Глава I

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Историческое введение. Можно сказать, что предмет небесной механики берет свое начало со времени опубликования Исааком Ньютоном в 1687 г. его «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», обычно упоминаемых в ссылках как «Principia». В этом прославленном труде Ньютон сформулировал законы движения и закон всемирного тяготения; он вывел также некоторые из наиболее важных свойств движения планет и спутников.

Вывод знаменитых трех законов Кеплера на много лет предшествовал сочинению Ньютона, и поэтому историческое изложение введения в небесную механику следует пути, избранному Ньютоном в разд. II и III книги I, где он выясняет, какие сведения о силе, действующей на планету, могут быть выведены из законов Кеплера, которые можно сформулировать следующим образом:

I. Орбита планеты лежит в плоскости, проходящей через Солнце, и площадь, описанная прямой, соединяющей Солнце и эту планету, пропорциональна протекшему времени.

II. Орбита планеты является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.

III. Отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси имеет одно и то же значение для всех планет, обращающихся вокруг Солнца.

Из утверждений, что орбита планеты лежит в плоскости, проходящей через Солнце, и что площадь, описанная радиусом-вектором, пропорциональна времени, можно заключить, что сила, действующая на планету, должна быть направлена по прямой, соединяющей эту планету с Солнцем. Эта сила должна быть скорее притягивающей, чем отталкивающей, так как траектория планеты обращена своей вогнутостью к Солнцу. Из утверждения, что орбита планеты является эллипсом с Солнцем в одном из фокусов, следует далее, что сила, удерживающая планету на ее орбите, должна меняться обратно квадрату расстояния планеты от Солнца. Наконец, третий закон Кеплера требует, чтобы силы, действующие на различные планеты, были прямо пропорциональны массам этих планет. Впрочем, поскольку орбиты больших планет приблизительно лежат в одной и той же плоскости, то это рассуждение не может полностью доказать изотропность гравитационного притяжения. Этот довод значительно усиливается при рассмотрении кометных орбит, большинство которых имеет большие наклонности относительно плоскостей орбит больших планет. Все это также было рассмотрено Ньютоном.

Изучение визуально-двойных звезд к концу XVIII столетия повысило интерес к вопросу об универсальности закона тяготения. В большинстве случаев для визуально-двойных звезд ничего неизвестно о движении по лучу зрения, и единственная информация об орбите должна быть получена из наблюдаемого факта, состоящего в том, что проекция истинной относительной орбиты на плоскость, касательную к небесной сфере, является эллипсом, для которого выполняется закон площадей, но в котором фокус не занят центральной звездой. Поэтому возникает вопрос, какому закону гравитационного притяжения соответствуют орбиты, обладающие этим свойством. Ответ гласит, что закон тяготения Ньютона является единственным изотропным законом, удовлетворяющим наблюдениям, но что другие более сложные и анизотропные законы также были бы совместимы с фактами наблюдений. Исследования этого рода производились до введения спектрографа для измерения лучевых скоростей. С помощью сведений о движении по лучу зрения этот ответ можно было бы сделать более определенным.

В эпоху Ньютона существовало достаточное оправдание того, чтобы начинать исследование с установления основных законов из наблюдаемых явлений при помощи метода индукции.

Даже в настоящее время анализ проблемы в таком направлении является поучительным и представляет значительный интерес. В этой книге мы предполагаем, что законы движения и закон тяготения имеются в нашем распоряжении как основные законы небесной механики, и выводим заключения из этих предположений. Это означает, что мы следуем с самого начала принципу освященного веками метода научного исследования: законность основных предположений проверяется сравнением наблюдений с теорией. Ньютон сформулировал этот принцип в своих «Правилах умозаключений в физике» («Principia», книга III) следующим образом: «В опытной физике предположения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подверженными исключениям».

Хорошо известно, что наблюдения движений небесных тел подтвердили законность этих основных предположений с удивительно высокой степенью точности. Вся важность точности количественного согласия между теорией и наблюдениями, очевидно, не осознана многочисленными авторами писем и брошюр, которые из года в год пропагандируют изменения в основаниях небесной механики.

Имеется одно важное исключение: создание общей теории относительности заставило считать ньютонианский фундамент небесной механики некоторым приближением к более фундаментальной системе законов. Трудность релятивистской формулировки и высокая степень точности приближения, достигнутого при помощи законов Ньютона, оправдывают исследования, проведенные на основе классической теории. В тех немногих случаях, когда общая теория относительности требует модификаций, эти последние могут быть введены как малые поправки к результатам классического анализа.

Наиболее значительным наблюденным отклонением от теории Ньютона является дополнительное ускорение в движении перигелия Меркурия, которое настолько надежно установлено, что это наблюдательное подтверждение общей теории относительности не может более подвергаться серьезному сомнению. Аналогичное, но гораздо меньшее ускорение в движении перигелия орбиты Земли в настоящее время довольно хорошо подтверждается наблюдениями, однако не с такой уверенностью, как в случае перигелия Меркурия.

2. Законы движения и закон тяготения. Можно сформулировать следующие три закона движения:

I. Каждое тело продолжает сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока не вынуждается приложенной силой изменить это состояние.

II. Скорость изменения количества движения пропорциональна приложенной силе и происходит в направлении, в котором эта сила действует.

III. Каждому действию соответствует равное и противоположное противодействие.

Закон Ньютона для гравитационного притяжения гласит: Всякие две частицы во вселенной притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Прежде чем применить эти законы к простейшим задачам небесной механики, можно сделать несколько поясняющих замечаний.

а) Предполагается, что существуют системы координат, в которых применимы эти законы движения. Такого рода координатная система называется ньютоновой системой отсчета.

б) Скорость частицы массы m определяется производной ds/dt — предельным значением $\Delta s/\Delta t$, когда Δt стремится к нулю; Δs есть расстояние, пройденное за промежуток времени Δt.

в) Количество движения определяется произведением $m ds/dt$.

г) Скорость, количество движения и сила являются векторами со следующими компонентами в декартовой системе координат:

Скорость	$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt};$
Количество движения	$m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt};$
Сила	$F_x,\ F_y, F_z.$

д) Тогда второй закон движения материальной частицы можно установить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=F_x,\quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)=F_y,\quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right)=F_z.$$

Поскольку m будет рассматриваться как постоянная, то эти уравнения можно написать в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z. \tag{1}$$

Для краткости производные по времени будут часто обозначаться точкой. Следовательно, компоненты скорости запишутся как $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, а компоненты ускорения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$.

е) Закон тяготения Ньютона сформулирован только для материальных точек и не относится к телам конечных размеров. Однако можно показать (см. гл. III), что тела, обладающие сферической симметрией, притягивают друг друга так, как будто их массы сосредоточены в их центрах. Как будет показано в гл. III, для тел, распределение масс которых отличается от сферической симметрии, взаимное притяжение близко к тому, которое имело бы место, если бы массы этих тел были сосредоточены в их центрах, при условии, что расстояния между телами велики по сравнению с их размерами.

В солнечной системе Солнце и большие планеты являются сфероидами с относительно малыми степенями сжатия, а их взаимные расстояния велики по сравнению с их размерами. Следовательно, притяжение между Солнцем и планетами без спутников можно считать почти таким же, как если бы эти тела были материальными точками, т. е. их массы были бы сосредоточены в их центрах. Для планет, обладающих спутниками, первое приближение даст движение центров масс этих систем. Движение системы Земля — Луна является в некоторых отношениях наиболее интересным. Сначала можно получить движение центра масс системы Земля — Луна в предположении, что масса этой системы сосредоточена в центре тяжести. Следующим шагом является получение малой поправки к этому движению, которая обусловлена распределением масс внутри этой системы. Полное решение этой проблемы требует знания главных особенностей движения Луны вокруг Земли.

Меньшие тела в солнечной системе — малые планеты и метеорные тела — могут иметь очень неправильную форму, но из-за их малых размеров по сравнению с их расстояниями от Солнца и от больших планет допускается, целиком в пределах точности наблюдений, рассматривать эти тела как материальные точки. Для комет это приближение может оказаться менее оправданным в силу их больших размеров в отдельных случаях. Однако даже для комет существует надежное доказательство сильной концентрации массы в ядрах. Неизвестно ни одного твердо установленного отклонения в движении комет, которое могло бы быть приписано несферическому распределению масс.

Среди планет, обладающих спутниками, имеется несколько примеров спутников с расстояниями от их главных планет, лишь в несколько раз превышающими радиус центральной планеты. Наименьшее известное отношение расстояния спутника к радиусу планеты, а именно 2,54 : 1, имеет V спутник Юпитера. В таких случаях влиянием несферичности планеты на движение спутника, вообще говоря, пренебречь нельзя. Эта проблема подробно изучается в гл. III и XVII также в связи с орбитами искусственных спутников, для которых требуется более сложное решение, чем для естественных спутников в солнечной системе.

ж) Существует еще одно обстоятельство, которое в значительной мере упрощает изучение движений тел в солнечной системе. По сравнению с Солнцем массы больших планет малы. Самой большой массой является масса Юпитера, равная примерно 1/1000 массы Солнца. Следующей наибольшей массой, равной 1/3500 массы Солнца, обладает Сатурн. Следовательно, всегда, за исключением случая тела, близкого к главной планете, притяжение Солнца подавляющим образом превосходит притяжения больших планет. Известно, что массы малых планет, комет и метеорных тел очень малы. Например, общая масса всех малых планет, вместе взятых, оценивается меньшей, чем 1/500 массы Земли.

В силу этих обстоятельств пригодное первое приближение к движению большой планеты, малой планеты, кометы или метеорной частицы можно получить, рассматривая только взаимное притяжение между Солнцем и телом, движение которого необходимо изучить, и считая оба тела материальными точками. Это — известная задача двух тел, которая будет изучаться в последующих разделах.

3. Уравнения движения задачи двух тел. Рассмотрим две материальные точки m_a и m_b с координатами ξ_a, η_a, ζ_a; ξ_b, η_b, ζ_b в декартовой системе координат. Когда рассматриваются движения в солнечной системе, то выбирается правая система координат. Обозначим расстояние между обеими массами через r. Тогда сила, действующая между этими двумя массами, есть

$$F = k^2 \frac{m_a m_b}{r^2},$$

где значение k зависит от выбранных единиц массы, времени и расстояния. Для численных расчетов выбор единиц обычно определяется единицами, используемыми в национальных эфемеридах и вспомогательных таблицах. Для теоретических исследований обычно принимают такие единицы, чтобы $k^2 = 1$, или исключают k из уравнений. Обращая должное внимание на размерность выведенных величин, всегда оказывается возможным восстановить, если требуется, k в окончательных результатах анализа. С точки зрения численных приложений выгодно в выражениях для F писать множитель k^2, а не множитель f (как, например, делает Тиссеран[1]).

Прямая $\overrightarrow{m_a m_b}$ имеет следующие направляющие косинусы:

$$\frac{\xi_b - \xi_a}{r}, \qquad \frac{\eta_b - \eta_a}{r}, \qquad \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r}.$$

Следовательно, компоненты силы, действующей на m_a, будут

$$F_{a\xi} = F\,\frac{\xi_b - \xi_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3},$$

$$F_{a\eta} = F\,\frac{\eta_b - \eta_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\eta_b - \eta_a}{r^3},$$

$$F_{a\zeta} = F\,\frac{\zeta_b - \zeta_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r^3},$$

а компоненты силы, действующей на m_b,

$$F_{b\xi} = k^2 m_a m_b \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \quad F_{b\eta} = k^2 m_a m_b \frac{\eta_a - \eta_b}{r^3}, \quad F_{b\zeta} = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_a - \zeta_b}{r^3}.$$

Очевидно, что $F_{a\xi} = -F_{b\xi}$ и т. д. в силу третьего закона движения. Если выражения для $F_{a\xi}$, $F_{a\eta}$, ..., $F_{b\zeta}$ взять в качестве правых частей уравнений движения (1), то уравнения движения примут следующую явную форму:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\xi}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \\ m_a \ddot{\eta}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\eta_b - \eta_a}{r^3}, \\ m_a \ddot{\zeta}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r^3}; \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Tisserand, Mécanique Céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

$$
\begin{aligned}
m_b \ddot{\xi}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \\
m_b \ddot{\eta}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\eta_a - \eta_b}{r^3}, \\
m_b \ddot{\zeta}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\zeta_a - \zeta_b}{r^3},
\end{aligned} \tag{3}
$$

где

$$
r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\zeta_a - \zeta_b)^2.
$$

В этой задаче уравнения движения можно было бы написать почти сразу, и задача сводится к системе шести дифференциальных уравнений, каждое из которых второго порядка. Полное интегрирование этой системы требует введения двенадцати постоянных интегрирования.

4. Движение центра масс. Можно получить шесть постоянных интегрирования, используя то, что правые части соответствующих уравнений (2) и (3) равны по величине, но противоположны по знаку. Отсюда попарным сложением получаются уравнения

$$
\begin{aligned}
m_a \ddot{\xi}_a + m_b \ddot{\xi}_b &= 0, \\
m_a \ddot{\eta}_a + m_b \ddot{\eta}_b &= 0, \\
m_a \ddot{\zeta}_a + m_b \ddot{\zeta}_b &= 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Интегрируя их один раз, получаем

$$
\begin{aligned}
m_a \dot{\xi}_a + m_b \dot{\xi}_b &= \alpha_1, \\
m_a \dot{\eta}_a + m_b \dot{\eta}_b &= \alpha_2, \\
m_a \dot{\zeta}_a + m_b \dot{\zeta}_b &= \alpha_3,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где α_1, α_2 и α_3 — произвольные постоянные. Еще одно интегрирование дает

$$
\begin{aligned}
m_a \xi_a + m_b \xi_b &= \alpha_1 t + \beta_1, \\
m_a \eta_a + m_b \eta_b &= \alpha_2 t + \beta_2, \\
m_a \zeta_a + m_b \zeta_b &= \alpha_3 t + \beta_3,
\end{aligned} \tag{6}
$$

где β_1, β_2 и β_3 — три дополнительные произвольные постоянные.

Другую форму для этих выражений можно получить, вводя ξ_g, η_g, ζ_g в качестве координат центра масс. Тогда

$$
\begin{aligned}
m_a \xi_a + m_b \xi_b &= (m_a + m_b)\, \xi_g, \\
m_a \eta_a + m_b \eta_b &= (m_a + m_b)\, \eta_g, \\
m_a \zeta_a + m_b \zeta_b &= (m_a + m_b)\, \zeta_g.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\xi_g &= \frac{\alpha_1}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_1}{m_a + m_b}, \\
\eta_g &= \frac{\alpha_2}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_2}{m_a + m_b}, \\
\zeta_g &= \frac{\alpha_3}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_3}{m_a + m_b},
\end{aligned} \tag{8}
$$

что говорит о том, что центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, причем координаты центра масс в момент времени $t=0$ равны $\beta_1/(m_a+m_b)$, $\beta_2/(m_a+m_b)$, $\beta_3/(m_a+m_b)$, а постоянная скорость дается формулой

$$V_g^2 = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{(m_a+m_b)^2}.$$

Направляющие косинусы скорости, очевидно, будут

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \quad \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \quad \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}.$$

Важно ясно понимать смысл постоянных интегрирования. Некоторая путаница может оставаться до тех пор, пока не будет полностью понято их математическое и физическое значения. В данном случае интерпретация ясна непосредственно. С математической точки зрения смысл постоянных интегрирования состоит просто в том, что какие бы значения ни были приписаны α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, решение задачи, в которое входят эти постоянные, будет удовлетворять исходным уравнениям. С физической точки зрения это решение обычно будет применяться для описания движения некоторой физической системы. В этом случае определенная система значений постоянных интегрирования будет служить для отождествления этой физической системы.

В качестве иллюстрации допустим, что солнечная система ограничена двумя телами — Солнцем и Землей. Постоянные β_1, β_2, β_3, разделенные на сумму масс, дают координаты центра масс этой системы при $t=0$. Постоянные α_1, α_2, α_3, разделенные на сумму масс, определяют компоненты скорости центра масс системы.

Известно, что скорость солнечной системы, если ее определять относительно ближайших звезд, равна 19 *км/сек* и приблизительно направлена в точку с прямым восхождением 18^h и склонением $+30°$. Направляющие косинусы апекса в экваториальной системе координат, ось ζ которой направлена в северный полюс небесной сферы, суть

$$0{,}000, \quad -0{,}866, \quad +0{,}500,$$

а компоненты скорости движения солнечной системы в *км/сек*

$$0{,}0, \quad -16{,}5, \quad +9{,}5.$$

Эти числа, очевидно, являются значениями в *км/сек* выражений

$$\frac{\alpha_1}{m_a+m_b}, \quad \frac{\alpha_2}{m_a+m_b}, \quad \frac{\alpha_3}{m_a+m_b}.$$

Следовательно, постоянные интегрирования α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 существенны только для описания положения центра масс системы двух тел; они излишни, если необходимо изучить движение внутри этой системы.

При помощи равенств (6) можно привести систему (2), (3) двенадцатого порядка к системе шестого порядка любым из двух указанных ниже методов.

5. Уравнения движения относительно центра масс. Введем

$$x_a = \xi_a - \xi_g, \quad y_a = \eta_a - \eta_g, \quad z_a = \zeta_a - \zeta_g,$$
$$x_b = \xi_b - \xi_g, \quad y_b = \eta_b - \eta_g, \quad z_b = \zeta_b - \zeta_g.$$

Поскольку

$$\xi_b - \xi_a = x_b - x_a, \quad \eta_b - \eta_a = y_b - y_a, \quad \zeta_b - \zeta_a = z_b - z_a$$

и так как

$$\ddot{\xi}_g = 0, \quad \ddot{\eta}_g = 0, \quad \ddot{\zeta}_g = 0,$$

то уравнения (2) и (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_a\ddot{x}_a &= k^2 m_a m_b \frac{x_b - x_a}{r^3}, \\ m_a\ddot{y}_a &= k^2 m_a m_b \frac{y_b - y_a}{r^3}, \\ m_a\ddot{z}_a &= k^2 m_a m_b \frac{z_b - z_a}{r^3}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} m_b\ddot{x}_b &= k^2 m_a m_b \frac{x_a - x_b}{r^3}, \\ m_b\ddot{y}_b &= k^2 m_a m_b \frac{y_a - y_b}{r^3}, \\ m_b\ddot{z}_b &= k^2 m_a m_b \frac{z_a - z_b}{r^3}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$r^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2.$$

Это равносильно использованию движущегося центра масс как начала системы координат, а сравнение уравнений (2), (3) с уравнениями (9), (10) показывает, что уравнения не изменяются при этом преобразовании. Легко показать самым общим образом, что уравнения остаются неизменными, если новое начало движется равномерно произвольным образом относительно первоначальной системы координат, и что они также остаются неизменными независимо от ориентировки координатной системы.

Теперь уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} m_a x_a + m_b x_b &= 0, \\ m_a y_a + m_b y_b &= 0, \\ m_a z_a + m_b z_b &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, x_b, y_b, z_b можно исключить из уравнений (9) и x_a, y_a, z_a — из (10). Для этого необходимо выразить r только через x_a, y_a, z_a или через x_b, y_b, z_b. Поскольку

$$\begin{aligned} x_a - x_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} x_a = -\frac{m_a + m_b}{m_a} x_b, \\ y_a - y_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} y_a = -\frac{m_a + m_b}{m_a} y_b, \\ z_a - z_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} z_a = -\frac{m_a + m_b}{m_a} z_b, \end{aligned} \tag{12}$$

то отсюда следует, что

$$r^2 = \frac{(m_a + m_b)^2}{m_b^2}(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) = \frac{(m_a + m_b)^2}{m_a^2}(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2),$$

или же, если

$$r_a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2, \qquad r_b^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2,$$
$$\mu_a = k^2 \frac{m_b^3}{(m_a + m_b)^2}, \qquad \mu_b = k^2 \frac{m_a^3}{(m_a + m_b)^2}, \tag{13}$$

то уравнения (9) и (10) можно записать в виде

$$\ddot{x}_a = -\mu_a \frac{x_a}{r_a^3}, \quad \ddot{y}_a = -\mu_a \frac{y_a}{r_a^3}, \quad \ddot{z}_a = -\mu_a \frac{z_a}{r_a^3}, \tag{14}$$

$$\ddot{x}_b = -\mu_b \frac{x_b}{r_b^3}, \quad \ddot{y}_b = -\mu_b \frac{y_b}{r_b^3}, \quad \ddot{z}_b = -\mu_b \frac{z_b}{r_b^3}. \tag{15}$$

Очевидно, что решение либо уравнений (14), либо уравнений (15) даст все необходимое. Если при полном решении уравнений (14) x_a, y_a, z_a получаются как функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования, то выражения для x_b, y_b, z_b можно написать при помощи уравнений (11). Следовательно, с помощью примененной методики достигнуто приведение к системе уравнений шестого порядка. Эти уравнения не будут использованы для интегрирования, однако мы обратимся к ним в следующем разделе.

6. Уравнения относительного движения. Более распространенная методика состоит в определении движения массы m_b относительно m_a. Чтобы получить эти уравнения, положим

$$x = x_b - x_a, \qquad y = y_b - y_a, \qquad z = z_b - z_a.$$

Вычитая уравнения (9), разделенные на m_a, из соответствующих уравнений (10), деленных на m_b, при

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \mu = k^2 (m_a + m_b),$$

получаем следующие уравнения:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}, \qquad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}, \qquad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \tag{16}$$

Уравнения (16) представляют новую систему, приведенную к системе шестого порядка. Если x, y, z получены интегрированием в виде функции от t и шести постоянных интегрирования, то выражения для x_a, x_b, y_a, y_b, z_a, z_b можно получить из соотношений

$$x_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} x, \qquad x_b = +\frac{m_a}{m_a + m_b} x,$$
$$y_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} y, \qquad y_b = +\frac{m_a}{m_a + m_b} y, \tag{17}$$
$$z_a = -\frac{m_b}{m_a + m_b} z, \qquad z_b = +\frac{m_a}{m_a + m_b} z,$$

которые можно вывести при помощи уравнений (11).

7. Интегралы площадей. Очевидно, что если первое уравнение из (16) умножить на y, а второе — на x, то правые части станут одинаковыми. Вычитание дает

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0.$$

Три уравнения (16) можно сгруппировать попарно тремя различными способами следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y\ddot{z} - z\ddot{y} &= 0,\\
z\ddot{x} - x\ddot{z} &= 0,\\
x\ddot{y} - y\ddot{x} &= 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, получая

$$
\begin{aligned}
y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1,\\
z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2,\\
x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Эти равенства представляют собой три интеграла площадей, где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Из (19) легко получается следующее уравнение:

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \tag{20}$$

Это — уравнение плоскости, проходящей через начало координат, которому должны удовлетворять координаты в орбите относительного движения. Следовательно, орбита массы m_b при ее движении относительно m_a лежит в неподвижной плоскости, проходящей через m_a. Эта плоскость является плоскостью орбиты. Ориентировка плоскости орбиты определяется отношениями между c_1, c_2, c_3.

Положим для краткости

$$G = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

где G всегда следует выбирать положительным. Направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты (20) тогда будут

$$\frac{c_1}{G}, \quad \frac{c_2}{G}, \quad \frac{c_3}{G}.$$

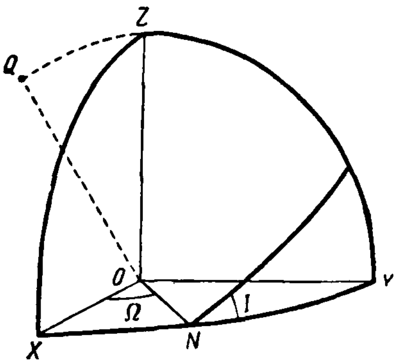

Рис. 1. Ориентация плоскости орбиты и нормаль к ней OQ.

Плоскость орбиты обычно определяется геометрически долготой восходящего узла и наклонностью. Если движение по орбите прямое, т. е. против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z, то I выбирается в первом квадранте, а нормаль выбирается с той же стороны плоскости xy, что и положительное направление оси z. Если движение по орбите является обратным, то I выбирают во втором квадранте, а нормаль берется с той стороны от плоскости xy, которая содержит отрицательное направление оси z. Если смотреть с этой стороны, движение по орбите происходит против часовой стрелки, но если смотреть со стороны положительной оси z, то движение происходит по часовой стрелке.

Вообразим сферу (рис. 1) с центром в начале координат. Плоскость орбиты пересечет эту сферу по большому кругу. Точка N является пересечением этого круга с плоскостью xy, где тело переходит на ту сторону от плоскости xy, которая содержит положительное направление оси z. Пусть нормаль пересекает сферу в точке Q. Рассмотрим сферические треугольники QXN и QYN. Формула косинусов дает

$$\cos X\hat{Q} = \frac{c_1}{G} = \sin\Omega \sin I,$$

$$\cos Y\hat{Q} = \frac{c_2}{G} = -\cos\Omega \sin I.$$

Кроме того,

$$\cos Z\hat{Q} = \frac{c_3}{G} = \cos I.$$

Теперь покажем, что $\frac{1}{2}c_1$, $\frac{1}{2}c_2$, $\frac{1}{2}c_3$ представляют собой проекции соответственно на плоскости yz, zx и xy площади, описанной радиусом-вектором за единицу времени. Рассмотрим сначала движение в плоскости орбиты, и пусть положение m_b относительно m_a определяется полярными координатами r, ψ. Начало отсчета угловой координаты можно выбрать в любом фиксированном направлении на плоскости орбиты. Пусть на рис. 2 P есть положение тела m_b в момент времени t, а P_1 — положение в момент $t+\Delta t$. Тогда площадь треугольника OPP_1 равна

$$\frac{1}{2} r (r+\Delta r) \Delta\psi = \frac{1}{2} r^2\Delta\psi + \frac{1}{2} r\Delta r \,\Delta\psi.$$

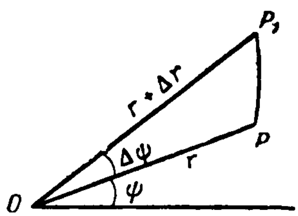

Рис. 2. Дифференциал площади.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\psi}{dt}, \tag{21}$$

где dA/dt есть площадь, описанная в единицу времени. Определим теперь прямоугольные координаты в плоскости орбиты формулами

$$(x) = r\cos\psi, \quad (y) = r\sin\psi.$$

Тогда

$$(\dot{x}) = -r\dot{\psi}\sin\psi + \dot{r}\cos\psi, \quad (\dot{y}) = r\dot{\psi}\cos\psi + \dot{r}\sin\psi,$$

и находим, что

$$(x)(\dot{y}) - (y)(\dot{x}) = r^2\dot{\psi}. \tag{22}$$

Обозначим проекцию r на плоскость yz через r_1, а проекцию $\Delta\psi$ — через $\Delta\psi_1$; аналогично пусть проекциями на плоскость zx будут r_2, $\Delta\psi_2$, а на плоскость xy — r_3, $\Delta\psi_3$, причем углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 отсчитываются соответственно от осей y, z и x. Тогда отсюда следует, что проекции площади треугольника OPP_1, если отбросить члены с произведениями вида $\Delta r_j \Delta\psi_j$, равны

$$\frac{1}{2} r_1^2\Delta\psi_1, \quad \frac{1}{2} r_2^2\Delta\psi_2, \quad \frac{1}{2} r_3^2\Delta\psi_3.$$

Поэтому проекции площади, описанной радиусом-вектором в единицу времени, на эти три плоскости будут

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{d\psi_1}{dt}, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{1}{2} r_2^2 \frac{d\psi_2}{dt}, \quad \frac{dA_3}{dt} = \frac{1}{2} r_3^2 \frac{d\psi_3}{dt}. \tag{23}$$

Переход к прямоугольным координатам может быть выполнен при помощи следующих преобразований:

$$y = r_1 \cos\psi_1, \quad z = r_2 \cos\psi_2, \quad x = r_3 \cos\psi_3,$$
$$z = r_1 \sin\psi_1, \quad x = r_2 \sin\psi_2, \quad y = r_3 \sin\psi_3,$$

которые окончательно дают выражения, аналогичные (22):

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= r_1^2\dot{\psi}_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= r_2^2\dot{\psi}_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= r_3^2\dot{\psi}_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Следовательно, из соотношений (24), (23) и (19) получается, что

$$c_1 = 2\frac{dA_1}{dt}, \quad c_2 = 2\frac{dA_2}{dt}, \quad c_3 = 2\frac{dA_3}{dt}.$$

Сумма квадратов трех уравнений (19) равна

$$\begin{aligned} G^2 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \\ &= y^2\dot{z}^2 + z^2\dot{y}^2 + z^2\dot{x}^2 + x^2\dot{z}^2 + x^2\dot{y}^2 + y^2\dot{x}^2 - 2yz\dot{y}\dot{z} - 2zx\dot{z}\dot{x} - 2xy\dot{x}\dot{y} \\ &= (r^2 - x^2)\dot{x}^2 + (r^2 - y^2)\dot{y}^2 + (r^2 - z^2)\dot{z}^2 - 2yz\dot{y}\dot{z} - 2zx\dot{z}\dot{x} - 2xy\dot{x}\dot{y}, \end{aligned}$$

или окончательно

$$G^2 = r^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2. \tag{25}$$

Поскольку

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r\dot{r},$$

то из (25) легко видеть, что G не зависит от ориентировки координатной системы. В частном случае, когда $I = 0$, $G = c_3$ представляет удвоенную площадь, описанную радиусом-вектором в плоскости орбиты. В силу независимости G от ориентировки координатной системы это должно выполняться во всех случаях, и отсюда

$$G = r^2\dot{\psi}.$$

Постоянная интеграла площадей для орбиты при относительном движении может быть представлена вектором, имеющим длину G и направленным по нормали к орбитальной плоскости. Компоненты c_1, c_2, c_3 этого вектора представляют постоянные скалярных интегралов площадей для плоскостей, перпендикулярных к трем координатным осям.

8. Интеграл живых сил[1] **(интеграл энергии).** Уравнения (16), если их умножить последовательно на множители $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложить, дают

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = -\mu\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^3}.$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{r^3}\frac{d(r^2)}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

---

[1]) Название «живая сила» является точным эквивалентом латинского выражения vis viva, которое часто переводится как «кинетическая энергия».

После интегрирования оно дает

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}=2\left(\frac{\mu}{r}+C\right), \tag{26}$$

где C есть постоянная интегрирования. Левая часть выражения (26) представляет собой квадрат относительной скорости. Поэтому постоянная C не зависит от ориентировки координатной системы. Уравнение (26) показывает, что квадрат скорости одного тела относительно другого обратно пропорционален расстоянию между ними с точностью до аддитивной постоянной.

Полезно написать этот интеграл в другой форме. Полагая $U=\mu/r$, можно записать уравнения (16) в виде

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{27}$$

Поскольку U является функцией только от координат x, y, z, т. е. не зависит от компонентов скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, и независимая переменная t также не входит в U явным образом, то мы имеем

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z},$$

откуда следует, что если три уравнения (27) умножить последовательно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложить, то

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{dU}{dt}.$$

Интегрирование дает

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=U+C. \tag{28}$$

Этот интеграл можно написать в виде

$$\frac{1}{2}V^2-U=C.$$

Относительно дальнейшего рассмотрения этого интеграла см. разд. 15 этой главы.

9. Движение в плоскости орбиты. Поскольку движение происходит в плоскости, то можно ввести координатную систему x, y, z такую, что плоскость xy совпадает с плоскостью орбиты. Тогда $z\equiv 0$, и уравнения движения принимают вид

$$\ddot{x}=-\mu\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y}=-\mu\frac{y}{r^3}, \tag{29}$$

где

$$r^2=x^2+y^2.$$

Введем теперь полярные координаты формулами

$$x=r\cos\psi, \quad y=r\sin\psi.$$

Тогда

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\psi}^2.$$

Следовательно, интеграл площадей и интеграл живых сил можно записать в следующем виде:

$$r^2\dot{\psi} = G,$$
$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right). \tag{30}$$

Эти уравнения составляют систему второго порядка, однако присутствие двух постоянных интегрирования делает их полностью эквивалентными системе (29), являющейся системой четвертого порядка.

Переменная ψ входит только посредством своей производной. Исключение $\dot{\psi}$ дает

$$\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} = 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right),$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right)}. \tag{31}$$

Это уравнение пригодится в дальнейшем. Чтобы получить уравнение для r, выраженного через угловую координату ψ, удобно исключить t из уравнения (31) и первого уравнения из (30). В результате получится

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\psi}\,\frac{d\psi}{dt} = \\ &= \frac{dr}{d\psi}\cdot\frac{G}{r^2} = \\ &= -\frac{d}{d\psi}\left(\frac{G}{r}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (31) можно написать в виде

$$-\frac{d}{d\psi}\left(\frac{G}{r}\right) = \sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + C\right)}. \tag{32}$$

Выражение под знаком корня можно записать следующим образом:

$$2C + \frac{\mu^2}{G^2} - \left(-\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r}\right)^2.$$

Отсюда, если

$$q = -\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r}, \qquad Q^2 = 2C + \frac{\mu^2}{G^2},$$

уравнение (32) принимает вид

$$\frac{dq}{d\psi} = -\sqrt{Q^2 - q^2}. \tag{33}$$

Еще одно преобразование

$$\frac{q}{Q} = \sigma$$

дает

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = -\sqrt{1 - \sigma^2},$$

или

$$d\psi = \frac{-d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\psi = \arccos\sigma + \gamma, \tag{34}$$

где γ есть постоянная интегрирования. Выражение (34) равносильно

$$\sigma = \cos(\psi - \gamma). \tag{35}$$

Но

$$\sigma = \frac{q}{Q} = \frac{-(\mu/G) + (G/r)}{\sqrt{2C + (\mu^2/G^2)}}.$$

Следовательно, если это выражение для σ ввести в (35), то получится следующее уравнение:

$$-\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r} = \sqrt{2C + \frac{\mu^2}{G^2}}\cos(\psi - \gamma),$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} + \frac{1}{G}\sqrt{2C + \frac{\mu^2}{G^2}}\cos(\psi - \gamma). \tag{36}$$

Это уравнение можно сравнить с уравнением для r в полярных координатах, если орбита является эллипсом с началом координат в фокусе. Тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\psi - \tilde{\omega})}{a(1 - e^2)}, \tag{37}$$

где $\tilde{\omega}$ есть долгота перигелия, a — большая полуось и e — эксцентриситет.

После еще одного незначительного преобразования уравнение (36) переходит в

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} + \frac{\mu}{G^2}\sqrt{\frac{2G^2C}{\mu^2} + 1}\cos(\psi - \gamma). \tag{38}$$

Тогда сравнение уравнений (37) и (38) дает

$$\begin{aligned} &\gamma = \tilde{\omega}, \\ &\frac{\mu}{G^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)}, \\ &\frac{2G^2C}{\mu^2} + 1 = e^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Из этих результатов следует, что значение постоянной интегрирования G, выраженное через обычные постоянные a, e, имеет вид

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} = \\ &= \sqrt{\mu p}, \end{aligned} \tag{40}$$

где p — параметр орбиты, т. е.

$$p = a(1 - e^2).$$

Подстановка этого выражения вместо G в последнее уравнение (39) дает

$$C = -\frac{\mu}{2a}. \tag{41}$$

При помощи новых постоянных интегрирования a, e интегралы (30) можно записать в следующем виде:

$$r^2\dot{\psi} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,,$$
$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

10. Третий закон Кеплера. Поскольку $G = 2dA/dt$, то площадь, описанная радиусом-вектором в единицу времени, дается формулой

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu p} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}\,. \qquad (42)$$

Площадь всего эллипса равна πab, где b есть малая полуось, или

$$b = a\sqrt{1-e^2}\,.$$

Пусть период обращения по эллипсу есть P. Среднее движение n определяется как средняя скорость, с которой угол ψ возрастает в течение периода:

$$n = \frac{2\pi}{P}\,.$$

Следовательно, секториальная скорость равна

$$\frac{\pi ab}{} = \frac{nab}{2} = \frac{1}{2}na^2\sqrt{1-e^2}\,.$$

Она должна равняться правой части уравнения (42), откуда

$$na^2 = \sqrt{\mu a}\,,$$

или

$$\mu = n^2a^3. \qquad (43)$$

Это — аналитическое выражение третьего закона Кеплера.

11. Эксцентрическая аномалия. До сих пор были получены только три из четырех постоянных, необходимых для полного интегрирования уравнений (24). Этими тремя постоянными являются или

$$\tilde{\omega},\ C,\ G,$$

или

$$\tilde{\omega},\ a,\ e.$$

Уравнение для орбиты было найдено в следующем виде:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}\,, \qquad (44)$$

с истинная аномалия f введена равенством

$$f = \psi - \tilde{\omega}.$$

Мы не получили еще выражения, дающего ψ или f как функцию от t. Непосредственным подходом к решению этой задачи была бы подстановка соотношения (37) в первое уравнение из (30), дающая уравнение

$$\sqrt{\mu a(1-e^2)} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{\{1+e\cos(\psi-\tilde{\omega})\}^2}\,\frac{d\psi}{dt}\,,$$

или при $\mu = n^2 a^3$

$$n\,dt = \frac{(1-e^2)^{3/2}\,d\psi}{\{1+e\cos(\psi-\tilde{\omega})\}^2},$$

интегрирование которого дало бы t как функцию от $\psi-\tilde{\omega}$, откуда можно было бы получить ψ как функцию от t. Хотя этот путь возможен, все же, чтобы достичь нашей цели, лучше вернуться к уравнению (31), которое при помощи (40) и (41) можно написать в виде

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\mu a(1-e^2) + 2\mu r - \frac{\mu r^2}{a}}.$$

При $\mu = a^3 n^2$ это уравнение принимает вид

$$\frac{r}{na}\,\frac{dr}{dt} = \sqrt{-a^2 + a^2e^2 + 2ar - r^2} = \sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2},$$

или

$$na\,dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Интегрирование этого выражения элементарно. Положим

$$r - a = -ae\cos u, \tag{45}$$

где u есть некоторая вспомогательная переменная, называемая эксцентрической аномалией. Имеем

$$dr = +ae\sin u\,du \tag{46}$$

и

$$a^2e^2 - (r-a)^2 = a^2e^2\sin^2 u.$$

Следовательно, в результате этого преобразования получается

$$n\,dt = (1 - e\cos u)\,du.$$

Это уравнение после интегрирования дает

$$u - e\sin u = n(t-T), \tag{47}$$

где T — постоянная интегрирования.

12. Средняя аномалия. Из уравнения (44), выражающего r через истинную аномалию, вытекает, что в перигелии

$$f = 0, \quad r = a(1-e);$$

в афелии

$$f = \pi, \quad r = a(1+e).$$

Из (45) следует также, что

$$\text{для} \quad u = 0 \quad r = a(1-e),$$
$$\text{для} \quad u = \pi \quad r = a(1+e).$$

Следовательно, углы u и f равны при

$$u = f = 0 \quad \text{и} \quad u = f = \pi.$$

Пусть в уравнении (47) T соответствует моменту прохождения через перигелий, и положим

$$n(t-T)=l. \tag{48}$$

Это соотношение определяет среднюю аномалию l, которая по определению равна нулю в перигелии. При $u=\pi$ следует, что $l=\pi$. Следовательно, все три аномалии равны нулю в перигелии и равны π в афелии. Теперь уравнение (47) можно записать в следующем виде:

$$u-e\sin u=l. \tag{49}$$

Это — уравнение Кеплера.

Постоянная T, входящая в уравнение (47), является четвертой постоянной интегрирования, необходимой для определения движения в плоскости орбиты. В этом виде она необходима для указания времени прохождения через перигелий. Эта характеристика вместе со значениями постоянных интегрирования a, e, $\tilde{\omega}$ и параметром μ определит движение по орбите для любого момента времени. Эта форма часто используется для кометных орбит. Для планетных орбит в качестве четвертой постоянной интегрирования чаще принято применять значение l в начальную эпоху. Пусть эта эпоха есть $t=t_0$. Тогда, если $l=l_0$ при $t=t_0$, выражение для средней аномалии принимает вид

$$l=l_0+n(t-t_0), \tag{50}$$

где n дается формулой (43) как функция от a и μ.

13. Формулы для определения положения в плоскости орбиты. Чтобы вычислить положение в орбите в любой момент времени, необходимо определить u из уравнения Кеплера, являющегося трансцендентным относительно u. После того как u найдено, можно определить из (45) радиус-вектор

$$r=a(1-e\cos u). \tag{51}$$

Чтобы получить f, полезно сначала из (44) найти $r\cos f$, что дает

$$r\cos f=-\frac{r}{e}+\frac{a(1-e^2)}{e}=$$

$$=a(\cos u-e),$$

$$\cos f=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}.$$

Тогда легко видеть, что

$$1+\cos f=\frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u},$$

$$1-\cos f=\frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u}.$$

Эти формулы можно написать в следующем виде:

$$2\cos^2\frac{f}{2}=\frac{1-e}{1-e\cos u}\cdot 2\cos^2\frac{u}{2},$$

$$2\sin^2\frac{f}{2}=\frac{1+e}{1-e\cos u}\cdot 2\sin^2\frac{u}{2}.$$

Деля вторую формулу на первую и извлекая квадратный корень, получим

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}. \tag{52}$$

Выражения (51) и (52) дают, таким образом, радиус-вектор и истинную аномалию, если известна эксцентрическая аномалия u. Вопрос относительно квадранта f никогда не возникает. Квадрант $f/2$, очевидно, тот же, что и квадрант $u/2$, так как u и f одновременно проходят через значения 0 и π. Формула (52) особенно полезна для логарифмических вычислений. Можно упростить множитель $(1+e)^{1/2} \times \times (1-e)^{-1/2}$, вводя φ равенством

$$e = \sin\varphi.$$

Поэтому для эллиптических орбит

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, если $\varphi' = (\pi/2) - \varphi$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} &= \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos\varphi'}{1-\cos\varphi'}} = \\ &= \operatorname{ctg}\frac{\varphi'}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{u}{2}. \tag{53}$$

При вычислениях с использованием вычислительных машин часто более удобно применять прямоугольные координаты вместо полярных. Чтобы получить требуемое выражение, введем систему координат $\bar{x}\bar{y}$, расположенную в плоскости орбиты, с осью $\bar{x}$, направленной в перигелий. Тогда для выражений через эксцентрическую аномалию получим формулы

$$\bar{x} = r\cos f = a(\cos u - e), \tag{54}$$

$$\bar{y} = r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \tag{55}$$

первая из которых была выведена выше. Последняя получается непосредственно из

$$r^2 - r^2\cos^2 f = a^2(1 - 2e\cos u + e^2\cos^2 u - \cos^2 u + 2e\cos u - e^2),$$

$$r^2\sin^2 f = a^2(1-e^2)\sin^2 u.$$

Операция извлечения квадратного корня из обеих частей этого уравнения не приводит к неопределенности в смысле выбора знака, так как

$$0 < u < \pi \quad \text{требует} \quad 0 < f < \pi,$$

$$\pi < u < 2\pi \quad \text{требует} \quad \pi < f < 2\pi.$$

14. Движение относительно центра масс. На этом этапе необходимо вернуться к некоторым уравнениям, полученным перед уравнениями (16) для относительного движения, на которых основаны рассуждения в разд. 7—13. В разд. 5 было отмечено, что интегрирование задачи двух тел можно было бы основывать либо на системе уравнений (14), либо на системе (15). Сравнение этих уравнений с уравнениями системы (16) показывает, что их интегрирование должно привести к решению того же вида, что и полученное интегрированием (16). Существенная разница состоит в том, что μ следует заменить на μ_a для (14) и на μ_b для (15).

Из соотношений (17) следует, что для того, чтобы выразить x_a, y_a, z_a, необходимо вместо a в выражении для x, y, z ввести

$$a_a = +\frac{m_b}{m_a+m_b}a$$

и заменить $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\omega}+\pi$. Чтобы выразить x_b, y_b, z_b, необходимо заменить a в выражении для x, y, z на

$$a_b = +\frac{m_a}{m_a+m_b}a,$$

оставляя все остальные постоянные интегрирования неизменными. В частности, n остается неизменным. Это даст

$$n^2a_a^3 = \mu_a = \frac{m_b^3}{(m_a+m_b)^3}\mu,$$

$$n^2a_b^3 = \mu_b = \frac{m_a^3}{(m_a+m_b)^3}\mu,$$

что согласуется с введенными значениями для μ, μ_a, μ_b.

15. Интеграл энергии. Мы возвращаемся теперь к уравнениям (2) и (3) — первоначальным уравнениям задачи двух тел — с целью получить интеграл живых сил и интегралы площадей для этих уравнений. Поскольку в этих уравнениях

$$r^2 = (\xi_b-\xi_a)^2 + (\eta_b-\eta_a)^2 + (\zeta_b-\zeta_a)^2,$$

то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi_a}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\xi_b-\xi_a}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial\xi_b}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\xi_a-\xi_b}{r^3}$$

с аналогичными выражениями для переменных η и ζ. Следовательно, если

$$U^* = \frac{k^2m_am_b}{r}, \tag{56}$$

то уравнения (2) и (3) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_a\ddot{\xi}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial\xi_a}, & m_b\ddot{\xi}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial\xi_b}, \\ m_a\ddot{\eta}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial\eta_a}, & m_b\ddot{\eta}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial\eta_b}, \\ m_a\ddot{\zeta}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial\zeta_a}, & m_b\ddot{\zeta}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial\zeta_b}. \end{aligned} \tag{57}$$

Важно отметить, что U^* является функцией от шести зависимых переменных ξ_a, η_a, ζ_a, ξ_b, η_b, ζ_b, т. е. U^* не является функцией от компонент скорости, и независимая переменная t не присутствует явно в выражении для U^*. Как следствие этих свойств, выполняется следующее соотношение:

$$\frac{dU^*}{dt} = \frac{\partial U^*}{\partial\xi_a}\dot{\xi}_a + \frac{\partial U^*}{\partial\eta_a}\dot{\eta}_a + \frac{\partial U^*}{\partial\zeta_a}\dot{\zeta}_a + \frac{\partial U^*}{\partial\xi_b}\dot{\xi}_b + \frac{\partial U^*}{\partial\eta_b}\dot{\eta}_b + \frac{\partial U^*}{\partial\zeta_b}\dot{\zeta}_b. \tag{58}$$

Умножая шесть уравнений (57) последовательно на $\dot\xi_a$, $\dot\eta_a$, $\dot\zeta_a$, $\dot\xi_b$, $\dot\eta_b$, $\dot\zeta_b$ и складывая, получаем, что правая часть этой суммы равна правой части соотношения (58). Следовательно, этот результат можно написать в следующем виде:

$$m_a(\dot\xi_a\ddot\xi_a+\dot\eta_a\ddot\eta_a+\dot\zeta_a\ddot\zeta_a)+m_b(\dot\xi_b\ddot\xi_b+\dot\eta_b\ddot\eta_b+\dot\zeta_b\ddot\zeta_b)=\frac{dU^*}{dt}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и получить

$$\frac{1}{2}m_a(\dot\xi_a^2+\dot\eta_a^2+\dot\zeta_a^2)+\frac{1}{2}m_b(\dot\xi_b^2+\dot\eta_b^2+\dot\zeta_b^2)=U^*+C^*, \tag{59}$$

где C^* есть постоянная интегрирования. Обозначив

$$\dot\xi_a^2+\dot\eta_a^2+\dot\zeta_a^2=V_a^{*2},$$
$$\dot\xi_b^2+\dot\eta_b^2+\dot\zeta_b^2=V_b^{*2},$$

можно написать выражение для кинетической энергии T^* системы

$$T^*=\frac{1}{2}m_aV_a^{*2}+\frac{1}{2}m_bV_b^{*2}.$$

Следовательно, интеграл (59) примет вид

$$T^*-U^*=C^*. \tag{60}$$

Это символическая форма уравнения энергии, утверждающего, что сумма кинетической энергии T^* и потенциальной энергии $-U^*$ равна постоянной. Потенциальная энергия отсчитывается от нуля — значения потенциальной энергии, принимаемого для бесконечного удаления обеих масс друг от друга.

16. Потенциальная энергия. Чтобы проверить предыдущее утверждение, рассмотрим работу, которая должна быть совершена, чтобы увеличить расстояние между двумя массами m_a и m_b от r_{I} до r_{II} ($r_{\mathrm{II}}>r_{\mathrm{I}}$). Совершенная работа, если расстояние увеличилось на величину dr, дается формулой

$$dW=\frac{k^2m_am_b}{r^2}\,dr.$$

После интегрирования она принимает вид

$$W_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}}=\int_{r_{\mathrm{I}}}^{r_{\mathrm{II}}}\frac{k^2m_am_b}{r^2}\,dr=k^2m_am_b\left(\frac{1}{r_{\mathrm{I}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{II}}}\right).$$

Для $r_{\mathrm{II}}=\infty$ совершенная работа равна

$$W_{\mathrm{I}\to\infty}=\frac{k^2m_am_b}{r_{\mathrm{I}}},$$

что совпадает с U^* при $r=r_{\mathrm{I}}$. Следовательно, потенциальная энергия равна нулю при $r=\infty$ и отрицательна для конечного расстояния между обоими телами.

Функцию U^* также называют *силовой функцией* системы, так как частные производные от U^* по координатам равны компонентам сил, действующих на массы.

Третьим названием для U^* является слово «потенциал». При употреблении слова «потенциал» необходимо соблюдать осторожность, так как иногда потенциал определяется с обратным знаком, особенно в немецких работах по физике.

17. Переход к системе координат с началом в центре масс. Полученный интеграл энергии применим к любой произвольной системе координат, в которой справедливы ньютоновы законы движения. Допустим теперь, что начало системы отсчета помещено в центр масс и что поэтому используются уравнения (9) и (10) при

$$x_a = \xi_a - \xi_g, \quad y_a = \eta_a - \eta_g, \quad z_a = \zeta_a = \zeta_g,$$
$$x_b = \xi_b - \xi_g, \quad y_b = \eta_b - \eta_g, \quad z_b = \zeta_b - \zeta_g$$

и

$$\xi_g = \frac{1}{m_a + m_b}(\alpha_1 t + \beta_1),$$
$$\eta_g = \frac{1}{m_a + m_b}(\alpha_2 t + \beta_2),$$
$$\zeta_g = \frac{1}{m_a + m_b}(\alpha_3 t + \beta_3).$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\xi}_a = \dot{x}_a + \frac{\alpha_1}{m_a + m_b}, \quad \dot{\xi}_b = \dot{x}_b + \frac{\alpha_1}{m_a + m_b},$$
$$\dot{\eta}_a = \dot{y}_a + \frac{\alpha_2}{m_a + m_b}, \quad \dot{\eta}_b = \dot{y}_b + \frac{\alpha_2}{m_a + m_b},$$
$$\dot{\zeta}_a = \dot{z}_a + \frac{\alpha_3}{m_a + m_b}, \quad \dot{\zeta}_b = \dot{z}_b + \frac{\alpha_3}{m_a + m_b}.$$

Если теперь

$$V_a^2 = \dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2,$$
$$V_b^2 = \dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2,$$

то мы получаем

$$V_a^{*2} = V_a^2 + \frac{2}{m_a + m_b}(\alpha_1 \dot{x}_a + \alpha_2 \dot{y}_a + \alpha_3 \dot{z}_a) + \frac{1}{(m_a + m_b)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$
$$V_b^{*2} = V_b^2 + \frac{2}{m_a + m_b}(\alpha_1 \dot{x}_b + \alpha_2 \dot{y}_b + \alpha_3 \dot{z}_b) + \frac{1}{(m_a + m_b)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Затем, если

$$T^{**} = \frac{1}{2} m_a V_a^2 + \frac{1}{2} m_b V_b^2,$$

то отсюда вытекает, что

$$T^* = T^{**} + \frac{1}{2(m_a + m_b)}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \tag{61}$$

причем вторые слагаемые выражений для V_a^{*2}, V_b^{*2} взаимно уничтожаются в силу соотношений

$$m_a \dot{x}_a + m_b \dot{x}_b = 0, \quad m_a \dot{y}_a + m_b \dot{y}_b = 0, \quad m_a \dot{z}_a + m_b \dot{z}_b = 0.$$

Если V_g — скорость центра масс в системе координат ξ, η, ζ, то имеем

$$V_g^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{(m_a + m_b)^2}.$$

Отсюда

$$T^* = T^{**} + \frac{1}{2}(m_a + m_b) V_g^2. \tag{62}$$

Интеграл энергии в системе координат с началом в центре масс имеет вид

$$T^{**} - U^* = C^{**}, \tag{63}$$

поскольку U^* не зависит от начала координат. Сравнение T^* и T^{**} при помощи (61) или (62) дает соотношение

$$C^* = C^{**} + \frac{1}{2}(m_a + m_b) V_g^2,$$

показывающее, что полная энергия в системе координат ξ, η, ζ отличается от полной энергии в системе координат с началом в центре масс на половину суммы масс, умноженной на квадрат скорости последнего.

Интересно сравнить интеграл (63) с интегралом (26), полученным для относительного движения. Соотношения (17) после дифференцирования дают

$$V_a^2 = \frac{m_b^2}{(m_a + m_b)^2} V^2, \qquad V_b^2 = \frac{m_a^2}{(m_a + m_b)^2} V^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} m_a V_a^2 + \frac{1}{2} m_b V_b^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b^2 + m_a^2 m_b}{(m_a + m_b)^2} V^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} V^2.$$

Если это равенство ввести в (63), то получится

$$\frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} V^2 - \frac{k^2 m_a m_b}{r} = C^{**},$$

тогда как интеграл (26) дает

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{k^2 (m_a + m_b)}{r} = C.$$

Легко видеть, что оба эти выражения одинаковы при условии, что

$$C^{**} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} C.$$

Поскольку интегрирование уравнений относительного движения дало

$$C = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{k^2 (m_a + m_b)}{2a},$$

то отсюда следует, что

$$C^{**} = -\frac{k^2 m_a m_b}{2a}.$$

В таком случае это полная энергия при движении, рассматриваемом в системе координат, начало которой совпадает с центром масс.

18. Интегралы площадей. Если первое из уравнений (2) умножить на $-\eta_a$, а второе — на $+\xi_a$, то сложением получается

$$m_a (\xi_a \ddot{\eta}_a - \eta_a \ddot{\xi}_a) = k^2 m_a m_b \frac{\xi_a (\eta_b - \eta_a) - \eta_a (\xi_b - \xi_a)}{r^3} =$$

$$= k^2 m_a m_b \frac{\xi_a \eta_b - \eta_a \xi_b}{r^3}. \tag{64}$$

Аналогично, если первое из уравнений (3) умножить на $-\eta_b$, а второе на $+\xi_b$ и сложить, то получим

$$m_b(\xi_b\ddot{\eta}_b-\eta_b\ddot{\xi}_b)=k^2 m_a m_b\frac{\xi_b(\eta_a-\eta_b)-\eta_b(\xi_a-\xi_b)}{r^3}=$$

$$=k^2 m_a m_b\frac{\xi_b\eta_a-\eta_b\xi_a}{r^3}. \tag{65}$$

Правые части обоих уравнений (64) и (65) отличаются только знаком. Отсюда, складывая эти уравнения, получаем

$$m_a(\xi_a\ddot{\eta}_a-\eta_a\ddot{\xi}_a)+m_b(\xi_b\ddot{\eta}_b-\eta_b\ddot{\xi}_b)=0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и получить

$$m_a(\xi_a\dot{\eta}_a-\eta_a\dot{\xi}_a)+m_b(\xi_b\dot{\eta}_b-\eta_b\dot{\xi}_b)=c_3^*. \tag{66}$$

Тем же путем получаются два аналогичных интеграла:

$$m_a(\eta_a\dot{\zeta}_a-\zeta_a\dot{\eta}_a)+m_b(\eta_b\dot{\zeta}_b-\zeta_b\dot{\eta}_b)=c_1^*, \tag{67}$$

$$m_a(\zeta_a\dot{\xi}_a-\xi_a\dot{\zeta}_a)+m_b(\zeta_b\dot{\xi}_b-\xi_b\dot{\zeta}_b)=c_2^*. \tag{68}$$

В этом виде интегралы (66), (67) и (68) выражают постоянство моментов количества движения относительно трех координатных осей. С другой стороны, можно подчеркнуть, что эти интегралы имеют место в произвольной системе координат, в которой справедливы ньютоновы законы движения. Читателю предоставляется рассмотреть постоянные c_1^*, c_2^*, c_3^* в системе координат с началом в центре масс, а также сравнить интегралы, относящиеся к этому случаю, с интегралами площадей (19), полученными в проблеме относительного движения.

Формулы, выведенные в предыдущих разделах, дают возможность определить положение в орбите при относительном движении для любого момента времени в системе координат, плоскость $\overline{xy}$ которой совпадает с плоскостью орбиты, а ось x направлена в перигелий. Предполагается, что известны три элемента a, e, l_0 и что, кроме того, дан параметр $\mu=k^2(m_a+m_b)$.

Требования практических вычислений идут значительно дальше. Мы должны разработать методику для определения положения в системе координат, имеющей то же начало m_a, что и система $\overline{xy}$, но ориентированной произвольным образом. В проблемах планетного движения встречаются два частных случая.

19. Координаты, отнесенные к эклиптике. Обозначим координаты через $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$, и пусть плоскость $x^{(e)}y^{(e)}$ совпадает с эклиптикой для заданной даты, например 1950,0, а ось $x^{(e)}$ направлена в среднюю точку весеннего равноденствия для той же даты.

Для удобства дальнейших приложений мы будем рассматривать более общий случай, когда координата $\bar{z}$ не обязательно равна нулю. Переход от $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ к $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ можно совершить посредством линейного преобразования

$$\begin{aligned}x^{(e)}&=P_x^{(e)}\bar{x}+Q_x^{(e)}\bar{y}+R_x^{(e)}\bar{z},\\ y^{(e)}&=P_y^{(e)}\bar{x}+Q_y^{(e)}\bar{y}+R_y^{(e)}\bar{z},\\ z^{(e)}&=P_z^{(e)}\bar{x}+Q_z^{(e)}\bar{y}+R_z^{(e)}\bar{z}.\end{aligned} \tag{69}$$

Необходимо найти девять векторных орбитальных постоянных для эклиптики как функции трех элементов I, Ω, ω, определяющих ориентировку системы $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ относительно системы $x^{(e)}y^{(e)}z^{(e)}$. Эти девять постоянных являются направляющими косинусами осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ относительно осей в эклипти-

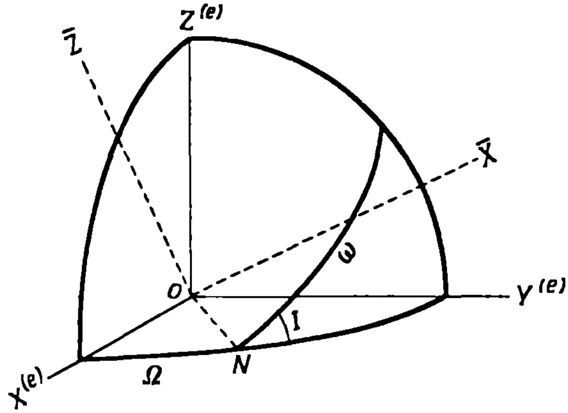

Рис. 3. Направляющие косинусы.

кальной системе; например, тремя направляющими косинусами оси $\bar{x}$ будут $P_x^{(e)}$, $P_y^{(e)}$, $P_z^{(e)}$.

Отсюда непосредственно вытекает, что последние соотношения можно обратить

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= P_x^{(e)}\, x^{(e)} + P_y^{(e)}\, y^{(e)} + P_z^{(e)}\, z^{(e)},\\
\bar{y} &= Q_x^{(e)}\, x^{(e)} + Q_y^{(e)}\, y^{(e)} + Q_z^{(e)}\, z^{(e)},\\
\bar{z} &= R_x^{(e)}\, x^{(e)} + R_y^{(e)}\, y^{(e)} + R_z^{(e)}\, z^{(e)}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

и что будут иметь место следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
P_x^{(e)2} + Q_x^{(e)2} + R_x^{(e)2} &= 1,\\
P_x^{(e)2} + P_y^{(e)2} + P_z^{(e)2} &= 1,\\
P_x^{(e)}Q_x^{(e)} + P_y^{(e)}Q_y^{(e)} + P_z^{(e)}Q_z^{(e)} &= 0,\\
P_x^{(e)}P_y^{(e)} + Q_x^{(e)}Q_y^{(e)} + R_x^{(e)}R_y^{(e)} &= 0,
\end{aligned}
\tag{71}
$$

а также все остальные аналогичные соотношения, которые можно написать путем циклической перестановки x, y, z, P, Q, R.

Направляющие косинусы можно получить по формулам сферической тригонометрии при рассмотрении пересечений координатных плоскостей со сферой единичного радиуса с центром в m_a.

Допустим, что мы хотим получить направляющие косинусы осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ относительно оси $x^{(e)}$.

В сферическом треугольнике $x^{(e)} N \bar{x}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega$, $N\bar{x} = \omega$, $\measuredangle\, x^{(e)} N \bar{x} = 180° - I$ (рис. 3). Теорема косинусов дает

$$P_x^{(e)} = \cos \widehat{x^{(e)}\bar{x}} = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos I.$$

В сферическом треугольнике $x^{(e)}N\bar{y}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega$, $N\bar{y} = 90^\circ + \omega$, $\measuredangle\, x^{(e)}N\bar{y} = 180^\circ - I$, и теорема косинусов дает

$$Q_x^{(e)} = \cos \widehat{x^{(e)}\bar{y}} = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos I.$$

В сферическом треугольнике $x^{(e)}N\bar{z}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega$, $N\bar{z} = 90^\circ$, $\measuredangle\, x^{(e)}N\bar{z} = 90^\circ - I$; теорема косинусов дает

$$R_x^{(e)} = \cos \widehat{x^{(e)}\bar{z}} = \sin\Omega\sin I.$$

Остальные шесть направляющих косинусов можно получить аналогичным образом. Полная система девяти векторных орбитальных постоянных для эклиптики имеет вид

$$\begin{aligned}
P_x^{(e)} &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos I,\\
Q_x^{(e)} &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos I,\\
R_x^{(e)} &= \sin\Omega\sin I,\\
P_y^{(e)} &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos I,\\
Q_y^{(e)} &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos I,\\
R_y^{(e)} &= -\cos\Omega\sin I,\\
P_z^{(e)} &= \sin\omega\sin I,\\
Q_z^{(e)} &= \cos\omega\sin I,\\
R_z^{(e)} &= \cos I.
\end{aligned} \tag{72}$$

20. Координаты, отнесенные к экватору. Обозначим координаты через x, y, z, и пусть плоскость xy совпадает со средним экватором

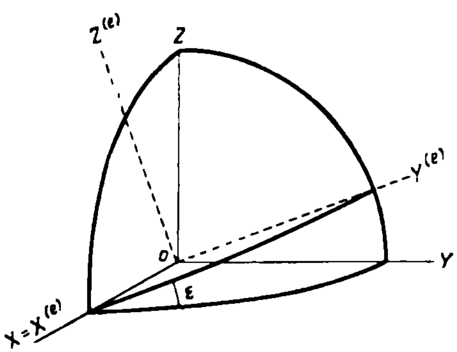

Рис. 4. Эклиптические и экваториальные координаты.

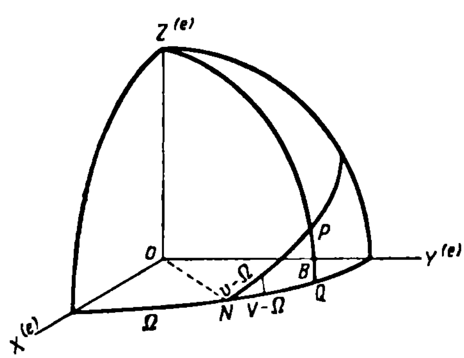

Рис. 5. Координаты в орбите и эклиптические координаты.

для заданной даты, а ось x направлена в среднюю точку весеннего равноденствия для той же даты. Стандартные экватор и равноденствие эпохи 1950,0 широко применяются для определения орбит малых планет и комет.

Если орбитальные элементы I', Ω', ω' непосредственно отнесены к стандартному экватору и равноденствию, то векторные орбитальные постоянные для экватора P_x, Q_x, R_x и т. д. можно получить по формулам для $P_x^{(e)}$, $Q_x^{(e)}$, $R_x^{(e)}$ и т. д. простой заменой I на I', Ω на Ω' и ω на ω'. Однако принято давать элементы I, Ω, ω, отнесенные к эклиптике. Если это эклиптика той же даты, что и экватор и равноденствие системы координат x, y, z, то очевидно, что переход от $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ к x, y, z можно совершить поворотом системы $x^{(e)}y^{(e)}z^{(e)}$ вокруг оси $x^{(e)}$ в направлении часовой стрелки на угол ε — наклонение эклиптики. Это преобразование имеет вид

$$x = x^{(e)},$$
$$y = y^{(e)}\cos\varepsilon - z^{(e)}\sin\varepsilon,$$
$$z = y^{(e)}\sin\varepsilon + z^{(e)}\cos\varepsilon.$$

Следовательно,

$$P_x = P_x^{(e)},$$
$$Q_x = Q_x^{(e)},$$
$$R_x = R_x^{(e)},$$
$$P_y = P_y^{(e)}\cos\varepsilon - P_z^{(e)}\sin\varepsilon,$$
$$Q_y = Q_y^{(e)}\cos\varepsilon - Q_z^{(e)}\sin\varepsilon,$$
$$R_y = R_y^{(e)}\cos\varepsilon - R_z^{(e)}\sin\varepsilon,$$
$$P_z = P_y^{(e)}\sin\varepsilon + P_z^{(e)}\cos\varepsilon,$$
$$Q_z = Q_y^{(e)}\sin\varepsilon + Q_z^{(e)}\cos\varepsilon,$$
$$R_z = R_y^{(e)}\sin\varepsilon + R_z^{(e)}\cos\varepsilon.$$

Поэтому полные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
P_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos I,\\
Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos I,\\
R_x &= \sin\Omega\sin I,\\
P_y &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos I)\cos\varepsilon - \sin\omega\sin I\sin\varepsilon,\\
Q_y &= (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos I)\cos\varepsilon - \cos\omega\sin I\sin\varepsilon,\\
R_y &= -\cos\Omega\sin I\cos\varepsilon - \cos I\sin\varepsilon,\\
P_z &= (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos I)\sin\varepsilon + \sin\omega\sin I\cos\varepsilon,\\
Q_z &= (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos I)\sin\varepsilon + \cos\omega\sin I\cos\varepsilon,\\
R_z &= -\cos\Omega\sin I\sin\varepsilon + \cos I\cos\varepsilon.
\end{aligned} \tag{73}$$

Поскольку в эллиптической орбите $\bar{z} = 0$, то формулы, фактически необходимые для вычисления положения, имеют вид

$$\begin{aligned}
x &= P_x\bar{x} + Q_x\bar{y},\\
y &= P_y\bar{x} + Q_y\bar{y},\\
z &= P_z\bar{x} + Q_z\bar{y}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Нередко непосредственно в эти выражения вводят эксцентрическую аномалию. Если мы определим величины $A_x, \ldots, B_x, \ldots$ формулами

$$
\begin{aligned}
A_x &= aP_x, & B_x &= a\sqrt{1-e^2}\,Q_x,\\
A_y &= aP_y, & B_y &= a\sqrt{1-e^2}\,Q_y,\\
A_z &= aP_z, & B_z &= a\sqrt{1-e^2}\,Q_z,
\end{aligned}
\tag{75}
$$

то прямоугольные экваториальные координаты можно также получить по формулам

$$
\begin{aligned}
x &= A_x(\cos u - e) + B_x \sin u,\\
y &= A_y(\cos u - e) + B_y \sin u,\\
z &= A_z(\cos u - e) + B_z \sin u.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Поскольку экваториальные векторные постоянные являются направляющими косинусами, то между этими постоянными справедливы те же соотношения, что и между эклиптикальными постоянными. Соответствующие соотношения между постоянными A и B будут

$$
\begin{aligned}
A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 &= a^2,\\
B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 &= a^2(1-e^2),\\
A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z &= 0.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Иногда важно иметь выражения для производных, аналогичные формулам (76). Это требует выражения $\dot{x}$, $\dot{y}$ через эксцентрическую аномалию. При помощи соотношения

$$\dot{u} = \frac{an}{r} = \frac{n}{1-e\cos u}$$

получаем

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -a\sin u\dot{u} = -\frac{a^2n}{r}\sin u = -\frac{an\sin u}{1-e\cos u},\\
\dot{y} &= a\sqrt{1-e^2}\cos u\dot{u} = \frac{a^2n}{r}\sqrt{1-e^2}\cos u = \frac{an\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{an}{r}(-A_x\sin u + B_x\cos u),\\
\dot{y} &= \frac{an}{r}(-A_y\sin u + B_y\cos u),\\
\dot{z} &= \frac{an}{r}(-A_z\sin u + B_z\cos u).
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Крайне необходимо подчеркнуть, что n должно быть выражено в радианах за единицу времени и что единица времени, используемая при выражении производных, должна быть той же, что и употребляемая в n.

21. Введение матриц. Выражения для векторных орбитальных постоянных через элементы обнаруживают настолько яркую правильность в структуре, что нетрудно придумать эффективную схему для вычислений. Тем не менее преимуществами обладает другая методика, избегающая применения сферической тригонометрии вообще. Эта методика связана с применением матриц, введенных в математическую литературу известным английским математиком Кэли. Матричная алгебра является важной ветвью математики. Мы не будем рассматривать ее здесь по существу, а только изложим то, что является необходимым для удобного преобразования координат.

Для наших целей матрицу следует рассматривать как прямоугольную таблицу — набор чисел (обозначаемых здесь символами), с которой производятся операции по простым правилам.

Пусть заданы две матрицы:

$$a=\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix}, \qquad b=\begin{Vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{Vmatrix},$$

где верхний индекс у любого элемента означает строку, а нижний индекс — столбец.

Произведение ab определяется как

$$c=ab=\begin{Vmatrix} a_1^1b_1^1+a_2^1b_1^2+a_3^1b_1^3 & a_1^1b_2^1+a_2^1b_2^2+a_3^1b_2^3 & a_1^1b_3^1+a_2^1b_3^2+a_3^1b_3^3 \\ a_1^2b_1^1+a_2^2b_1^2+a_3^2b_1^3 & a_1^2b_2^1+a_2^2b_2^2+a_3^2b_2^3 & a_1^2b_3^1+a_2^2b_3^2+a_3^2b_3^3 \\ a_1^3b_1^1+a_2^3b_1^2+a_3^3b_1^3 & a_1^3b_2^1+a_2^3b_2^2+a_3^3b_2^3 & a_1^3b_3^1+a_2^3b_3^2+a_3^3b_3^3 \end{Vmatrix},$$

т. е. если общий элемент матрицы a обозначен через a_k^j, общий элемент b — через b_k^j, общий элемент c — через c_k^j, то общий элемент матрицы-произведения ab равен

$$c_k^j=\sum_p a_p^j b_k^p. \tag{79}$$

Существенной особенностью является то, что строки матрицы a умножаются на столбцы матрицы b.

Не обязательно, чтобы две перемножаемые матрицы имели одинаковое число строк и столбцов, но необходимо, чтобы матрица a имела столько столбцов, сколько строк у матрицы b. Таким образом,

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1^1b_1^1+a_2^1b_1^2 \\ a_1^2b_1^1+a_2^2b_1^2 \\ a_1^3b_1^1+a_2^3b_1^2 \end{Vmatrix},$$

т. е. произведение ab неизменно имеет столько же строк, что и матрица a, и столько же столбцов, сколько их у матрицы b. Если число столбцов матрицы a отлично от числа строк матрицы b, то произведение ab неопределенно. Легко может случиться так, что произведение ab может быть определенным, тогда как ba неопределенно. Даже когда и ab, и ba определенны, они, вообще говоря, отличны друг от друга, т. е. умножение матриц в общем случае не коммутативно.

Если строки и столбцы матрицы взаимно переменить местами, то новая матрица называется транспонированной по отношению к старой. Матрица, транспонированная по отношению к a, обозначается через a'. Таким образом, если

$$a=\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{Vmatrix}, \quad \text{то } a'=\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{Vmatrix}.$$

Хотя умножение матриц в общем случае не коммутативно, оно ассоциативно, как и в обычной алгебре, т. е.

$$abc = (ab)\,c = a\,(bc).$$

22. Изменение порядка произведений матриц. В последующих приложениях часто будет удобным изменить порядок в произведении матриц. Можно проверить посредством правила умножения, что

$$ab = (b'a')', \tag{80}$$

$$abc = (c'b'a')' = (b'a')'\,c = a\,(c'b')' = [(bc)'\,a']' = [c'\,(ab')]'. \tag{81}$$

Применяя эти правила, можно перемножать матрицы в любом порядке, который оказывается удобным, при условии, конечно, что количества строк и столбцов таковы, что умножение возможно.

23. Матрицы поворота. Пусть даны две декартовы системы координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и x', y', z', имеющие общее начало, и допустим, что известны направляющие косинусы. Тогда

$$\begin{aligned} x' &= P'_x\bar{x} + Q'_x\bar{y} + R'_x\bar{z},\\ y' &= P'_y\bar{x} + Q'_y\bar{y} + R'_y\bar{z},\\ z' &= P'_z\bar{x} + Q'_z\bar{y} + R'_z\bar{z}. \end{aligned} \tag{82}$$

Предположим, что система x', y', z' поворачивается против часовой стрелки вокруг оси x' на угол α, если смотреть со стороны положительного конца оси x'. Если новые координаты обозначить через x'', y'', z'', то можно написать

$$\begin{aligned} x'' &= P''_x\bar{x} + Q''_x\bar{y} + R''_x\bar{z},\\ y'' &= P''_y\bar{x} + Q''_y\bar{y} + R''_y\bar{z},\\ z'' &= P''_z\bar{x} + Q''_z\bar{y} + R''_z\bar{z}. \end{aligned} \tag{83}$$

Соотношения между координатами x', y', z' и x'', y'', z'' имеют вид

$$\begin{aligned} x'' &= x',\\ y'' &= y'\cos\alpha + z'\sin\alpha,\\ z'' &= -y'\sin\alpha + z'\cos\alpha. \end{aligned}$$

Если их подставить в левую часть формул (83), то при помощи (82) получится

$$\begin{aligned} P''_x &= P'_x,\\ P''_y &= P'_y\cos\alpha + P'_z\sin\alpha,\\ P''_z &= -P'_y\sin\alpha + P'_z\cos\alpha,\\ Q''_x &= Q'_x,\\ Q''_y &= Q'_y\cos\alpha + Q'_z\sin\alpha,\\ Q''_z &= -Q'_y\sin\alpha + Q'_z\cos\alpha,\\ R''_x &= R'_x,\\ R''_y &= R'_y\cos\alpha + R'_z\sin\alpha,\\ R''_z &= -R'_y\sin\alpha + R'_z\cos\alpha. \end{aligned}$$

Это преобразование можно совершить посредством умножения двух матриц:

$$\begin{Vmatrix} P''_x & P''_y & P''_z \\ Q''_x & Q''_y & Q''_z \\ R''_x & R''_y & R''_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Преобразование от x', y', z' к x'', y'', z'' дается формулой

$$\| x''y''z'' \| = \| x'y'z' \| \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix},$$

или, что равносильно,

$$\begin{Vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix}.$$

В последующем мы будем применять первую из этих взаимоисключающих форм. Условившись преобразуемые координаты писать слева от матрицы преобразования, мы будем обозначать последнюю через $\boldsymbol{p}(\alpha)$:

$$\boldsymbol{p}(\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix},$$

что соответствует положительному (против часовой стрелки, если смотреть из положительного конца оси) повороту вокруг оси x' на угол α.

Аналогично положительный поворот вокруг оси y' соответствует следующему преобразованию:

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha - z'\sin\alpha, \\ y'' &= y', \\ z'' &= x'\sin\alpha + z'\cos\alpha, \end{aligned}$$

или

$$\| x''y''z'' \| = \| x'y'z' \| \begin{Vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{Vmatrix},$$

и мы полагаем

$$\boldsymbol{q}(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Наконец, положительный поворот вокруг оси z' соответствует следующему преобразованию:

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y'' &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ z'' &= z', \end{aligned}$$

или

$$\| x''y''z'' \| = \| x'y'z' \| \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

и мы полагаем

$$\boldsymbol{r}(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\boldsymbol{p}(-\alpha) = \boldsymbol{p}'(\alpha), \quad \boldsymbol{q}(-\alpha) = \boldsymbol{q}'(\alpha), \quad \boldsymbol{r}(-\alpha) = \boldsymbol{r}'(\alpha).$$

24. Общие повороты координатных систем. Любой поворот какой угодно системы координат можно разложить на последовательность поворотов вокруг различных осей. Рассмотрим, например, преобразование координат в системе $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ к экваториальной системе x, y, z, рассмотренной в разд. 20. Это преобразование можно совершить следующим образом:

1. Поворот на угол $-\omega$ вокруг оси $\bar{z}$, $\boldsymbol{r}(-\omega)$,
2. Поворот на угол $-I$ вокруг оси x', $\boldsymbol{p}(-I)$,
3. Поворот на угол $-\Omega$ вокруг оси z'', $\boldsymbol{r}(-\Omega)$,
4. Поворот на угол $-\varepsilon$ вокруг оси $x^{(e)}$, $\boldsymbol{p}(-\varepsilon)$.

Тогда это преобразование имеет вид

$$\| xyz \| = \| \overline{xyz} \| \begin{Vmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix}.$$

В численных приложениях сначала перемножают последние четыре матрицы, получая векторные постоянные в матричной форме, которые затем используются так, как этого требует задача. Таким образом,

$$\begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Vmatrix} = \boldsymbol{r}(-\omega)\boldsymbol{p}(-I)\boldsymbol{r}(-\Omega)\boldsymbol{p}(-\varepsilon),$$

$$\| xyz \| = \| \overline{xyz} \| \begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Vmatrix}.$$

В качестве примера использования этих матриц поворота приводится вычисление поисковой эфемериды.

Вычисление эфемериды

Требуется вычислить поисковую эфемериду для периодической кометы Харрингтона, используя орбитальные элементы из I. A. U.

Circular No. 1713 и приведенные ниже:

$$\left.\begin{array}{llll} T & 1960\ \text{Июнь}\ 28{,}8327 & \omega & 232^\circ{,}8391 \\ e & 0{,}559273 & \Omega & 119{,}1327 \\ a & 3{,}590373 & I & 8{,}6838 \end{array}\right\}\ \text{Равноденствие 1950,0}$$

$$n = ka^{-3/2} = \frac{0{,}01720209895}{(3{,}590373)^{3/2}} = 0{,}002528553$$

$$n^\circ = 57^\circ{,}29577951 \times n = 0^\circ{,}1448754$$

$$e^\circ = 57{,}29577951 \times e = 32^\circ{,}0440$$

$$a\sqrt{1-e^2} = 3{,}590373 \times 0{,}828984 = 2{,}976360$$

$$\left\|\begin{matrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -0{,}60406 & -0{,}79694 & 0 \\ +0{,}79694 & -0{,}60406 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0{,}98854 & +0{,}15098 \\ 0 & -0{,}15098 & +0{,}98854 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} -0{,}48683 & +0{,}87349 & 0 \\ -0{,}87349 & -0{,}48683 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0{,}91744 & +0{,}39788 \\ 0 & -0{,}39788 & +0{,}91744 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} -0{,}60406 & -0{,}78781 & -0{,}12032 \\ +0{,}79604 & -0{,}59714 & -0{,}09120 \\ 0 & -0{,}15098 & +0{,}98854 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} -0{,}48683 & +0{,}87349 & 0 \\ -0{,}87349 & -0{,}48683 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0{,}91744 & +0{,}39788 \\ 0 & -0{,}39788 & +0{,}91744 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} +0{,}98222 & -0{,}14411 & -0{,}12032 \\ +0{,}13362 & +0{,}93682 & -0{,}09120 \\ +0{,}13188 & +0{,}07350 & +0{,}98854 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0{,}91744 & +0{,}39788 \\ 0 & -0{,}39788 & +0{,}91744 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} +0{,}98222 & -0{,}08434 & -0{,}16772 \\ +0{,}13362 & +0{,}94163 & +0{,}30897 \\ +0{,}11388 & -0{,}32589 & +0{,}93617 \end{matrix}\right\|.$$

Контроль:

$$\sum P^2 = \sum Q^2 = \sum R^2 = 1,$$

$$\sum PQ = \sum QR = \sum RP = 0,$$

$$
\| x,\ y,\ z \| = \| \bar{x},\ \bar{y},\ 0 \| \begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Vmatrix} =
$$

$$
= \| a(\cos u - e),\ a\sqrt{1-e^2}\sin u,\ 0 \| \begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Vmatrix} =
$$

$$
= \| \cos u - e,\ \sin u,\ 0 \| \begin{Vmatrix} aP_x & aP_y & aP_z \\ a\sqrt{1-e^2}\,Q_x & a\sqrt{1-e^2}\,Q_y & a\sqrt{1-e^2}\,Q_z \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} =
$$

$$
= \| \cos u - e,\ \sin u,\ 0 \| \begin{Vmatrix} +3{,}52653 & -0{,}30280 & -0{,}60220 \\ +0{,}39768 & +2{,}80266 & +0{,}91960 \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}
$$

$$
\| \xi,\ \eta,\ \zeta \| = \| \varrho\cos\alpha\cos\delta,\ \varrho\sin\alpha\cos\delta,\ \varrho\sin\delta \| =
$$

$$
= \| x,\ y,\ z \| + \| X,\ Y,\ Z \|,
$$

где X, Y, Z — геоцентрические экваториальные координаты Солнца — можно взять из «Astronomical Ephemeris». Тогда

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \eta/\xi, \\
\operatorname{tg}\delta &= \zeta/\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \\
\varrho &= \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \\
&= a(1 - e\cos u).
\end{aligned}
$$

t 1960	Июнь 5,0	Июнь 15,0	Июнь 25,0	Июль 5,0	Июль 15,0	Июль 25,0
$t-T$	—23,833	—13,833	—3,833	+6,167	+16,167	+26,167
l	—3,4528	—2,0041	—0,5553	+0,8934	+2,3422	+3,7910
u	—7,803	—4,540	—1,259	+2,028	+5,306	+8,563
$\cos u$	+0,9907	+0,9969	+0,9998	+0,9994	+0,9957	+0,9889
$\cos u-e$	+0,4314	+0,4376	+0,4405	+0,4401	+0,4364	+0,4296
$\sin u$	—0,1358	—0,0792	—0,0220	+0,0354	+0,0925	+0,1489
x	+1,4673	+1,5117	+1,5447	+1,5661	+1,5758	+1,5742
y	—0,5112	—0,3545	—0,1950	—0,0341	+0,1271	+0,2872
z	—0,3847	—0,3364	—0,2855	—0,2325	—0,1777	—0,1218
X	+0,2764	+0,1106	—0,0584	—0,2257	—0,3866	—0,5368
Y	+0,8957	+0,9264	+0,9311	+0,9095	+0,8625	+0,7911
Z	+0,3884	+0,4018	+0,4038	+0,3944	+0,3740	+0,3431
ξ	+1,7437	+1,6223	+1,4863	+1,3404	+1,1892	+1,0374
η	+0,3845	+0,5719	+0,7361	+0,8754	+0,9896	+1,0783
ζ	+0,0037	+0,0654	+0,1183	+0,1619	+0,1963	+0,2213
α	$0^h49^m{,}6$	$1^h17^m{,}6$	$1^h45^m{,}4$	$2^h12^m{,}6$	$2^h39^m{,}1$	$3^h04^m{,}4$
δ	+0°07′	+2°11′	+4°05′	+5°46′	+7°14′	+8°25′
ϱ	1,7856	1,7214	1,6628	1,6091	1,5595	1,5126
r	1,6007	1,5887	1,5829	1,5836	1,5909	1,6048

В перигелии $r = q = a\,(1-e) = 1{,}582376$.

25. Применение полярных координат. Для аналитических разложений полезно получить выражения для $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ через полярные координаты r и f в плоскости орбиты. В этих выражениях сохранятся элементы ориентации ω, Ω и I. Мы исходим из формул

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= P_x^{(e)} r\cos f + Q_x^{(e)} r\sin f, \\ y^{(e)} &= P_y^{(e)} r\cos f + Q_y^{(e)} r\sin f, \\ z^{(e)} &= P_z^{(e)} r\cos f + Q_z^{(e)} r\sin f, \end{aligned}$$

в которых вместо постоянных P и Q должны быть подставлены их явные выражения (72). Тогда мы найдем, что

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= (r\cos f\cos\omega - r\sin f\sin\omega)\cos\Omega - \\ &\quad - (r\cos f\sin\omega + r\sin f\cos\omega)\sin\Omega\cos I, \\ y^{(e)} &= (r\cos f\cos\omega - r\sin f\sin\omega)\sin\Omega + \\ &\quad + (r\cos f\sin\omega + r\sin f\cos\omega)\cos\Omega\cos I, \\ z^{(e)} &= (r\cos f\sin\omega + r\sin f\cos\omega)\sin I. \end{aligned}$$

Эти формулы можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= r\cos(f+\omega)\cos\Omega - r\sin(f+\omega)\sin\Omega\cos I, \\ y^{(e)} &= r\cos(f+\omega)\sin\Omega + r\sin(f+\omega)\cos\Omega\cos I, \\ z^{(e)} &= r\sin(f+\omega)\sin I. \end{aligned} \tag{84}$$

Используя тождества

$$\cos^2\frac{I}{2} + \sin^2\frac{I}{2} = 1, \quad \cos^2\frac{I}{2} - \sin^2\frac{I}{2} = \cos I,$$

можно в $x^{(e)}$ и $y^{(e)}$ произвести еще одну группировку членов и получить

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= r\cos^2\frac{I}{2}\cos(f+\omega+\Omega) + r\sin^2\frac{I}{2}\cos(f+\omega-\Omega), \\ y^{(e)} &= r\cos^2\frac{I}{2}\sin(f+\omega+\Omega) - r\sin^2\frac{I}{2}\sin(f+\omega-\Omega), \\ z^{(e)} &= r\sin I\sin(f+\omega). \end{aligned}$$

Часто оказывается полезным выразить аргументы через

истинную долготу в орбите $v = f+\omega+\Omega$;

долготу перигелия $\tilde{\omega} = \omega+\Omega$;

долготу восходящего узла Ω.

Тогда эти выражения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= r\cos^2\frac{I}{2}\cos v + r\sin^2\frac{I}{2}\cos(v-2\Omega), \\ y^{(e)} &= r\cos^2\frac{I}{2}\sin v - r\sin^2\frac{I}{2}\sin(v-2\Omega), \\ z^{(e)} &= r\sin I\sin(v-\Omega). \end{aligned} \tag{85}$$

Аргумент $f+\omega = v-\Omega$, входящий в $z^{(e)}$, называется аргументом широты.

Если B есть широта планеты, отсчитываемая от плоскости $x^{(e)}y^{(e)}$, то

$$z^{(e)} = r\sin B.$$

Сферический треугольник NPQ на сфере единичного радиуса дает

$$\sin B = \sin I \sin(f+\omega) = \\ = \sin I \sin(v-\Omega),$$

в согласии с выражением для $z^{(e)}$ в формулах (85).

Угол v отсчитывается как сумма дуг $x^{(e)}N+NP$, что является незначительным неудобством, которое можно устранить, выбирая в плоскости орбиты такую начальную точку отсчета O', что $O'N = x^{(e)}N = \Omega$. Использование начальной точки отсчета в плоскости орбиты распространено в некоторых формах планетных теорий. Однако в подобных случаях плоскость орбиты находится в постоянном движении, и определение начальной точки отсчета не является столь же простым делом, как приравнивание дуг $O'N$ и $x^{(e)}N$. Оно зависит от решения некоторого дифференциального уравнения.

26. Приведение к эклиптике. Наконец, может понадобиться получить истинные полярные координаты. В этом случае положение планеты можно определить тремя координатами: r, V, B, где V есть дуга $x^{(e)}Q$. Если наклонность мала, то очевидно, что и разность $V-v$ всегда мала. Эта величина известна под названием «приведение к эклиптике». Аналитическое решение этой задачи получается из сферического треугольника NPQ с помощью следующей формулы:

$$\operatorname{tg}(V-\Omega) = \cos I \operatorname{tg}(v-\Omega).$$

Положим для краткости $V-\Omega=p$, $v-\Omega=q$, и пусть

$$\cos I = \frac{1-\beta}{1+\beta},$$

или

$$\beta = \frac{1-\cos I}{1+\cos I} = \operatorname{tg}^2\frac{I}{2}.$$

Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} p = \frac{1-\beta}{1+\beta}\operatorname{tg} q.$$

Это уравнение рассматривается в гл. II и имеет решение

$$p-q = -\left(\beta\sin 2q - \frac{1}{2}\beta^2\sin 4q + \frac{1}{3}\beta^3\sin 6q - \dots\right)$$

или после подстановки первоначальных значений для p, q, β

$$V-v = -\operatorname{tg}^2\frac{I}{2}\sin 2(v-\Omega) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{I}{2}\sin 4(v-\Omega) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\frac{I}{2}\sin 6(v-\Omega) + \dots \tag{86}$$

Для малых значений I это выражение для приведения к эклиптике быстро сходится, и во многих приложениях требуются только один или два члена этого разложения.

27. Вычисление элементов по координатам и компонентам скорости в заданный момент времени. В разд. 20 по элементам орбиты были получены прямоугольные координаты и компоненты скорости. Часто необходимо решать обратную задачу: для определенной эпохи даны x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; требуется найти элементы орбиты.

Чтобы упростить вычисления, необходимо исключить из формул μ. Рассматривая уравнения (16), легко видеть, что это можно выполнить, используя вместо t такую переменную τ, что

$$\sqrt{\mu}\, dt = d\tau.$$

Тогда уравнения (16) принимают вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}, \tag{87}$$

и μ не может появиться ни в одном из результатов, полученных из этих уравнений. Поскольку переход от t к τ как к независимой переменной равносилен допущению $\mu = 1$, то все формулы относительного движения в задаче двух тел, выведенные в разд. 6—13, применимы к уравнениям (87) при условии, что сделана подстановка $\mu = 1$.

Для орбит астероидов и комет m_a представляет собой массу Солнца, которую принимают равной единице, а массу m_b полагают равной нулю; следовательно,

$$\mu = k^2.$$

Если единицей времени, в которой выражается t, являются средние солнечные сутки, то введение переменной τ равносильно употреблению в качестве единицы k^{-1} средних солнечных суток. Численное значение k дается в разд. 31. Если компоненты скорости получены с единицей времени, равной w средних солнечных суток, то их значения должны быть сначала разделены на wk или, с большей общностью, на $w\sqrt{\mu}$. В последующем предполагается, что $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ разделены на должный делитель и выражены в единице времени, необходимой для исключения μ из формул.

Задачу вычисления элементов удобно разделить на две части:

а) Вычисление элементов a, e, l_0, определяющих положение в плоскости орбиты относительно перигелия орбиты. Первый шаг заключается в вычислении для заданной даты t значений

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

Затем используются следующие соотношения:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2, \tag{88}$$

$$e \sin u = a^{-1/2} r\dot{r}, \tag{89}$$

$$e \cos u = rV^2 - 1, \tag{90}$$

$$l = u - e \sin u. \tag{91}$$

Среднее суточное движение определяется по формуле

$$n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2} \tag{92}$$

в общем случае или

$$n = ka^{-3/2} \tag{93}$$

для малых планет и комет. Наконец, соотношение

$$l_0 = l - n(t - t_0) \tag{94}$$

дает среднюю аномалию при $t = t_0$.

Уравнение (88) является интегралом живых сил (26) при $\mu = 1$, $C = -\mu/2a$. Уравнение (89) вытекает из (46); (90) получается из (45), записанного в виде

$$e\cos u = 1 - \frac{r}{a},$$

где r/a заменено на

$$\frac{r}{a} = 2 - rV^2,$$

что следует из (88).

Можно заметить, что интеграл площадей (25), который при $\mu = 1$ принимает следующий вид:

$$a(1 - e^2) = r^2V^2 - (r\dot{r})^2, \tag{95}$$

можно было бы использовать вместе с (88) для получения a и e. Неудобство этого пути состоит в том, что он привел бы к определению численного значения e по разности $1 - e^2$, которая плохо определяет e, если эксцентриситет мал. Применение (89) и (90) для определения e и u устраняет эту потерю значащих цифр.

б) Вычисление элементов ориентации ω, Ω, I. Постоянные A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z и, следовательно, векторные орбитальные постоянные P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z получаются по формулам

$$\begin{aligned} aP_x &= A_x = x(a/r)\cos u - \dot{x}a^{3/2}\sin u,\\ aP_y &= A_y = y(a/r)\cos u - \dot{y}a^{3/2}\sin u,\\ aP_z &= A_z = z(a/r)\cos u - \dot{z}a^{3/2}\sin u; \end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned} bQ_x &= B_x = x(a/r)\sin u + \dot{x}a^{3/2}(\cos u - e),\\ bQ_y &= B_y = y(a/r)\sin u + \dot{y}a^{3/2}(\cos u - e),\\ bQ_z &= B_z = z(a/r)\sin u + \dot{z}a^{3/2}(\cos u - e), \end{aligned} \tag{97}$$

где

$$b = a\cos\varphi = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Эти формулы вытекают из (76) и (78). Например, первые формулы каждой из указанных систем дают

$$A_x(\cos u - e) + B_x\sin u = x,$$

$$-A_x\sin u + B_x\cos u = \dot{x}ra^{1/2},$$

если в выражении для $\dot{x}$ множитель r/an заменен на $ra^{1/2}$. Решение относительно A_x, B_x дает формулы

$$A_x(1 - e\cos u) = x\cos u - \dot{x}ra^{1/2}\sin u,$$

$$B_x(1 - e\cos u) = x\sin u + \dot{x}ra^{1/2}(\cos u - e),$$

которые можно привести к виду уравнений (96), (97).

Наконец, элементы орбиты ω, Ω, I могут быть вычислены по векторным орбитальным постоянным посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} \sin I \sin\omega &= -P_y \sin\varepsilon + P_z \cos\varepsilon, \\ \sin I \cos\omega &= -Q_y \sin\varepsilon + Q_z \cos\varepsilon, \end{aligned} \tag{98}$$

которые дают I и ω, и

$$\begin{aligned} \sin\Omega &= (P_y \cos\omega - Q_y \sin\omega)\sec\varepsilon, \\ \cos\Omega &= P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega, \end{aligned} \tag{99}$$

дающих Ω. Эти соотношения вытекают из явных выражений (73) для векторных орбитальных постоянных.

Соотношения (77) можно использовать для контроля постоянных A и B, или соответствующие соотношения (71) — для контроля P и Q. Из них наиболее полезным является

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0.$$

Полный контроль элементов ω, Ω, I следует провести вычислением векторных постоянных в матричной форме (см. разд. 24), после того как найдены эти углы.

28. Точность элементов. Представляет интерес исследовать точность определения e и u из уравнений (89) и (90). Существует несомненная потеря точности, обусловленная тем обстоятельством, что оба эти уравнения содержат множителем эксцентриситет. Максимальное численное значение правых частей этих уравнений равно e. Следовательно, если e мало, то правые части будут иметь меньше значащих цифр, чем координаты и компоненты скорости, использованные при их получении. Эта потеря значащих цифр передается посредством $\operatorname{tg} u$ самому углу u.

Допустим, что правые части вычислены с точностью до шести десятичных знаков. Их максимальная погрешность равна, скажем, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$. Максимальная погрешность в $\operatorname{tg} u$ и в u равна поэтому $e^{-1}\varepsilon$. Например, если $e = 0{,}01$, то формулы (89) и (90) дают $\operatorname{tg} u$ с точностью только до четырех десятичных знаков, и неточность в u становится равной $5 \cdot 10^{-5}$ *рад* $= 0^\circ{,}003 = 10''$, тогда как неточность, обычно ожидаемая при использовании шести десятичных знаков, порядка $0''{,}1$.

Неточность в u порядка $e^{-1}\varepsilon$ вносится затем в l и влияет на любой угол, отсчитываемый от перигелия. Это является отражением неопределенности положения перигелия в случае круговых орбит и того, что степень определенности в положении перигелия, можно сказать, пропорциональна эксцентриситету орбиты. Однако это не влияет на точность, с которой положение планеты определяется в пространстве, как это можно проверить при помощи выражений

$$u = l + e \sin u, \quad r/a = 1 - e \cos u,$$

которые показывают, что отклонение от равномерного кругового движения выражается тригонометрическими функциями от u, имеющими эксцентриситет множителем. Тем не менее важно использовать u при вычислении l из уравнения (91) и при определении элементов ориентации (96), (97) с полным числом десятичных знаков, требуемым для этих элементов.

Аналогичная неточность встречается при вычислении значения ω из уравнений (98), если I мало́, и она вносится в определение Ω по формулам (99). Если либо e, либо I, или оба эти элемента малы, то использование полного числа значащих цифр в значениях u и ω обеспечит точное определение суммы углов $\Omega+\omega+l$ — средней долготы в орбите — независимо от того, что каждый из трех углов: Ω, ω, l — в отдельности известен со значительно меньшей точностью. Важность этих рассуждений можно иллюстрировать выражениями в полярных координатах (85).

29. Экваториальные постоянные. Из формул (84) без труда получаются соответствующие выражения для прямоугольных экваториальных координат:

$$x = r\cos(f+\omega)\cos\Omega - r\sin(f+\omega)\sin\Omega\cos I,$$
$$y = r\cos(f+\omega)\sin\Omega\cos\varepsilon + r\sin(f+\omega)(\cos\Omega\cos I\cos\varepsilon - \sin I\sin\varepsilon),$$
$$z = r\cos(f+\omega)\sin\Omega\sin\varepsilon + r\sin(f+\omega)(\cos\Omega\cos I\sin\varepsilon + \sin I\cos\varepsilon).$$

Эти формулы можно привести к виду

$$x = r\sin a\sin(A+f+\omega),$$
$$y = r\sin b\sin(B+f+\omega),$$
$$z = r\sin c\sin(C+f+\omega),$$

если определить $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ и A, B, C следующим образом:

$$\sin a\cos A = \cos\Omega,$$
$$\sin a\cos A = -\sin\Omega\cos I,$$
$$\sin b\sin B = \sin\Omega\cos\varepsilon,$$
$$\sin b\cos B = \cos\Omega\cos I\cos\varepsilon - \sin I\sin\varepsilon,$$
$$\sin c\sin C = \sin\Omega\sin\varepsilon,$$
$$\sin c\cos C = \cos\Omega\cos I\sin\varepsilon + \sin I\cos\varepsilon.$$

Наконец, если

$$A' = A+\omega,$$
$$B' = B+\omega,$$
$$C' = C+\omega,$$

то эти выражения принимают следующий вид:

$$x = r\sin a\sin(A'+f),$$
$$y = r\sin b\sin(B'+f),$$
$$z = r\sin c\sin(C'+f).$$

Эти формулы широко применялись в прошлом для вычислений с логарифмами. Постоянные $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A', B', C' называются экваториальными постоянными.

30. Выражения через начальные координаты и компоненты скорости. Пусть x_0, y_0, z_0 суть координаты и $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ — компоненты скорости при $t=t_0$ в относительном движении в задаче двух тел. Решение этой задачи имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Целью этого раздела является найти эти выражения с x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в качестве постоянных интегрирования.

Для коротких интервалов времени можно считать, что эти функции от времени могут быть разложены в ряды Тэйлора

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}_0(t - t_0)^2 + \ldots$$

с аналогичными выражениями для y и z.

Запишем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = -\mu x r^{-3}, \quad \ddot{y} = -\mu y r^{-3}, \quad \ddot{z} = -\mu z r^{-3}$$

в следующем виде:

$$\ddot{x} = F_1 x, \quad \ddot{y} = F_1 y, \quad \ddot{z} = F_1 z.$$

Тогда последовательным дифференцированием получим

$$\dddot{x} = \dot{F}_1 x + F_1\dot{x} = F_2 x + G_2\dot{x},$$

$$\ddddot{x} = \dot{F}_2 x + (F_2 + \dot{G}_2)\dot{x} + G_2\ddot{x} =$$

$$= (\dot{F}_2 + G_2F_1)x + (F_2 + \dot{G}_2)\dot{x} = F_3 x + G_3\dot{x}.$$

Эта последовательность производных может быть продолжена неограниченно. Те же функции F_p, G_p получаются для y и z. Подстановка в ряды Тэйлора дает

$$\begin{aligned} x &= f(t)\,x_0 + g(t)\,\dot{x}_0, \\ y &= f(t)\,y_0 + g(t)\,\dot{y}_0, \\ z &= f(t)\,z_0 + g(t)\,\dot{z}_0. \end{aligned} \qquad (100)$$

Из способа образования этих соотношений очевидно, что $f(t)$, $g(t)$ получаются как функции времени следующего вида:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j, \\ g(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (t - t_0)^j, \end{aligned} \qquad (101)$$

в которых коэффициенты a_j, b_j с самого начала выражены как функции от величины μr^{-3} и ее последовательных производных, вычисленных при $t = t_0$. Дифференцируя выражения (100) дважды, находим, что

$$\ddot{x} = \ddot{f}x_0 + \ddot{g}\dot{x}_0 =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}x = -\frac{\mu}{r^3}(fx_0 + g\dot{x}_0).$$

Таким образом, f и g должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\ddot{f} + \mu f r^{-3} = 0, \quad \ddot{g} + \mu g r^{-3} = 0.$$

Поэтому они являются частными решениями этих дифференциальных уравнений со следующими начальными условиями при $t=t_0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= +1, & g(0) &= 0, \\ \dot{f}(0) &= 0, & \dot{g}(0) &= +1, \end{aligned} \tag{102}$$

которые вытекают из выражений (100) и их первых производных.

Простой метод для получения разложений f и g в ряды по степеням разности $t-t_0$ требует сначала определения коэффициентов c_k в следующем разложении:

$$\frac{\mu}{r^3}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^k.$$

Коэффициенты c_k получаются повторным дифференцированием величины μr^{-3} при $t=t_0$. Все производные можно выразить через r_0, $\dot{r}_0$, используя соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r\dot{r}) &= \frac{d}{dt}(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}) = \\ &= \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z} = \\ &= V^2-\frac{\mu}{r}. \end{aligned}$$

Интеграл энергии дает

$$V^2=\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(r\dot{r})=\frac{\mu}{r}-\frac{\mu}{a}.$$

Для коэффициентов c_k получаются следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu r_0^{-3}, \\ c_1 &= -3\mu r_0^{-5}(r_0\dot{r}_0), \\ c_2 &= +\frac{15}{2}\mu r_0^{-7}(r_0\dot{r}_0)^2-\frac{3}{2}\mu^2 r_0^{-6}+\frac{3}{2}\mu^2 r_0^{-5}a^{-1}, \\ c_3 &= -\frac{35}{2}\mu r_0^{-9}(r_0\dot{r}_0)^3+8\mu^2 r_0^{-8}(r_0\dot{r}_0)-\frac{15}{2}\mu^2 r_0^{-7}a^{-1}(r_0\dot{r}_0), \\ c_4 &= +\frac{315}{8}\mu r_0^{-11}(r_0\dot{r}_0)^4-\frac{233}{8}\mu^2 r_0^{-10}(r_0\dot{r}_0)^2+\frac{105}{4}\mu^2 r_0^{-9}a^{-1}(r_0\dot{r}_0)^2+ \\ &\quad +2\mu^3 r_0^{-9}-\frac{31}{8}\mu^3 r_0^{-8}a^{-1}+\frac{15}{8}\mu^3 r_0^{-7}a^{-2}. \end{aligned}$$

Если этот ряд подставить в уравнения

$$\ddot{f}+\mu f r^{-3}=0, \quad \ddot{g}+\mu g r^{-3}=0,$$

заменяя f, g рядами (101), то получается следующее уравнение:

$$\sum (j+1)(j+2)a_{j+2}(t-t_0)^j = -\sum c_k (t-t_0)^k \sum a_j (t-t_0)^j.$$

Приравнивая коэффициенты при $(t-t_0)^j$ в обеих частях, получаем

$$a_{j+2} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)}[c_0 a_j + c_1 a_{j-1} + c_2 a_{j-2} + \ldots] \qquad (103)$$

и аналогично для g

$$b_{j+2} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)}[c_0 b_j + c_1 b_{j-1} + c_2 b_{j-2} + \ldots]. \qquad (104)$$

Значения a_0, a_1, b_0, b_1 непосредственно следуют из начальных условий (102) для f, g и их первых производных. В результате имеем

$$a_0 = +1,$$
$$a_1 = 0,$$
$$a_2 = -\frac{1}{2}\mu r_0^{-3},$$
$$a_3 = +\frac{1}{2}\mu r_0^{-4}\dot r_0,$$
$$a_4 = -\frac{1}{8}\mu^2 r_0^{-5}a^{-1} - \frac{5}{8}\mu r_0^{-5}\dot r_0^2 + \frac{1}{6}\mu^2 r_0^{-6},$$
$$a_5 = +\frac{3}{8}\mu^2 r_0^{-6}\dot r_0 a^{-1} + \frac{7}{8}\mu r_0^{-6}\dot r_0^3 - \frac{1}{2}\mu^2 r_0^{-7}\dot r_0,$$
$$a_6 = -\frac{1}{16}\mu^3 r_0^{-7}a^{-2} - \frac{7}{8}\mu^2 r_0^{-7}\dot r_0^2 a^{-1} - \frac{21}{16}\mu r_0^{-7}\dot r_0^4 + \frac{19}{120}\mu^3 r_0^{-8}a^{-1} + \frac{7}{6}\mu^2 r_0^{-8}\dot r_0^2 - \frac{7}{72}\mu^3 r_0^{-9},$$
$$b_0 = 0,$$
$$b_1 = +1,$$
$$b_2 = 0,$$
$$b_3 = -\frac{1}{6}\mu r_0^{-3}, \quad b_4 = +\frac{1}{4}\mu r_0^{-4}\dot r_0,$$
$$b_5 = -\frac{3}{40}\mu^2 r_0^{-5}a^{-1} - \frac{3}{8}\mu r_0^{-5}\dot r_0^2 + \frac{1}{12}\mu^2 r_0^{-6},$$
$$b_6 = +\frac{1}{4}\mu^2 r_0^{-6}\dot r_0 a^{-1} + \frac{7}{12}\mu r_0^{-6}\dot r_0^3 - \frac{7}{24}\mu^2 r_0^{-7}\dot r_0.$$

Примером полезности разложений функций f и g в ряды может служить проблема определения орбиты вновь открытого объекта. Вычисления дают гелиоцентрические координаты и компоненты скорости для даты, лежащей вблизи средней эпохи наблюдений. Следующим шагом могло бы быть определение элементов, например, методом, приведенным в разд. 27 этой главы. Однако часто крайне необходимым является вычисление эфемериды на период в несколько недель или месяцев. Очевидно, разложения функций f и g в ряды могут с успехом служить для этой цели. Это вычисление можно выполнить до определения всех элементов, за исключением большой полуоси, входящей в выражения для коэффициентов.

Еще одно применение эти ряды находят в начале численного интегрирования.

Форма, в которой даются коэффициенты a и b, делает ряды для f и g применимыми к любому коническому сечению. Если эти ряды применяются к эллиптической орбите, то может иметь преимущества модифицированная форма. Если ввести обозначение D вместо $d/n\,dt$, то дифференциальные уравнения для f и g можно написать в виде

$$D^2 f + \frac{a^3}{r^3} f = 0, \quad D^2 g + \frac{a^3}{r^3} g = 0.$$

Разложения в ряд Тэйлора превращаются в степенные ряды по степеням $l - l_0$, т. е. по степеням приращений средней аномалии вместо степеней разности $t - t_0$. В частности, разложение a^3/r^3 принимает вид

$$\frac{a^3}{r^3} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (l - l_0)^k.$$

Если теперь

$$p = \frac{a}{r_0}, \quad q = \frac{\dot{r}_0}{an},$$

то

$$\begin{aligned}
C_0 &= +p^3,\\
C_1 &= -3p^4 q,\\
C_2 &= +\frac{3}{2} p^5 (1 + 5q^2) - \frac{3}{2} p^6,\\
C_3 &= -\frac{5}{2} p^6 q (3 + 7q^2) + 8p^7 q,\\
C_4 &= +\frac{15}{8} p^7 (1 + 14q^2 + 21q^4) - \frac{1}{8} p^8 (31 + 233q^2) + 2p^9.
\end{aligned}$$

Выражения для этих членов легко проверить, если заметить, что

$$\begin{aligned}
Dp^j &= -jp^{j+1} q,\\
Dq^j &= jq^{j-1}(-p - pq^2 + p^2).
\end{aligned}$$

Точно такие же рекуррентные соотношения имеют место среди коэффициентов A, B, C в разложениях f и g, что и найденные для a, b, c. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
f = 1 &- \frac{1}{2} p^3 (l - l_0)^2 + \frac{1}{2} p^4 q (l - l_0)^3 +\\
&+ \left[-\frac{1}{8} p^5 (1 + 5q^2) + \frac{1}{6} p^6 \right] (l - l_0)^4 + \left[+\frac{1}{8} p^6 q (3 + 7q^2) - \frac{1}{2} p^7 q \right] (l - l_0)^5 +\\
&+ \left[-\frac{1}{16} p^7 (1 + 14q^2 + 21q^4) + \frac{1}{120} p^8 (19 + 140q^2) - \frac{7}{72} p^9 \right] (l - l_0)^6 + \ldots;\\
g = l - l_0 &- \frac{1}{8} p^3 (l - l_0)^3 + \frac{1}{4} p^4 q (l - l_0)^4 +\\
&+ \left[-\frac{3}{40} p^5 (1 + 5q^2) + \frac{1}{12} p^6 \right] (l - l_0)^5 +\\
&+ \left[+\frac{1}{12} p^6 q (3 + 7q^2) - \frac{7}{24} p^7 q \right] (l - l_0)^6 + \ldots .
\end{aligned}$$

Для круговых орбит $p = 1$ и $q = 0$, и эти разложения приводятся соответственно к разложениям $\cos(l - l_0)$ и $\sin(l - l_0)$.

В этой форме, кроме a, необходимо получить еще и $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$.

Для функций f и g можно вывести замкнутые выражения, используя их применимость также к системе координат X, Y в орбитальной плоскости, ось X которой направлена в перигелий. Тогда

$$X(t) = f(t)X_0 + g(t)\dot{X}_0,$$
$$Y(t) = f(t)Y_0 + g(t)\dot{Y}_0.$$

Решением этих уравнений относительно f и g является

$$f(t) = G^{-1}(X\dot{Y}_0 - Y\dot{X}_0),$$
$$g(t) = G^{-1}(YX_0 - XY_0),$$

где

$$G = X_0\dot{Y}_0 - Y_0\dot{X}_0 = [\mu a(1-e^2)]^{1/2} = na^2(1-e^2)^{1/2} = nab.$$

Теперь удобно выразить f и g через эксцентрическую аномалию, используя формулы

$$X = a(\cos u - e), \quad \dot{X} = -an\sin u\,(1 - e\cos u)^{-1},$$
$$Y = a(1-e^2)^{1/2}\sin u, \quad \dot{Y} = +an(1-e^2)^{1/2}\cos u\,(1-e\cos u)^{-1}.$$

Пусть u_0 есть значение эксцентрической аномалии при $t = t_0$, а u — ее значение при $t = t$. Тогда легко найти, что

$$X\dot{Y}_0 - Y\dot{X}_0 = abn[\cos(u-u_0) - e\cos u_0](1 - e\cos u)^{-1},$$
$$YX_0 - XY_0 = ab[\sin(u-u_0) - e(\sin u - \sin u_0)].$$

В результате получается

$$f = \frac{\cos(u-u_0) - e\cos u_0}{1 - e\cos u_0} = 1 - \frac{1-\cos(u-u_0)}{1-e\cos u_0},$$

$$g = \frac{\sin(u-u_0) - e(\sin u - \sin u_0)}{n} = t - t_0 - \frac{u - u_0 - \sin(u-u_0)}{n}.$$

31. Гауссова постоянная. В разд. 2 было отмечено, что численное значение гравитационной постоянной зависит от выбранных единиц массы, времени и расстояния. Третий закон Кеплера

$$k^2(m_a + m_b) = n^2a^3,$$

или, полагая $n = 2\pi/P$,

$$k^2(m_a + m_b) = 4\pi^2\frac{a^3}{P^2}$$

является простым соотношением между массой, временем и расстоянием, которое можно с успехом использовать в практических приложениях формул эллиптического движения, чтобы найти любую из этих трех величин, если известны две остальные. Можно было бы выбрать единицы массы, времени и расстояния произвольным образом, а затем определить k из наблюдений. В частности, может показаться логичным принять за эти единицы грамм, сантиметр и эфемеридную секунду, как это сделано в физике. Однако подобный выбор единиц оказался бы исключительно неудобным. Если бы в качестве единицы массы был взят грамм, то сначала необходимо было бы определить массу Земли в граммах (что является геофизической, а не астрономической задачей), а затем выразить при помощи полученного значения массы остальных небесных тел. Результат содержал бы большое количество цифр, а пользы от этого не получилось бы никакой: в небесной механике нет ни одной практической задачи, требующей знания массы какого-либо тела в граммах. Еще бо́льшие трудности встретились бы с единицей расстояния. Расстояния между телами в солнечной системе не могут быть измерены непосредственно в сантиметрах с высокой точностью. Например, расстояние от Земли до Солнца в сантиметрах известно только с точностью до трех или четырех значащих цифр и не является результатом непосредственных измерений, а выведено при помощи сложных вычислений.

Поэтому исключительно в целях удобства эти единицы выбираются так, чтобы массы, промежутки времени и расстояния, связанные с астрономическими задачами, можно было легко измерить и выразить. В большинстве приложений небесной механики к движениям тел в солнечной системе за единицу массы выбрана масса Солнца и все остальные массы выражаются в ее долях. Таким образом, если m_a есть масса Солнца, то мы принимаем $m_a = 1$ и пишем $m = m_b/m_a$. Тогда

$$k^2(1+m) = n^2a^3.$$

В качестве единицы времени выбраны эфемеридные сутки, так как периоды обращений тел в солнечной системе легко и точно можно измерить в эфемеридных сутках. Таким образом, в выражении третьего закона Кеплера P обычно измеряется в эфемеридных сутках, а n — в радианах за эфемеридные сутки.

Далее, в силу трудности измерения расстояний, расстояние не определяется в абсолютных физических единицах или каких-нибудь произвольных единицах, а вместо этого произвольным образом выбирается k. Это значение k, равное 0,017 202 098 950 000 000, известно как *гауссова постоянная*. Поэтому единица расстояния является производной единицей, полученной из гауссовой постоянной и единиц массы и времени. Она называется *астрономической единицей* и в сокращенной записи часто обозначается как а. е. Тогда размерность k равна $M^{-1/2}L^{3/2}T^{-1}$.

Важно помнить, что определение астрономической единицы дается третьим законом Кеплера при оговоренном численном значении k, массе Солнца в качестве единицы массы и эфемеридных сутках в качестве единицы времени. Часто утверждают, что астрономическая единица является расстоянием от Солнца до тела бесконечно малой массы, обращающегося по круговой орбите с периодом, равным 365,24 + эфемеридных суток, но это лишь описание, а не определение. Даже в качестве описания это утверждение оставляет желать лучшего.

С исторической точки зрения интересно заметить, что Гаусс предполагал выбрать k таким образом, чтобы единица расстояния получилась равной половине большой оси орбиты Земли. Фактически же, поскольку Гаусс использовал значение для массы Земли, которое, как известно нам, занижено на 7%, то получается, что большая полуось земной орбиты, выведенная из третьего закона Кеплера с гауссовым значением k, равна 1,000 000 03 а. е. Большая путаница была вызвана небрежным употреблением слов «большая полуось» и «среднее расстояние» в астрономической литературе. В действительности третий закон Кеплера теряет свое геометрическое значение, когда в систему вводится третье тело заметной массы. В таких случаях этот закон следует рассматривать просто как определение единицы расстояния, каковым он фактически является. Например, из-за возмущающего влияния остальных планет эллипс, у которого большая полуось равна около 1,0000002 а. е., дает лучшее приближение к действительной орбите Земли, чем эллипс, выведенный из третьего закона Кеплера.

Замечания. Литература

Теория эпициклов Гиппарха явилась первой попыткой представить движения планет при помощи чисто математической теории независимо от физических причин, вызывающих эти движения. По форме теория эпициклов похожа на те разложения в тригонометрические ряды, которые до сих пор необходимы для представления движений планет и занимают много места в этой книге. Однако между эмпирическим представлением Гиппарха и его последователей и современным представлением посредством тригонометрических рядов, удовлетворяющих уравнениям движения, существует громадная разница. В теории Гиппарха амплитуды и фазовые постоянные всех эпициклов получались независимо друг от друга из наблюдений; в современных методах количество имеющихся в распоряжении постоянных строго ограниченно. До эпохи Кеплера было принято представлять годичный параллакс планеты одним эпициклом, а эксцентриситет ее орбиты — другим. В Рудольфовых таблицах Кеплера («Tabulae Rudolphinae»), изданных в 1627 г., уравнение центра впервые выводится при помощи эллиптической формулы, и этим был указан современный путь преобразования гелиоцентрических положений в геоцентрические.

Кеплер пришел к своей теории эллиптического движения путем анализа наблюдений Марса — единственной планеты с достаточно большим эксцентриситетом и быстрым движением, нуждавшейся в его эпоху более чем в одном эпицикле для представления эксцентриситета. Его знаменитому уравнению было посвящено в астрономии больше внимания, чем какому-нибудь другому.

Первое вполне точное рассмотрение эллиптического движения было выполнено Ньютоном в «Математических началах» в 1687 г. с применением геометрических методов. Подробное аналитическое рассмотрение было дано Эйлером в «Теории движения планет и комет» в 1744 г. Эйлер первым предпринял также вычисление взаимных возмущений Юпитера и Сатурна в соответствии с законом тяготения Ньютона.