$, $\sqrt{1-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon - 1}$, $\operatorname{arctg}(i\lambda) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ (чтобы убедиться в справедливости последнего равенства, достаточно обе его части разложить в ряд по степеням λ). Получим

$$\tau = \frac{1}{|n|}\left[\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+1} + \sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\varepsilon+1} - \sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}\right)\right].$$

§ 3

1. а) $\tau = 50$ *мин* $= 3000$ *сек*, $n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{K}{a}} = 1{,}997\cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, $M = n\tau = 0{,}060$. Положим $E_0 = M$. По формуле (11) найдем последовательно

$$E_1 = M_0 + \varepsilon\sin E_0 = 0{,}090,\quad E_2 = 0{,}105,\quad E_3 = 0{,}112,$$
$$E_4 = 0{,}116,\quad E_5 = 0{,}118,\quad E_6 = 0{,}119,\quad E_7 = 0{,}119.$$

Можно принять $E = 0{,}119$ (*рад*). Согласно (3.2.21)

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \approx 0{,}1031,\quad \theta = 11°48',$$

$$r = a(1 - \varepsilon\cos E) \approx 50\,300 \text{ км}.$$

2. $\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{2}{35}$, $a = \frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi) = 7000$ *км*, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1{,}078\cdot 10^{-3}$, $\tau = 1$ *час* 20 *мин* $= 4800$ *сек*; $M = n\tau = 5{,}174$. Уравнение Кеплера $E - \varepsilon\sin E = M$ решим способом итераций. Положим $E_0 = M = 5{,}174$. По формуле (11) найдем

$$E_1 = M + \varepsilon\sin E_0 = 5{,}125,\quad E_2 = 5{,}122,\quad E_3 = 5{,}122.$$

Итак, $E = 5{,}122$ *рад*, то есть $E \approx 293{,}5°$,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} = -0{,}6947, \text{ откуда } \theta = 5{,}07 \text{ рад},$$

то есть $\theta \approx 290°30'$. $H = a(1 - \varepsilon\cos E) - 6370 = 6840 - 6370$, то есть $H = 470$ *км*.

3. $r = a(1 - \varepsilon\cos E)$, $a = \frac{1}{2}(70\cdot 10^4 + 9\cdot 10^4) = 395\cdot 10^3$ *км*, $\varepsilon = \frac{61}{79} \approx 0{,}772$, $\tau = 48$ *час* $= 172\,800$ *сек*, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 25{,}4\cdot 10^{-7}$ *сек*$^{-1}$, $M = n\tau = 0{,}439$. Вычисляя E способом неподвижной точки, найдем $E = 1{,}140$. Тогда $\cos E = 0{,}4176$, $r = a(1 - \varepsilon\cos E) = 268\cdot 10^3$ *км*.

4. $r_\pi = 630 + 6370 = 7000$ *км*, $v_\pi = 14{,}0$ *км/сек*, $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - v_\pi^2 r_\pi} = -4900$ *км*. Таким образом, орбита — гипербола.

Так как $r_\pi = |a|(\varepsilon - 1)$, то $\varepsilon = 1 + \frac{r_\pi}{|a|} = 2{,}44$,

$$|n| = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}} = 0{,}0019,\ M = |n|\tau = 68{,}4.$$

Способом итераций находим $H \approx 4{,}08$, а затем $r \approx 347\cdot 10^3$ *км*.

§ 4

1. $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi)$, $c = a\varepsilon = \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)$. По формуле (7) при малом ε имеем

$$H \approx r - R \approx a - a\varepsilon\cos M - R,$$

то есть

$$H \approx \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) - \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)\cos M. \qquad \text{(I)}$$

2. По формуле (I) (см. решение предыдущей задачи) можно найти M. Так как $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, то затем легко вычислить t_0.

3. $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, $R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) = a$, причем a можно найти из зависимости $T^2 = \frac{4\pi^2}{K}a^3$. Пользуясь формулой (I) из решения задачи 1, можно вычислить $H_\alpha - H_\pi$, а затем и ε по формуле $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a)$.

4. $\tau = 1$ *час* 15 *мин* $= 4500$ *сек*; $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) = 6625$ *км*, $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a) = 0{,}0110$, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1{,}143\cdot 10^{-3}$, $M = n\tau = 5{,}144$. По таблицам находим $\sin M = -0{,}9083$, $\cos M = 0{,}4183$,

$\theta = M + 2\varepsilon \cdot \sin M = 5{,}124$ *рад*, то есть $\theta \approx 293°35'$.

$$H \approx \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) - \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)\cos M \approx 224 \text{ км}.$$

§ 5

1. По формулам, связывающим элементы эллиптической орбиты, находим

$$a = \frac{r_\pi + r_\alpha}{2} = 180 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{1}{3}, \quad p = a(1 - \varepsilon^2) = 160 \cdot 10^6 \text{ см}.$$

Положим $r_1 = SC$, $r_2 = SD$, $\beta = \angle CSD$. Тогда

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\beta}.$$

Найдем β: $\beta = \theta_D - \theta_C$, где θ_C и θ_D — истинные аномалии точек C и D.

$$r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta_C},$$

откуда

$$\cos\theta_C = \frac{p - r_1}{r_1 \varepsilon},$$

$$\cos\theta_C = \frac{160 \cdot 10^6 - 150 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}2, \quad \theta_C = 1{,}369 \text{ рад}.$$

Аналогично

$$\cos\theta_D = \frac{p - r_2}{r_2 \varepsilon} = -0{,}8947, \quad \theta_D = 2{,}679 \text{ рад}, \quad \beta = \theta_D - \theta_C = 1{,}310,$$

$$s = 10^6 \cdot \sqrt{150^2 + 228^2 - 2 \cdot 150 \cdot 228 \cdot 0{,}2578} = 238 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$\cos\lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a} = -0{,}2941, \quad \lambda_1 = 1{,}869, \quad \sin\lambda_1 = 0{,}9558,$$

$$\cos\lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a} = 0{,}7059, \quad \lambda_2 = 0{,}787, \quad \sin\lambda_2 = 0{,}7082,$$

$$\frac{1}{n} = a\sqrt{\frac{a}{K_C}} = 6637 \cdot 10^3,$$

$$\tau = \frac{1}{n}[(\lambda_1 - \lambda_2) - (\sin\lambda_1 - \sin\lambda_2)] = 5{,}54 \cdot 10^6 \text{ сек} \approx 64 \text{ сут}.$$

2. Пусть $r_1 = SC = 150 \cdot 10^6$ *км*, $r_2 = SD = 800 \cdot 10^6$ *км*, $v_1 = 50{,}0$ *км/сек*, $K_C = 132{,}5 \cdot 10^9$ *км³/сек*. Из формулы $v_1^2 = K_C\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)$

найдем, что $a = -180{,}7\cdot 10^6$ *км* < 0. Поэтому орбита — гипербола, и следует применить формулу Ламберта в ее гиперболическом варианте (20):

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 814\cdot 10^6 \text{ км}, \quad \frac{1}{|n|} = |a|\sqrt{\frac{|a|}{K_C}} = 6673\cdot 10^3,$$

$\operatorname{ch}\lambda_1' = 1 + \dfrac{r_1 + r_2 + s}{2|a|} = 5{,}881$. По таблицам гиперболических функций найдем $\lambda_1' = 2{,}458$, $\operatorname{sh}\lambda_1' = 5{,}798$.

$$\text{Аналогично } \operatorname{ch}\lambda_2' = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|} = 1{,}376, \ \lambda_2' = 0{,}843,$$

$$\operatorname{sh}\lambda_2' = 0{,}946, \quad \tau = \frac{1}{|n|}\left[(\operatorname{sh}\lambda_1' - \lambda_1') - (\operatorname{sh}\lambda_2' - \lambda_2')\right] = = 230\cdot 10^5 \text{ сек} = 265 \text{ сут}.$$

3. Скорость космолета близка к параболической, так что для подсчета времени перелета допустимо воспользоваться формулой Ньютона — Эйлера (24). $s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 60^\circ} = 195\cdot 10^6$ *км*, $K = 132{,}5\cdot 10^9$ *км³/сек²*. По формуле (24) найдем: $\tau \approx 5{,}15\cdot 10^5$ *сек* ≈ 60 *сут*.

ГЛАВА IV

§ 2

1. Учтем, что гринвичское время («среднее мировое время») отличается от московского на 3 *час* и что Земля совершает полный оборот вокруг оси за 86 164 *сек*. Поэтому

$$S = S_0 + \frac{360^\circ}{86\,164}\cdot 3600\,(t - 3) + \lambda \ \text{(градусов)}.$$

2. $$S = 217{,}94^\circ + \frac{360^\circ}{86\,164}(86\,400 - 86\,164)\cdot 6 + \frac{360^\circ}{86\,164}(20 - 3)\cdot 3600 + 32^\circ \approx 151{,}6^\circ.$$

3. Зная дату и момент наблюдения, можно для этого момента вычислить звездное время S в точке B. Пусть $Ax_э y_э z_э$ — геоцентрическая экваториальная система координат (ось $Ax_э$ направлена в точку весеннего равноденствия); $Bx_г y_г z_г$ — топоцентрическая горизонтальная система. Рассмотрим еще вспомогательную систему отсчета $Bxyz$ с началом в точке B и с осями, соответственно параллельными и одинаково направленными с осями $Ax_э$, $Ay_э$, $Az_э$ (рис. Р.3). Ясно, что $x_э\boldsymbol{i} + y_э\boldsymbol{j} + z_э\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \overrightarrow{AB}$, причем вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет такие координаты:

$$x_0 = R\cos\varphi\cos(S - 180^\circ), \quad y_0 = R\cos\varphi\sin(S - 180^\circ),$$

$$x = x_э - x_0, \quad y = y_э - y_0, \ z_0 = R\sin\varphi, \quad z = z_э - {}_0z.$$

От системы $Bxyz$ можно перейти к системе $Bx_\text{г}y_\text{г}z_\text{г}$ с помощью двух поворотов (рис. Р.4): после первого поворота вокруг оси Bz на угол $S - 180°$ получим новую систему $Bx_1y_1z_1$, причем ось Bz_1 совпадает с

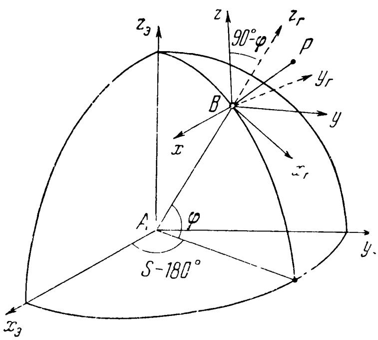

Рис. Р.3.

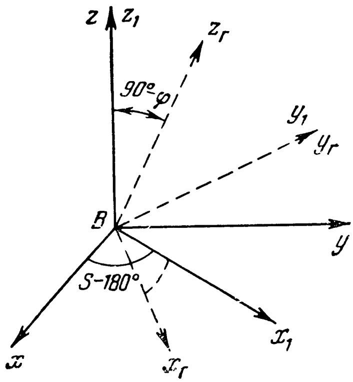

Рис. Р.4.

осью Bz; после второго поворота вокруг оси By_1 на угол $90° - \varphi$ получим систему $Bx_\text{г}y_\text{г}z_\text{г}$, причем ось By_1 совпадает с осью $By_\text{г}$.

Составим таблицу углов между осями и матрицу первого поворота

	Bx	By	Bz
Bx_1	$S - 180°$	$270° - S$	$90°$
By_1	$S - 90°$	$S - 180°$	$90°$
Bz_1	$90°$	$90°$	$0°$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & -\cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично для второго поворота:

	Bx_1	By_1	Bz_1
$Bx_\text{г}$	$90° - \varphi$	$90°$	$180° - \varphi$
$By_\text{г}$	$90°$	0	$90°$
$Bz_\text{г}$	φ	$90°$	$90° - \varphi$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Отсюда:

$$\begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix} = A_2A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_1^{-1}A_2^{-1} \begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_э \\ y_э \\ z_э \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + A_1^{-1}A_2^{-1} \begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix}, \tag{I}$$

где

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & -\cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Зная $x_г$, $y_г$, $z_г$, S и φ, легко найти из (I) $x_э$, $y_э$, $z_э$.

4. Зная ρ, h, A, легко вычислить декартовы горизонтальные координаты ($x_г$, $y_г$, $z_г$):

$$x_г = \rho\cos h\cos A, \quad y_г = \rho\cos h\sin A, \quad z_г = \rho\sin h,$$

а затем декартовы экваториальные $x_э$, $y_э$, $z_э$ (см. предыдущую задачу). После этого можно найти r, δ, α из формул

$$x_э = r\cos\delta\cos\alpha, \quad y_э = r\cos\delta\sin\alpha, \quad z_э = r\sin\delta.$$

Отсюда следует, что

$$r_э^2 = x_э^2 + y_э^2 + z_э^2, \quad \sin\delta = \frac{z_э}{r}.$$

Последним соотношением угол δ определяется однозначно, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$. Затем уже нетрудно найти $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и угол α.

5. Вычисляем сначала $x_э$, $y_э$, $z_э$, затем (см. задачу 3) $x_г$, $y_г$, $z_г$ и определяем, наконец, ρ, h и A из системы уравнений:

$$x_г = \rho\cos h\cos A,$$
$$y_г = \rho\cos h\sin A, \quad z_г = \rho\sin h.$$

6. Пусть (x, y, z) — искомые декартовы координаты перигея орбиты спутника, (ξ, η, ζ) — орбитальные координаты. Тогда

$$\xi = a(1-\varepsilon), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Из (21) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a(1-\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos\gamma \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos\gamma \\ \sin\omega\sin\gamma \end{bmatrix} a(1-\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot 560$$

то есть $x \approx -1980$ *км*, $y \approx 3960$ *км*, $z \approx 3430$ *км*.

Далее: $r = a(1-\varepsilon) = 5600$ *км*, $\sin\delta = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}6125$,

$$\delta \approx 37°46', \quad \cos\delta = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{(r\cos\delta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447, \quad \alpha \approx 15°26'.$$

7.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x Q_x R_x \\ P_y Q_y R_y \\ P_z Q_z R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\Omega\sin\gamma \\ -\cos\Omega\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

§ 3

1. Пусть ракета оказалась над точкой P_1 в момент t_1. Рассмотрим невращающуюся систему координат $Axyz$ с началом в центре Земли, осью Az, перпендикулярной к плоскости экватора, и осью Ax, проходящей через точку встречи гринвичского меридиана с экватором в момент t_1. Так как Земля за 6 *час* повернулась на $360° \cdot 6 \cdot 3600/86164 = 90{,}25°$, то точка P_2 будет иметь относительно системы отсчета $Axyz$ долготу $\lambda_2' = 90{,}25° + \lambda_2 = 270{,}25°$. Обозначим через ϱ_1 и ϱ_2 орты векторов $\overrightarrow{AP_1}$ и $\overrightarrow{AP_2}$.

$$\varrho_1 = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 \boldsymbol{i} - \cos\varphi_1\sin\lambda_1 \boldsymbol{j} + \sin\varphi_1 \boldsymbol{k},$$
$$\varrho_2 = \cos\varphi_2\cos\lambda_2' \boldsymbol{i} + \cos\varphi_2\sin\lambda_2' \boldsymbol{j} + \sin\varphi_2 \boldsymbol{k}.$$

Нормаль к плоскости орбиты совпадает по направлению с вектором $\varrho_3 = \varrho_1 \times \varrho_2$. Угол γ между вектором ϱ_3 и ортом $\boldsymbol{k}$ оси Az можно найти из зависимости $\boldsymbol{k} \cdot \varrho_3 = |\varrho_3| \cos\gamma$. Итак, $\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{k}\cdot(\varrho_1 \times \varrho_2)}{|\varrho_1 \times \varrho_2|}$, причем

$$\boldsymbol{k}\cdot(\varrho_1 \times \varrho_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi_1\cos\lambda_1 & \cos\varphi_1\sin\lambda_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2\cos\lambda_2' & \cos\varphi_2\sin\lambda_2' & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}$$

и

$$\varrho_1 \times \varrho_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 \cos\lambda_2' & \cos\varphi_2 \sin\lambda_2' & \sin\varphi_2. \end{vmatrix}.$$

После выкладок найдем, что $\cos\gamma = 0{,}006$, $\gamma \approx 89°$.

2. Пусть $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ — орты координатных осей Ax, Ay, Az; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты осей орбитальной системы координат $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AP_1} \equiv \boldsymbol{r}_1 = d\,(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}), \quad \overrightarrow{AP_2} \equiv \boldsymbol{r}_2 = d\,(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}), \\ \overrightarrow{AP_3} \equiv \boldsymbol{r}_3 = d\,(-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}). \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}, \quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K} \\ 2d & d & 0 \\ d & d & d \end{vmatrix} = d^2\,(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}),$$

$$|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = d^2\sqrt{6},$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}) \approx 0{,}408\cdot\boldsymbol{I} - 0{,}816\boldsymbol{J} + 0{,}408\cdot\boldsymbol{K}.$$

В силу формул (1) и (2)

$$\sin\Omega\cdot\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -\cos\Omega\cdot\sin\gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Так как

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 180°,$$

то

$$\sin\gamma > 0, \ \sin\gamma = +\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$\sin\Omega = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\Omega = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда

$$\gamma \approx 65°54', \qquad \Omega \approx 26°33'.$$

По формулам (4) найдем c_1 и c_3:

$$c_1\,(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3,$$

то есть

$$c_1 d^2\,(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}) = d^2\,(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}),$$

откуда $c_1 = 1$. Аналогично найдем, что $c_2 = 1$. Из (5а) получим

$$p - r_2 = (p - r_1) + (p - r_3),$$

откуда

$$p = r_1 - r_2 + r_3.$$

Из (I) видно, что

$$r_1 = d\sqrt{5}, \quad r_2 = d\sqrt{3}, \quad r_3 = d\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$p = d\,(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 1{,}908d \approx 1{,}91d.$$

Согласно (8)

$$\varepsilon \,|\, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 \,| = |\,(p - r_1)\boldsymbol{r}_3 - (p - r_3)\,\boldsymbol{r}_1\,|,$$

$$\varepsilon d^2 \sqrt{6} = |\,-0{,}328 d^2(-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}) - 0{,}494 d^2 (2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})\,| \approx d^2 \cdot 0{,}887.$$

Отсюда $\varepsilon \approx 0{,}362$. Движение — эллиптическое. Вычислим ω. Сначала найдем векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}$. По формуле (6)

$$0{,}887 d^2 \boldsymbol{j} = d^2(-0{,}660\boldsymbol{I} - 0{,}494\boldsymbol{J} - 0{,}328\boldsymbol{K}).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{j} = -0{,}744\boldsymbol{I} - 0{,}557\boldsymbol{J} - 0{,}370\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -0{,}529\boldsymbol{I} + 0{,}153\boldsymbol{J} + 0{,}834\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \cos \Omega\, \boldsymbol{I} + \sin \Omega\, \boldsymbol{J} = \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{J}.$$

Угол ω найдем из зависимостей

$$\boldsymbol{\beta i} = \cos \omega, \quad \boldsymbol{\beta j} = \cos(\omega + 90^\circ) = -\sin \omega,$$

$$\cos \omega = \boldsymbol{\beta i} = -0{,}4047, \quad \sin \omega = -\boldsymbol{\beta j} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cdot 0{,}744 + 0{,}557) > 0.$$

По таблицам находим $\omega \approx 113^\circ 50'$. Из формул (12), (13) можно найти момент t_0 прохождения спутника через перигей.

$$a = p(1 - \varepsilon^2) \approx 44\,200 \text{ км},$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 41\,700 \text{ км}; \quad \boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{i} = 9160, \quad \boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{j} = -33\,420.$$

Поэтому [см. (12)]

$$\cos E_2 > 0, \quad \sin E_2 = -0{,}8014, \quad E_2 = 4{,}071,$$

$$\frac{1}{n} = a\sqrt{\frac{a}{K}} = 954{,}5, \quad t_2 - t_0 = \frac{1}{n}(E_2 - \varepsilon \cdot \sin E_2) = 3680 \text{ сек};$$

отсюда $t_0 \approx 11$ *час.*

§ 4

1. $$\varepsilon = \frac{\lambda}{K} \ (\text{где } \lambda = |\,\boldsymbol{\lambda}\,|), \quad p = \frac{\sigma^2}{K} \ (\text{здесь } \sigma = |\,\boldsymbol{\sigma}\,|),$$

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \sigma^2 \frac{K}{K^2 - \lambda^2}, \quad \cos \gamma = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{k}}{\sigma}, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,$$

где $\boldsymbol{k}$ — орт оси Az. Отсюда находим γ. Пусть $\gamma \neq 0$; $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\sigma}/(\sigma \sin \gamma)$. Тогда проекции вектора $\boldsymbol{\beta}$ на оси Ax и Ay равны соответственно $\cos \Omega$ и $\sin \Omega$: $\cos \Omega = \boldsymbol{\beta i}$, $\sin \Omega = \boldsymbol{\beta j}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ — орты осей Ax, Ay). Отсюда можно вычислить Ω. Имеем

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \lambda \cos \omega, \quad \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\lambda} = \sin \omega\, \boldsymbol{\sigma}/\sigma.$$

Отсюда находим ω.

2. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{v}_1 + K\boldsymbol{r}_1/r_1)$. По формулам предыдущей задачи находим ε, p, Ω, γ, ω. Из формулы $r_1 = a(1 - \varepsilon \cdot \cos Z_1)$ найдем $\cos Z_1$, а затем $\sin Z_1$ и Z_1; t_0 можно найти из уравнений Кеплера

$$Z_1 - \varepsilon \cdot \sin Z_1 = n(t_1 - t_0).$$

§ 6

1. Спутник движется по окружности с угловой скоростью $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}$. Такую же угловую скорость относительно невращающейся Земли имеет и подспутниковая точка, так что ее линейная скорость v равна Rn (R — средний радиус Земли). В момент t_0 прохождения спутника над экватором (с южного полушария на северное) можно скорость подспутниковой точки разложить на две компоненты $v_м$ и $v_э$, из которых первая направлена по меридиану, а вторая — по экватору:

$$v_м = v \sin\gamma, \qquad v_э = v\cos\gamma.$$

Рассмотрим теперь движение подспутниковой точки на *вращающейся* Земле. Учтем, что каждая точка экватора вращается со скоростью $v_0 = \frac{2\pi R}{86164}$ *км/сек*. Поэтому скорость спутника относительно вращающейся Земли имеет такие компоненты (в момент t_0):

$$v'_э = v_э - v_0, \quad v'_м = v_м.$$

Поэтому угол γ' между трассой и экватором в момент t_0 удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\gamma' = \frac{v'_м}{v'_э} = \frac{v_м}{v_э - v_0}$. В нашем случае

$a = 6685$ *км*, $v = 6371\sqrt{398\,600/6685^3} \approx 7{,}36$ *км/сек*,
$v_э = v\cos\gamma = 7{,}36\cos 65° = 3{,}10$ *км/сек*, $v_м = v\sin\gamma \approx 6{,}67$ *км/сек*,
$v_0 = 0{,}464$ *км/сек*, $\operatorname{tg}\gamma' = 6{,}67/2{,}64 = 2{,}53$, $\gamma' = 68°25'$.

2. Можно воспользоваться формулами из решения предыдущей задачи. В данном случае

$$\gamma = 90°, \ v = 6371\sqrt{\frac{398\,600}{6600^3}} \approx 7{,}50 \text{ км/сек},$$

$$v_э = 0, \ v_м = 7{,}50 \text{ км/сек}, \ \operatorname{tg}\gamma' = \frac{7{,}50}{(-0{,}47)} = -15{,}96, \ \gamma' \approx 93°42'.$$

ГЛАВА VI

§ 1

1. $R_д = a\mu^{2/5} = 925\cdot 10^3$ *км*.

2. $a = 228\cdot 10^6$ *км*, $\mu = 1 : 3\,090\,000$, $R_п = a\sqrt{\mu} = 130\,000$ *км*, $R_д = a\mu^{2/5} = 580\,000$ *км*.

§ 3

1. $v = \sqrt{\frac{2K_з}{R_д}} = 0{,}92$ *км/сек*. Время перелета τ вычислим по

формуле (3.1.5):

$r_\pi = 6600$ *км*, $p = 2r_\pi = 13\,200$ *км*, $r = R_д = 930\,000$ *км*, $\tau = 188$ *час*.

2. $v_{III} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 v_{к.С}^2 + v_{п.п}^2}$, где $v_{к.С}$ — круговая скорость относительно Солнца вблизи планеты, $v_{п.п}$ — параболическая скорость относительно планеты у ее поверхности. В случае Марса

$$v_{к.С}^2 \approx 581, \quad v_{п.п}^2 = \frac{2K_п}{r_\pi} \approx 25{,}2,$$

$$v_{III} = \sqrt{105{,}7 + 25{,}2} \approx 11{,}5 \text{ км/сек}.$$

4. При выходе из сферы действия Земли ракета должна иметь нулевую скорость относительно Солнца и, следовательно, скорость $v_1 = 29{,}8$ *км/сек* относительно Земли.

Согласно интегралу энергии

$$v_0^2 - \frac{2K_З}{r_0} = v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д}.$$

Здесь

$$r_0 = 6600 \text{ км}, \quad R_д = 925 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Поэтому $v_0 \approx 27{,}7$ *км*. Падение на Солнце можно рассматривать как полет по очень узкому эллипсу с большой осью $2a = 150 \cdot 10^6$ *км*. Время падения равно $\frac{1}{2}T = \pi a \sqrt{\frac{a}{K_С}} = 56{,}1 \cdot 10^5$ *сек* ≈ 65 суток.

5. $a = \frac{1}{2}(R_М + R_З) \approx 189 \cdot 10^6$ *км*. Скорость (v_2) ракеты относительно Солнца в момент выхода из сферы действия Земли определяется из зависимости $v_2^2 = K_С\left(\frac{2}{R_д} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $v_2 = 32{,}4$ *км/сек*.

Если направление движения ракеты совпадает с направлением движения Земли вокруг Солнца, то скорость v_1 ракеты относительно Земли будет равна $v_2 - v_З$, где $v_З$ — круговая скорость движения Земли вокруг Солнца,

$$v_1 = 32{,}4 - 29{,}8 = 2{,}6 \text{ км/сек},$$

$$v_0^2 - \frac{2K_З}{r_0} = v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д} \quad (r_0 = 6800 \text{ км}, \; R_д \approx 925\,000 \text{ км}).$$

Отсюда $v_0 = 11{,}1$ *км/сек*.

6. Сохраняя обозначения задачи 5, имеем

$$v_2 \approx 42{,}1 \text{ км/сек}, \quad v_1 = 42{,}1 - 29{,}8 \approx 12{,}3 \text{ км/сек},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2K_З}{r_0} + v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д}} \approx 16{,}4 \text{ км/сек}.$$

ГЛАВА VIII

§ 2

2. $p \approx a \approx 6900$ *км*, $\dfrac{d\Omega}{dN} \approx -0{,}54^\circ \cos\gamma$, то есть

$$\dot{\Omega} = -0{,}38 \text{ *град/об*} \approx -6{,}1 \text{ *град/сут*},$$

$$\frac{d\omega}{dN} \approx 0{,}27^\circ\,(5\cos^2\gamma - 1), \text{ то есть } \dot{\omega} \approx 0{,}4 \text{ *град/об*} \approx 6{,}5 \text{ *град/сут*}.$$

3. $\dot{\Omega} = -4{,}27$ *град/сут*, $\dot{\omega} = 3{,}36$ *град/сут*.
4. $\dot{\Omega} = -2{,}7$ *град/сут*, $\dot{\omega} = -0{,}42$ *град/сут*.

§ 3

1. Из формулы $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{K}a^3$ следует, что

$$2\ln T = \ln\left(\frac{2\pi}{K}\right) + 3\ln a, \quad 2\frac{dT}{T} = 3\frac{da}{a}.$$

Полагая $T = 96\cdot 60$ *сек*, $dT = 3$ *сек*, $a \approx 7000$ *км*, получим $da \approx$ $\approx 2{,}1$ *км/сут*.