Глава II

РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

1. Введение. Методы, изложенные в гл. I, достаточны для вычисления координат планеты в эллиптической орбите для любого момента времени по элементам этой орбиты. Для различных приложений в небесной механике необходимо иметь в распоряжении методы, которые позволят разложить координаты и функции от координат в эллиптической орбите в периодические ряды. При движении по эллипсу все конечные и непрерывные функции от координат после полного обращения тела возвращаются к исходным значениям. Поэтому такие функции разложимы в периодические ряды по любой непрерыно возрастающей угловой переменной, которая за время полного обращения тела увеличивается на 2π. Угловыми переменными, представляющими в этой связи особый интерес, являются средняя аномалия l, эксцентрическая аномалия u и истинная аномалия f. Они не являются единственными аргументами, которые могут быть рассмотрены; в некоторых приложениях используются другие аргументы. Функциями, которые представляются наиболее естественными для этой цели, являются или четные, или нечетные периодические функции от этих переменных, порождающие либо ряды косинусов, либо ряды синусов. Поскольку обычно удобнее оперировать степенными рядами, чем тригонометрическими разложениями, то полезно познакомиться с разложениями в экспоненциальной форме.

2. Разложения в ряд Фурье. Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π по x, разложение которой имеет вид

$$f(x) = a_0 + 2\sum_{1}^{\infty} a_p \cos px + 2\sum_{1}^{\infty} b_p \sin px. \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \\ a_p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx, \\ b_p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx, \quad p = +1,\ +2,\ \ldots\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $f(x)$ является четной периодической функцией, то

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + 2\sum_1^{\infty} a_p \cos px, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_p &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos px\,dx, \quad p = +1,\ +2,\ \ldots\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Если $f(x)$ является нечетной периодической функцией, то

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sum_1^{\infty} b_p \sin px, \\ b_p &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin px\,dx, \quad p = +1,\ +2,\ \ldots\infty \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть теперь в экспоненциальной форме

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_p E^{pix}, \tag{5}$$

где E есть основание натуральных логарифмов, а $i^2 = -1$; тогда

$$A_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,E^{-pix}\,dx, \quad p = -\infty\ldots+\infty. \tag{6}$$

Интегральные выражения для коэффициентов A_p в случае приложения к действительным функциям $f(x)$ следует рассматривать просто как сокращенную форму соответствующего выражения

$$A_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,(\cos px - i\sin px)\,dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_p &= a_p - ib_p, \\ A_{-p} &= a_p + ib_p, \qquad p = +1,\ +2,\ \ldots\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Если периодический ряд выражается в виде

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_p \cos px + \sum_{+\infty}^{+\infty} b'_p \sin px, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0, \\ a'_{-p} &= a'_p = a_p, \\ b'_{-p} &= -b'_p = -b_p, \end{aligned} \tag{9}$$

то для всех значений p, положительных, отрицательных и равных нулю, справедливо одно-единственное соотношение

$$A_p = a'_p - ib'_p. \tag{10}$$

Разложения по показательным функциям можно написать в особенно удобной форме, если ввести следующие обозначения:

$$E^{il} = \Lambda, \quad E^{iu} = \Upsilon, \quad E^{if} = \Phi, \tag{11}$$

так что имеем

$$2\cos l = \Lambda + \Lambda^{-1}, \quad 2\cos u = \Upsilon + \Upsilon^{-1}, \quad 2\cos f = \Phi + \Phi^{-1},$$
$$2i\sin l = \Lambda - \Lambda^{-1}, \quad 2i\sin u = \Upsilon - \Upsilon^{-1}, \quad 2i\sin f = \Phi - \Phi^{-1}.$$

3. **Выражение истинной аномалии через эксцентрическую аномалию.** Уравнение, связывающее истинную аномалию с эксцентрической, имеет вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u. \tag{12}$$

Для получения решения необходимо ввести β соотношением

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

так что получается

$$e = \sin\varphi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}, \tag{13}$$

$$\beta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right), \tag{14}$$

и уравнение (12) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \frac{1+\beta}{1-\beta}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u. \tag{15}$$

Поскольку β как функция от e получается как корень квадратного уравнения, то имеются два решения, второе из которых, а именно $\beta' = e^{-1}(1 + \sqrt{1-e^2})$, рассматриваться не будет. Очевидно, что если e мало, то β приблизительно равно $\frac{1}{2}e$, тогда как $\beta' = \beta^{-1}$ приблизительно равно $2e^{-1}$.

Для последующих приложений полезны следующие разложения степеней β по степеням e:

$$\beta = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \frac{5}{128}e^7,$$

$$\beta^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6,$$

$$\beta^3 = \frac{1}{8}e^3 + \frac{3}{32}e^5 + \frac{9}{128}e^7,$$

$$\beta^4 = \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6,$$

$$\beta^5 = \frac{1}{32}e^5 + \frac{5}{128}e^7,$$

$$\beta^6 = \frac{1}{64}e^6,$$

$$\beta^7 = \frac{1}{128}e^7.$$

Если уравнение (12) записано в экспоненциальной форме и использовано обозначение (11), то это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{\Phi^{1/2}-\Phi^{-1/2}}{\Phi^{1/2}+\Phi^{-1/2}}=\frac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{\Upsilon^{1/2}-\Upsilon^{-1/2}}{\Upsilon^{1/2}+\Upsilon^{-1/2}}, \tag{16}$$

что можно записать в следующем виде:

$$\frac{\Phi-1}{\Phi+1}=\frac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\frac{\Upsilon-1}{\Upsilon+1}. \tag{17}$$

Из этого уравнения можно выразить Φ через β и Υ по формуле

$$\Phi=\Upsilon\frac{1-\beta\Upsilon^{-1}}{1-\beta\Upsilon}. \tag{18}$$

Находя натуральные логарифмы обеих частей формулы (18), получаем

$$\begin{aligned} if &= iu+\ln(1-\beta\Upsilon^{-1})-\ln(1-\beta\Upsilon)=\\ &= iu-\left(\beta\Upsilon^{-1}+\frac{\beta^2}{2}\Upsilon^{-2}+\frac{\beta^3}{3}\Upsilon^{-3}+\ldots\right)+\\ &\qquad+\left(\beta\Upsilon+\frac{\beta^2}{2}\Upsilon^{2}+\frac{\beta^3}{3}\Upsilon^{3}+\ldots\right),\end{aligned}$$

$$f=u+2\left(\beta\sin u+\frac{\beta^2}{2}\sin 2u+\frac{\beta^3}{3}\sin 3u+\ldots\right). \tag{19}$$

Это соотношение можно обратить, поскольку уравнение (15) не меняется при замене β на $-\beta$ одновременно со взаимной заменой u на f. Следовательно, соотношение (19) принимает вид

$$u=f-2\left(\beta\sin f-\frac{\beta^2}{2}\sin 2f+\frac{\beta^3}{3}\sin 3f+\ldots\right). \tag{20}$$

Соотношением, соответствующим (18), является

$$\Upsilon=\Phi\frac{1+\beta\Phi^{-1}}{1+\beta\Phi}. \tag{21}$$

Уравнения, подобные уравнениям (12) или (15), встречаются также в совсем иных областях. Например, результат, полученный в этом разделе, использовался при выводе разложения в ряд приведения к эклиптике в разд. 26 гл. I.

4. Выражение средней аномалии через истинную аномалию. Чтобы получить выражение l через f, можно подставить в уравнение Кеплера выражение u через f или выражение Υ через Φ. Уравнение Кеплера

$$l=u-e\sin u \tag{22}$$

можно написать в виде

$$\begin{aligned} l &= u-\frac{e}{2i}(\Upsilon-\Upsilon^{-1})=\\ &= u+i\frac{\beta}{1+\beta^2}(\Upsilon-\Upsilon^{-1}).\end{aligned} \tag{23}$$

Из соотношения (21) мы получаем

$$\begin{aligned}\Upsilon-\Upsilon^{-1} &= \frac{\Phi+\beta}{1+\beta\Phi}-\frac{\Phi^{-1}+\beta}{1+\beta\Phi^{-1}}=\\ &= (1-\beta^2)\frac{\Phi-\Phi^{-1}}{(1+\beta\Phi)(1+\beta\Phi^{-1})}.\end{aligned}$$

Это соотношение можно написать в виде

$$\Upsilon - \Upsilon^{-1} = (1-\beta^2)\left(\frac{\Phi}{1+\beta\Phi} - \frac{\Phi^{-1}}{1+\beta\Phi^{-1}}\right)$$

и, разлагая правую его часть по теореме бинома, получить

$$\Upsilon - \Upsilon^{-1} = (1-\beta^2)(\Phi - \beta\Phi^2 + \beta^2\Phi^3 - \beta^3\Phi^4 + \ldots$$
$$- \Phi^{-1} + \beta\Phi^{-2} - \beta^2\Phi^{-3} + \beta^3\Phi^{-4} - \ldots) =$$
$$= 2i(1-\beta^2)(\sin f - \beta\sin 2f + \beta^2\sin 3f - \ldots).$$

Подстановка в (23) дает

$$l = u - \frac{2(1-\beta^2)}{1+\beta^2}(\beta\sin f - \beta^2\sin 2f + \beta^3\sin 3f - \ldots). \tag{24}$$

В это выражение можно подставить разложение (20), дающее u через f. Поскольку

$$\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \cos\varphi = \sqrt{1-e^2},$$

то окончательный результат можно написать в виде

$$l = f - 2\left[\beta(1+\cos\varphi)\sin f - \beta^2\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi\right)\sin 2f + \right.$$
$$\left. + \beta^3\left(\frac{1}{3} + \cos\varphi\right)\sin 3f - \ldots\right]. \tag{25}$$

5. Введение функций Бесселя. Хотя соотношения, полученные в предыдущем разделе, являются весьма полезными, более общее значение имеет разложение функций в периодические ряды по средней аномалии. Первой задачей, которую необходимо рассмотреть, является решение уравнения Кеплера относительно u в виде ряда Фурье по средней аномалии.

Из уравнения

$$u - l = e\sin u$$

очевидно, что разность $u-l$ является нечетной периодической функцией от u и, следовательно, от l. Поэтому она может быть разложена в ряд Фурье вида

$$e\sin u = 2\sum_{1}^{\infty} b_s \sin sl,$$

так что

$$b_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\sin u \sin sl\, dl.$$

Интегрированием по частям находим

$$b_s = \left[-\frac{1}{s\pi} e\sin u\cos sl + \frac{1}{s\pi}\int \cos sl\, d(e\sin u)\right]_{u=0}^{\pi}.$$

Первое слагаемое равно нулю, а второе посредством подстановки $u-l$ вместо $e\sin u$ можно представить в виде

$$b_s = \frac{1}{s\pi}\int_0^{\pi}\cos sl\, dl + \frac{1}{s\pi}\int_0^{\pi}\cos sl\, du.$$

Первый интеграл снова обращается в нуль, и после подстановки во втором интеграле $u - e\sin u$ вместо l получается

$$b_s = \frac{1}{s\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(su - se\sin u)\,du. \tag{26}$$

В соответствии с принятыми обозначениями для бесселевых функций положим

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(su - se\sin u)\,du, \tag{27}$$

так что

$$b_s = \frac{1}{s}J_s(se) \tag{28}$$

и

$$e\sin u = 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{s}J_s(se)\sin sl, \tag{29}$$

$$u = l + 2\sum_1^{\infty}\frac{1}{s}J_s(se)\sin sl. \tag{30}$$

Необходимо изучить подробно свойства бесселевых функций первого рода, определенных формулой (27); их можно записать в следующем виде:

$$J_s(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(s\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi. \tag{31}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{}{\iota}\int\limits_0^{2\pi}E^{-i(s\varphi - x\sin\varphi)}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(s\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin(s\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Очевидно, что для $\varphi = 2\pi - \varphi'$

$$\sin(s\varphi - x\sin\varphi) = \sin(2s\pi - s\varphi' + x\sin\varphi') = -\sin(s\varphi' - x\sin\varphi').$$

Следовательно, значение подынтегральной функции второго интеграла при $\varphi' = 2\pi - \varphi$ равно по величине, но обратно по знаку значению этой подынтегральной функции для φ. Поэтому результат интегрирования в пределах от 0 до π взаимно уничтожается с результатом интегрирования в пределах от π до 2π. Следовательно, выражением, эквивалентным формуле (31), является

$$J_s(x) = \frac{}{\iota}\int\limits_0^{2\pi}E^{-i(s\varphi - x\sin\varphi)}\,d\varphi. \tag{32}$$

Если его записать в виде

$$J_s(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E^{-is\varphi}\cdot E^{ix\sin\varphi}\,d\varphi, \tag{33}$$

то легко видеть из (33), что $J_s(x)$ является коэффициентом при $E^{si\varphi}$ в следующем разложении Фурье:

$$E^{ix\sin\varphi}=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}J_s(x)\,E^{si\varphi}. \tag{34}$$

Если теперь ввести z посредством

$$E^{i\varphi}=z,$$

так что

$$2i\sin\varphi=z-\frac{1}{z},$$

то разложение (34) можно переписать так:

$$E^{(x/2)(z-1/z)}=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}J_s(x)\,z^s. \tag{35}$$

Следовательно, $J_s(x)$ является коэффициентом при z^s в разложении функции

$$F(x,\ z)=E^{(x/2)(z-1/z)} \tag{36}$$

в ряд по положительным и отрицательным степеням z.

Этот ряд для $F(x,z)$ можно получить перемножением двух степенных рядов:

$$F(x,\ z)=E^{xz/2}\cdot E^{-x/2z}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{\alpha}}{\alpha!}z^{\alpha}\cdot\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^{\beta}\frac{(x/2)^{\beta}}{\beta!}z^{-\beta}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^{\beta}\frac{(x/2)^{\alpha+\beta}}{\alpha!\,\beta!}z^{\alpha-\beta}.$$

Подстановка

$$\alpha-\beta=s$$

дает

$$F(x,\ z)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^{\beta}\frac{(x/2)^{s+2\beta}}{(s+\beta)!\,\beta!}z^{s}= \tag{37}$$

$$=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}J_s(x)\,z^s. \tag{38}$$

В двойном ряде (37) в качестве нижнего предела суммирования по s выбрано $-\infty$ вместо предела, соответствующего $\alpha=0$, что было бы эквивалентно $s+\beta=0$. Поскольку для отрицательных значений $s+\beta$ факториал $(s+\beta)!$ бесконечен, то легко видеть, что распространение суммирования до $s=-\infty$ является допустимым. Это отсутствие членов, для которых сумма $s+\beta$ отрицательна, очевидно, равносильно тому, что следующий ряд по степеням $x/2$

$$J_s(x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^{\beta}\frac{(x/2)^{s+2\beta}}{(s+\beta)!\,\beta!} \tag{39}$$

содержит только положительные степени $x/2$, как это легко видеть из обоих степенных рядов, перемноженных для получения $F(x, z)$.

Для случая эллиптического движения x можно считать действительным, а s — целым.

Поскольку $F(x, z)$ не изменяется, если заменить x на $-x$ и z на $-z$, то из (38) вытекает, что

$$J_s(-x)=(-1)^s J_s(x). \tag{40}$$

Аналогично $F(x, z)$ не изменяется, если z заменить на $-z^{-1}$, что дает

$$J_{-s}(x)=(-1)^s J_s(x). \tag{41}$$

Комбинация соотношений (40) и (41) дает

$$J_{-s}(-x)=J_s(x). \tag{42}$$

Из этих соотношений вытекает, что необходимо рассматривать только положительные значения индекса s. Для положительных значений s ряд (39) можно написать в следующем виде:

$$J_s(x)=\frac{1}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^s\sum_{\beta=0}^{\infty}(-1)^{\beta}\frac{(x/2)^{2\beta}}{\beta!\,(s+1)(s+2)\ldots(s+\beta)}\,. \tag{43}$$

Отношение любого члена к предшествующему равно

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{(\beta+1)(s+\beta+1)}\,,$$

численное значение которого меньше единицы независимо от значения x при условии, что β выбрано достаточно большим. Следовательно, ряд (43) для J_s сходится абсолютно для всех значений x. Можно также прийти к выводу, что ряд (38) для $F(x, z)$ абсолютно сходится независимо от значения x для всех значений z, исключая 0 и ∞. Это следует из того, что $F(x, z)$ не имеет полюсов в комплексной плоскости, за исключением $z=0$ и $z=\infty$.

Дифференцирование формулы (35) по z дает

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}J_s(x)\,z^s=\sum_{-\infty}^{+\infty}sJ_s(x)\,z^{s-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{s-1} в обеих частях этого равенства, получаем

$$\frac{x}{2}\,[J_{s-1}(x)+J_{s+1}(x)]=sJ_s(x). \tag{44}$$

Дифференцирование (35) по x дает

$$\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}J_s(x)\,z^s=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_s'(x)\,z^s,$$

если ввести следующее обозначение:

$$J'_s(x) = \frac{d}{dx} J_s(x).$$

Приравнивание коэффициентов при z^s в обеих частях дает

$$\frac{1}{2}[J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x)] = J'_s(x). \tag{45}$$

Из (44) и (45) легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_{s-1}(x) &= \frac{s}{x} J_s(x) + J'_s(x), \\ J_{s+1}(x) &= \frac{s}{x} J_s(x) - J'_s(x). \end{aligned} \tag{46}$$

Замена s соответственно на $s-1$ и $s+1$ в (44) дает

$$J_s(x) + J_{s-2}(x) = \frac{2(s-1)}{x} J_{s-1}(x),$$

$$J_s(x) + J_{s+2}(x) = \frac{2(s+1)}{x} J_{s+1}(x),$$

или, с учетом (46),

$$\begin{aligned} J_{s-2}(x) &= \left[\frac{2s(s-1)}{x^2} - 1\right] J_s(x) + \frac{2(s-1)}{x} J'_s(x), \\ J_{s+2}(x) &= \left[\frac{2s(s+1)}{x^2} - 1\right] J_s(x) - \frac{2(s+1)}{x} J'_s(x). \end{aligned} \tag{47}$$

Этот процесс можно продолжить и прийти к выводу, что любая бесселева функция с аргументом x и индексом $s+k$, где k — произвольное положительное или отрицательное целое число, может быть выражена в виде линейной комбинации $J_s(x)$ и $J'_s(x)$, коэффициенты которой суть функции от этого аргумента x. В равной степени важным свойством является то, что $J_s(x)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Это дифференциальное уравнение можно получить дифференцированием соотношения (45) и исключением $J'_{s-1}(x)$ и $J'_{s+1}(x)$, а именно

$$J''_s(x) = \frac{1}{2}[J'_{s-1}(x) - J'_{s+1}(x)].$$

При помощи (45) это уравнение можно написать в виде

$$J''_s(x) = \frac{1}{4}[J_{s-2}(x) - 2J_s(x) + J_{s+2}(x)],$$

а учитывая (47), получаем

$$J''_s(x) = -\frac{1}{2} J_s(x) + \left(\frac{s^2}{x^2} - \frac{1}{2}\right) J_s(x) - \frac{1}{x} J'_s(x),$$

или

$$J''_s(x) + \frac{1}{x} J'_s(x) + \left(1 - \frac{s^2}{x^2}\right) J_s(x) = 0. \tag{48}$$

Это дифференциальное уравнение можно использовать для того, чтобы дать определение функций Бесселя. Математическая теория показывает, что, кроме функций Бесселя первого рода, введенных в предыдущем разделе, этому дифференциальному уравнению удовлетворяет еще один класс функций. Для приложений в этой главе необходимы только бесселевы функции первого рода с действительным аргументом x и целочисленным индексом s.

Интересное свойство функций $I_s(x)$ можно получить перемножением следующих двух рядов:

$$E^{(x/2)(z-1/z)} = J_0(x) + J_1(x)z + J_2(x)z^2 + J_3(x)z^3 + \ldots$$
$$- J_1(x)z^{-1} + J_2(x)z^{-2} - J_3(x)z^{-3} + \ldots;$$
$$E^{(-x/2)(z-1/z)} = J_0(x) - J_1(x)z + J_2(x)z^2 - J_3(x)z^3 + \ldots$$
$$+ J_1(x)z^{-1} + J_2(x)z^{-2} + J_3(x)z^{-3} + \ldots,$$

коэффициенты которых выражены как бесселевы функции аргумента $+x$ и положительного индекса при помощи соотношений (40), (41) и (42). Произведение этих двух рядов находим в виде

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + 2[J_3(x)]^2 + \ldots =$$
$$= [J_0(x)]^2 + 2\sum_1^{\infty}[J_s(x)]^2. \qquad (49)$$

Для действительного аргумента x все функции $J_s(x)$ при целочисленных значениях индекса действительны. Следовательно, отсюда вытекает, что ни один член в правой части (49) не может превосходить единицу, т. е.

$$|J_0(x)| \leqslant 1; \quad |J_s(x)| \leqslant 1/\sqrt{2}, \quad s \neq 0.$$

6. Приложение бесселевых функций. Функция E^{piu} разлагается в ряд Фурье по l следующим образом:

$$E^{piu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s E^{sil}. \qquad (50)$$

Коэффициенты A_s получаются из равенства

$$A_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E^{piu}E^{-sil}\,dl =$$
$$= \frac{i}{2\pi s}\int_0^{2\pi} E^{piu}d(E^{-sil}). \qquad (51)$$

Интегрирование по частям дает

$$A_s = \frac{i}{2\pi s}E^{-sil}E^{piu}\Big|_0^{2\pi} + \frac{p}{2\pi s}\int_0^{2\pi} E^{piu}E^{-sil}\,du.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и тогда можно написать

$$A_s = \frac{p}{2\pi s}\int_0^{2\pi} E^{-i[(s-p)u - se\sin u]}\,du.$$

Согласно определению (32), это можно записать в виде

$$A_s = \frac{p}{s}J_{s-p}(se), \quad s \neq 0, \qquad (52)$$

Для $s=0$ разложение (50) дает

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} E^{piu}\,dl,$$

или, поскольку

$$dl=(1-e\cos u)\,du=$$
$$=\left[1-\frac{e}{2}\left(E^{iu}+E^{-iu}\right)\right]du,$$

то

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(E^{piu}-\frac{e}{2}E^{(p+1)iu}-\frac{e}{2}E^{(p-1)iu}\right)du.$$

Показательные функции в подынтегральном выражении порождают члены, отличные от нуля, только если p, $p+1$ или $p-1$ равны нулю. Поэтому необходимо рассмотреть следующие различные случаи:

$$\begin{aligned} &p=0, && A_0=1;\\ &p=\pm 1, && A_0=-e/2;\\ &p\neq 0,\neq\pm 1, && A_0=0. \end{aligned}\tag{53}$$

Результаты (52), (53), дающие

$$E^{piu}=A_0+p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\,\frac{1}{s}J_{s-p}(se)\,E^{sil}$$

или (54)

$$\Upsilon^p=A_0+p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\,\frac{1}{s}J_{s-p}(se)\,\Lambda^s,$$

где символ $\sum'$ указывает, что отброшен член для $s=0$, можно применить к тригонометрическим разложениям. Поскольку разложение (50) можно написать в виде

$$\cos pu+i\sin pu=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_s\cos sl+i\sum_{-\infty}^{+\infty}A_s\sin sl,$$

то отсюда вытекает, что

$$\cos pu=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_s\cos sl=$$
$$=A_0+p\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s}J_{s-p}(se)\cos sl,\tag{55}$$

где постоянный член определяется посредством (53). Можно объединить члены с равными, но противоположными по знаку аргументами:

$$\cos pu=A_0+p\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{s}J_{s-p}(se)+\frac{1}{-s}J_{-s-p}(-se)\right]\cos sl=$$
$$=A_0+p\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[J_{s-p}(se)-J_{s+p}(se)\right]\cos sl,\tag{56}$$

где A_0 определяется условиями (53). Также имеем

$$\sin pu = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \sin sl = = p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{s} J_{s-p}(se) \sin sl, \tag{57}$$

что можно записать в виде

$$\sin pu = p \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} J_{s-p}(se) - \frac{1}{-s} J_{-s-p}(-se) \right] \sin sl = = p \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-p}(se) + J_{s+p}(se)] \sin sl. \tag{58}$$

Для $p = 1$ частными случаями являются разложения

$$\cos u = -\frac{e}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{s} J_{s-1}(se) \cos sl = = -\frac{e}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-1}(se) - J_{s+1}(se)] \cos sl,$$

которое при помощи (45) переходит в

$$\cos u = -\frac{e}{2} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} J'_s(se) \cos sl, \tag{59}$$

и

$$\sin u = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} J_{s-1}(se) \sin sl = = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-1}(se) + J_{s+1}(se)] \sin sl,$$

которое при помощи (44) можно написать в виде

$$\sin u = \frac{2}{e} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sl. \tag{60}$$

Эти результаты можно было бы получить, конечно, введением вместо разложения (50) тригонометрических рядов Фурье для $\cos pu$, $\sin pu$.

Разложения E^{piu}, $\cos pu$ и $\sin pu$ имеют большое значение в приложениях к проблемам небесной механики. Большинство функций от координат в эллиптическом движении легко выражается через периодические ряды по эксцентрической аномалии. Можно затем использовать ряды (54), (55), (57) для перехода к рядам, выраженным через среднюю аномалию. Рассмотрим, например,

$$f(u)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p E^{piu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_p \Upsilon^p. \qquad (61)$$

Применяя (54), это разложение можно представить в следующем виде:

$$f(u)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s E^{sil} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \Lambda^s, \qquad (62)$$

где

$$\begin{aligned} A &= {}_s\frac{1}{s}\sum_p pB_p J_{s-p}(se), \qquad s\neq 0,\\ A_0 &= B_0-\frac{e}{2}(B_1+B_{-1}). \end{aligned} \qquad (63)$$

Аналогичным образом при помощи (55) разложение

$$f(u)=a_0+2\sum_{p=1}^{\infty} a_p\cos pu \qquad (64)$$

дает

$$f(u)=c_0+2\sum_{s=1}^{\infty} c_s\cos sl, \qquad (65)$$

где

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{1}{s}\sum_{p=1}^{\infty} pa_p\left[J_{s-p}(se)-J_{s+p}(se)\right],\\ c_0 &= a_0-ea_1. \end{aligned} \qquad (66)$$

Также разложение

$$f(u)=2\sum_{p=1}^{\infty} b_p\sin pu \qquad (67)$$

с учетом (57) дает

$$f(u)=2\sum_{s=1}^{\infty} d_s\sin sl, \qquad (68)$$

$$d_s=\frac{1}{s}\sum_{p=1}^{\infty} pb_p\left[J_{s-p}(se)+J_{s+p}(se)\right]. \qquad (69)$$

Для дальнейших приложений будут полезны следующие разложения, полученные из общего ряда (43):

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\frac{x^8}{147456}-\ldots,$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}\left[1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{192}-\frac{x^6}{9216}+\ldots\right],$$

$$J_2(x)=\frac{x^2}{8}\left[1-\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{384}-\frac{x^6}{23040}+\ldots\right],$$

$$J_3(x)=\frac{x^3}{48}\left[1-\frac{x^2}{16}+\frac{x^4}{640}-\ldots\right],$$

$$J_4(x) = \frac{x^4}{384}\left[1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{960} - \ldots\right],$$

$$J_5(x) = \frac{x^5}{3840}\left[1 - \frac{x^2}{24} + \ldots\right],$$

$$J_6(x) = \frac{x^6}{46080}\left[1 - \frac{x^2}{28} + \ldots\right],$$

$$J_7(x) = \frac{x^7}{645120}[1 - \ldots],$$

$$J_0'(x) = 0 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} - \ldots,$$

$$J_1'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{192}x^4 - \frac{7}{9216}x^6 + \ldots\right],$$

$$J_2'(x) = \frac{x}{4}\left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{128}x^4 - \frac{1}{5760}x^6 + \ldots\right],$$

$$J_3'(x) = \frac{x^2}{16}\left[1 - \frac{5}{48}x^2 + \frac{7}{1920}x^4 - \ldots\right],$$

$$J_4'(x) = \frac{x^3}{96}\left[1 - \frac{3}{40}x^2 + \frac{1}{480}x^4 - \ldots\right],$$

$$J_5'(x) = \frac{x^4}{768}\left[1 - \frac{7}{120}x^2 + \ldots\right],$$

$$J_6'(x) = \frac{x^5}{7680}\left[1 - \frac{1}{21}x^2 + \ldots\right],$$

$$J_7'(x) = \frac{x^6}{92160}[1 - \ldots].$$

Теперь будет подробно решено несколько примеров.

а) Посредством (30) решение уравнения Кеплера было найдено в виде

$$u = l + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s}J_s(se)\sin sl. \tag{70}$$

При помощи разложений для $J_s(x)$, данных в настоящем разделе, находим с точностью до седьмой степени e

$$\begin{aligned} u = l &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 - \frac{1}{9216}e^7\right)\sin l + \\ &+ \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6\right)\sin 2l + \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \frac{243}{5120}e^7\right)\sin 3l + \\ &+ \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6\right)\sin 4l + \left(\frac{125}{384}e^5 - \frac{3125}{9216}e^7\right)\sin 5l + \\ &+ \frac{27}{80}e^6\sin 6l + \frac{16807}{46080}e^7\sin 7l. \end{aligned} \tag{71}$$

б) Отношение радиуса-вектора к большой полуоси

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

посредством (59) приводится к следующему виду:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s}J_s'(se)\cos sl, \tag{72}$$

или

$$\frac{r}{a}=1+\frac{1}{2}e^2+$$
$$+\left[-e+\frac{3}{8}e^3-\frac{5}{192}e^5+\frac{7}{9216}e^7\right]\cos l+$$
$$+\left[-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{3}e^4-\frac{1}{16}e^6\right]\cos 2l+\left[-\frac{3}{8}e^3+\frac{45}{128}e^5-\frac{567}{5120}e^7\right]\cos 3l+$$
$$+\left[-\frac{1}{3}e^4+\frac{2}{5}e^6\right]\cos 4l+\left[-\frac{125}{384}e^5+\frac{4375}{9216}e^7\right]\cos 5l-$$
$$-\frac{27}{80}e^6\cos 6l-\frac{16807}{46080}e^7\cos 7l. \tag{73}$$

Только что рассмотренные два случая являются примерами разложений, в которых коэффициенты можно получить в виде конечных выражений через бесселевы функции. Это верно только для очень ограниченного числа функций от координат в эллиптическом движении. Среди разложений, для которых в качестве коэффициентов выступают бесконечные ряды бесселевых функций, одним из важнейших является разложение f по l.

в) Уравнение центра. Если применить (67), то выражение (19) для f через u дает

$$f=u+2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\sum_{p=1}^{\infty}\beta^p\left[J_{s-p}(se)+J_{s+p}(se)\right]\sin sl.$$

Если ввести выражение u через l, то ряд для f примет вид

$$f=l+2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left\{J_s(se)+\sum_{p=1}^{\infty}\beta^p\left[J_{s-p}(se)+J_{s+p}(se)\right]\right\}\sin sl. \tag{74}$$

Расписывая это разложение в более явной форме, получим

$$f=l+\frac{2}{1}\{J_1(e)+\beta\left[J_0(e)+J_2(e)\right]+\beta^2\left[J_{-1}(e)+J_3(e)\right]+\ldots\}\sin l+$$
$$+\frac{2}{2}\{J_2(2e)+\beta\left[J_1(2e)\right]+J_3(2e)]+\beta^2\left[J_0(2e)+J_4(2e)\right]+\ldots\}\sin 2l+\ldots.$$

Бесселевы функции и различные степени β в этом ряде можно заменить выражениями по степеням e. Результат с точностью до седьмой степени относительно e имеет вид

$$f=l+\left(2e-\frac{1}{4}e^3+\frac{5}{96}e^5+\frac{107}{4608}e^7\right)\sin l+$$
$$+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\frac{17}{192}e^6\right)\sin 2l+\left(\frac{13}{12}e^3-\frac{43}{64}e^5+\frac{95}{512}e^7\right)\sin 3l+$$
$$+\left(\frac{103}{96}e^4-\frac{451}{480}e^6\right)\sin 4l+\left(\frac{1097}{960}e^5-\frac{5957}{4608}e^7\right)\sin 5l+$$
$$+\frac{1223}{960}e^6\sin 6l+\frac{47273}{32256}e^7\sin 7l. \tag{75}$$

г) Логарифм радиуса-вектора. Задача заключается в разложении

$$\ln\frac{r}{a}=\ln(1-e\cos u)=$$
$$=\ln\left(1-\frac{e}{2}\Upsilon-\frac{e}{2}\Upsilon^{-1}\right).$$

Чтобы разложить этот логарифм по положительным и отрицательным степеням Υ, введем C и x посредством соотношения

$$1-\frac{e}{2}\Upsilon-\frac{e}{2}\Upsilon^{-1}=C(1-x\Upsilon)(1-x\Upsilon^{-1})=$$
$$=C(1+x^2)-Cx\Upsilon-Cx\Upsilon^{-1}.$$

Это дает

$$Cx=\frac{e}{2},\qquad C(1+x^2)=1,$$

или

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{e}{2}.$$

Это то же соотношение, что и определяемое уравнением (13) между β и e. Отсюда

$$x=\beta=\frac{1}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$
$$C=\frac{e}{2\beta}=\frac{1}{1+\beta^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right).$$

Тогда задача сводится к разложению

$$\ln\frac{r}{a}=-\ln(1+\beta^2)+\ln(1-\beta\Upsilon)+\ln(1-\beta\Upsilon^{-1})=$$
$$=-\ln(1+\beta^2)-\beta\Upsilon-\frac{\beta^2}{2}\Upsilon^2-\frac{\beta^3}{3}\Upsilon^3-\ldots$$
$$-\beta\Upsilon^{-1}-\frac{\beta^2}{2}\Upsilon^{-2}-\frac{\beta^3}{3}\Upsilon^{-3}-\ldots=$$
$$=-\ln(1+\beta^2)-2\sum_1^\infty\frac{\beta^p}{p}\cos pu.$$

При помощи (64) разложение принимает вид

$$\ln\frac{r}{a}=-\ln(1+\beta^2)+e\beta-$$
$$-2\sum_{s=1}^\infty\frac{1}{s}\sum_{p=1}^\infty\beta^p\left[J_{s-p}(se)-J_{s+p}(se)\right]\cos sl. \tag{76}$$

Постоянный член этого разложения, выраженный через e, равен

$$+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}\right)+1-\sqrt{1-e^2}.$$

Развертывая этот ряд, получаем

$$\ln\frac{r}{a}=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{32}e^4+\frac{1}{96}e^6+\ldots$$
$$+\left(-e+\frac{3}{8}e^3+\frac{1}{64}e^5+\frac{127}{9216}e^7\right)\cos l+$$
$$+\left(-\frac{3}{4}e^2+\frac{11}{24}e^4-\frac{3}{64}e^6\right)\cos 2l+\left(-\frac{17}{24}e^3+\frac{77}{128}e^5-\frac{743}{5120}e^7\right)\cos 3l+$$
$$+\left(-\frac{71}{96}e^4+\frac{129}{160}e^6\right)\cos 4l+\left(-\frac{523}{640}e^5+\frac{10\,039}{9216}e^7\right)\cos 5l-$$
$$-\frac{899}{960}e^6\cos 6l-\frac{355\,081}{322\,560}e^7\cos 7l. \tag{77}$$

Важное свойство четырех функций, которые были разложены в ряды Фурье с кратными l в качестве аргументов и степенными рядами по e в качестве коэффициентов, заключается в том, что самая низкая степень e, входящая в коэффициент при синусе или косинусе, равна кратности l в аргументе этого члена. Степенные ряды идут далее по степеням e^2, так что в коэффициент при косинусе или синусе нечетного аргумента входят только нечетные степени e, а в коэффициенте члена с четным аргументом встречаются только четные степени e. Это свойство тесно связано со свойствами разложений бесселевых функций. Оно впервые было особо отмечено Даламбером. По этой причине Браун назвал его даламберовой характеристикой.

Легко видеть, что то же свойство относится и к функциям типа

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{im(f-l)}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos m(f-l), \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin m(f-l),$$

где n и m — положительные или отрицательные целые числа. С другой стороны, в разложении в ряды Фурье по средней аномалии функций типа

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{imf}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf$$

нарушится указанное соотношение между самой низшей степенью e в коэффициенте и кратностью l в аргументе. Однако можно обнаружить другие соотношения, как это видно из следующих примеров.

д) Разложение $(r/a)\cos f = \bar{x}/a = \cos u - e$. Ряд (59) для $\cos u$ дает, если пренебречь степенями e выше седьмой,

$$\begin{aligned}\frac{r}{a}\cos f = -\frac{3}{2}e &+ \left(1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6\right)\cos l + \\ &+ \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{16}e^5 - \frac{1}{180}e^7\right)\cos 2l + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 + \frac{567}{5120}e^6\right)\cos 3l + \\ &+ \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{5}e^5 + \frac{8}{45}e^7\right)\cos 4l + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4375}{9216}e^6\right)\cos 5l + \\ &+ \left(\frac{27}{80}e^5 - \frac{81}{140}e^7\right)\cos 6l + \frac{16807}{46080}e^6\cos 7l.\end{aligned}$$

е) Разложение $(r/a)\sin f = \bar{y}/a = \sqrt{1-e^2}\sin u$. Ряд (60) для $\sin u$ необходимо умножить на ряд

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots.$$

В результате, снова с точностью до седьмой степени e, получим

$$\begin{aligned}\frac{r}{a}\sin f = &\left(1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 - \frac{457}{9216}e^6\right)\sin l + \\ &+ \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \frac{1}{24}e^5 - \frac{1}{45}e^7\right)\sin 2l + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 + \frac{543}{5120}e^6\right)\sin 3l + \\ &+ \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{13}{30}e^5 + \frac{13}{72}e^7\right)\sin 4l + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4625}{9216}e^6\right)\sin 5l + \\ &+ \left(\frac{27}{80}e^5 - \frac{135}{224}e^7\right)\sin 6l + \frac{16807}{46080}e^6\sin 7l.\end{aligned}$$

Обширная табуляция рядов в эллиптическом движении была дана Леверрье[1]).

Основными рядами Леверрье являются ряды по кратным средней аномалии для

$$x = \frac{r}{a} - 1, \quad y = f - l,$$

из которых он выводит ряды для x^p, y^q; $p, q = 0, 1, \ldots, 7$, $p+q \leqslant 7$. Эти ряды в свою очередь используются для получения рядов для $x^p \sin hy$, $x^p \cos hy$ с коэффициентами, выраженными в виде полиномов относительно h.

На этой работе Лаверрье основаны чрезвычайно полезные таблицы разложений функций в теории эллиптического движения, составленные Кэли[2]). С точностью до седьмой степени e Кэли дает разложения

$$x^p \cos jf, \quad x^p \sin jf, \quad j,\ p = 0, 1, \ldots, 7,$$

$$\ln \frac{r}{a}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^q \cos jf, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^q \sin jf,$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, 5; \ q = -5, -4, \ldots, -1, +1, \ldots, +4.$$

Разложения Ньюкома[3]) фактически основаны на рядах для

$$\varrho = \ln \frac{r}{a}, \quad \eta = i\,(f - l),$$

расположенных по положительным и отрицательным степеням $\Lambda = E^{il}$. Тогда

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\beta = E^{\beta\varrho} = 1 + \beta\varrho + \frac{\beta^2\varrho^2}{2!} + \frac{\beta^3\varrho^3}{3!} + \ldots,$$

$$E^{\gamma\eta} = 1 + \gamma\eta + \frac{\gamma^2\eta^2}{2!} + \frac{\gamma^3\eta^3}{3!} + \ldots,$$

и окончательно получается

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\beta E^{\gamma\eta} = \sum_{m,\,q} \Pi_q^m(\beta, \gamma)\, e^m \Lambda^q,$$

$$m = 0, 1, \ldots, \infty, \quad m - |q| = 0, 2, 4, \ldots$$

Коэффициенты $\Pi_q^m(\beta, \gamma)$ являются полиномами относительно β и степени m как по β, так и по γ. Они играют важную роль в методе Ньюкома разложения возмущающей функции (см. гл. XIII).

7. Вычисление бесселевых функций. В принципе можно использовать формулу (44), чтобы получить бесселевы функции всех порядков, необходимых для данного аргумента, если только любые две из них известны. Однако этот путь, хотя и являющийся точным с алгебраической точки зрения, ведет к быстрому накоплению ошибок в последнем десятичном знаке, если его использовать последовательно несколько раз. При вычислительной работе предпочтительнее либо непосредственно применить формулу (43), либо определить значения этих функций интерполированием из таблиц бесселевых функций. Для систематиче-

---

[1]) U. J. J. Leverrier, Ann. Obs. Paris, 1, 343—357 (1855).
[2]) A. Cayley, Mem. Roy. Astron. Soc., 29, 191—306 (1861).
[3]) S. Newcomb, Astron. Papers, 5, 1—48 (1895).

ских вычислений, особенно с применением автоматических вычислительных машин, еще лучше получить $J_0(x)$ любым из двух указанных способов, а затем вычислить $J_s(x)$ последовательным умножением $J_0(x)$ на множители, которые очень легко вычисляются.

Обозначая отношение $J_s(x)$ к $J_{s-1}(x)$ через p_s, мы получаем из уравнения (44)

$$\frac{2s}{x}=\frac{1}{p_s}+p_{s+1},$$

или

$$p_s=\frac{1}{(2s/x-p_{s+1})},$$

откуда мы получаем следующую непрерывную дробь:

$$p_s=\cfrac{1}{\cfrac{2s}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2(s+1)}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2(s+2)}{x}-\ldots}}}.$$

Чтобы использовать эту непрерывную дробь в вычислениях, выведем p_s из равенства

$$\frac{1}{p_s}=r_s-p_{s+1},$$

где

$$r_s=\frac{s}{\frac{1}{2}x},$$

начиная с такого большого значения s, чтобы для первого приближения можно было бы положить $p_{s+1}=0$, и продолжая продвигаться вплоть до p_1. Тогда получим

$$J_1(x)=p_1J_0(x),$$
$$J_2(x)=p_2J_1(x),$$
$$J_3(x)=p_3J_2(x) \text{ и т. д.},$$

и формула (49) может быть использована как контроль. Наибольшее значение s, необходимое для первого приближения, можно определить путем проб, используя то наибольшее значение x, которое должно быть применено в данной задаче; тогда то же самое значение s будет достаточным для всех меньших значений x.

В качестве примера мы приводим в табл. 1 числа, необходимые для вычисления $J_s(e)$, где e есть эксцентриситет Марса, равный 0,0932 6685. Применяя (43), находим, что $J_0(e)=0{,}99782\,65057$.

Частичный контроль получается использованием соотношения (49), записанного в следующем виде:

$$[J_0(x)]^2\cdot[1+2(p_1^2+p_1^2p_2^2+p_1^2p_2^2p_3^2+\ldots)]=1.$$

Таблица 1

Вычисление $J_s(e)$

s	$r_s = 2s/e$	p_{s+1}	$J_s(e)$
11	235,8823 097	0,0	—
10	214,4384 634	0,00423 94	—
9	192,9946 171	0,00466 34	—
8	171,5507 707	0,00518 16169	—
7	150,1069 244	0,00582 93542	—
6	128,6630 780	0,00666 21766	0,00000 00000
5	107,2192 317	0,00777 26400	0,00000 00018
4	85,7753 8536	0,00932 73612	0,00000 01970
3	64,3315 3902	0,01165 96241	0,00001 68929
2	42,8876 9268	0,01554 72928	0,00108 65502
1	21,4438 4634	0,02332 51681	0,04658 27370
0	—	0,04668 42049	0,99782 65057

Этот частный пример дает

$$1 = 1{,}00000\,00000\,0$$

$$p_1^2 = 0{,}00217\,94149\,9 \qquad 2p_1^2 = 0{,}00435\,88299\,8$$

$$p_2^2 = 0{,}00054\,40634\,7 \qquad 2p_1^2p_2^2 = 23714\,8$$

$$p_3^2 = 0{,}00024\,17183\,1 \qquad 2p_1^2p_2^2p_3^2 = 5\,7$$

$$p_4^2 = 0{,}00013\,59468\,3 \qquad 2p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2 = 0$$

$$\text{Сумма} = [J_0(e)]^{-2} = 1{,}00436\,12020\,3$$

$$J_0(e) = 0{,}99782\,65057$$

в согласии до десятого десятичного знака со значением, полученным при помощи ряда.

В большинстве приложений необходимо также вычислять $J_s(2e)$, $J_s(3e)$ и т. д. Численная сходимость ряда для J_0 и процесса вычислений значений p_s остается удовлетворительной даже для больших значений аргумента, возникающих при высоких степенях e.

Рассмотрим теперь пример использования бесселевых функций для преобразования аргументов от эксцентрической аномалии к средней. При разложении в ряд a'/Δ, где $2a'$ есть большая ось орбиты Юпитера, а Δ — значение расстояния между Юпитером и Марсом (предполагая эллиптическое движение для обеих планет), находим следующие члены, вместе с соответствующими бесселевыми функциями, вычисленные со значением эксцентриситета Марса, равным 0,09326685, и необходимые для вычисления коэффициента при $\cos(l'-l)$ по формулам (55), (57). Все числа выражены в единицах восьмого десятичного знака (табл. 2). В этих выражениях символы со штрихами относятся к Юпитеру, а остальные — к Марсу. Перемножая попарно числа в строке и складывая их с произведениями, стоящими справа, мы получаем для коэффициента при $\cos(l'-l)$ значение, равное $+0{,}23531250$. Те же бесселевы функции будут достаточны для вычисления коэффициентов

Таблица 2

Члены в a'/Δ	Бесселевы функции	Произведения
$+396 \cos(l'+2u)$	$-2J_{-3}(-e) = -3379$	0
$+41206 \cos(l'+u)$	$-J_{-2}(-e) = -108655$	-45
$+2879796 \cos l'$	$0J_{-1}(-e) = 0$	0
$+23572402 \cos(l'-u)$	$J_0(-e) = +99782651$	$+23521168$
$-108643 \cos(l'-2u)$	$2J_1(-e) = -9316547$	$+10122$
$+1677 \cos(l'-3u)$	$3J_2(-e) = +325965$	$+5$
$-17 \cos(l'-4u)$	$4J_3(-e) = -6757$	0

при $\cos(jl'-l)$ и $\sin(jl'-l)$, где j есть любое целое число или нуль. Для остальных кратностей l понадобятся другие бесселевы функции.

8. Решение уравнения Кеплера. Численному решению уравнения Кеплера

$$l = u - e\sin u$$

относительно u при заданных значениях e и l было посвящено много внимания, что было естественным для одного из наиболее древних трансцендентных уравнений в астрономии, часто требующего решения. Были опубликованы сотни методов решения этого уравнения. Уравнение (70) может быть использовано для вычислительной работы в тех случаях, когда эксцентриситет мал. Здесь мы опишем два общих метода, достаточных для всех нужд практического вычислителя. Первым является метод дифференциального исправления, который особенно полезен, когда под рукой нет счетной машины.

По приближенному значению u, соответствующему заданным значениям e и l, более точное значение находится путем последовательных приближений. Мы обозначаем приближенное значение u через u_0, а начальную поправку к нему — через Δu_0, так что $u_0+\Delta u_0$ является лучшим приближением к u, чем u_0. Вычислим значение l, соответствующее u_0, из уравнения Кеплера и, называя его l_0, обозначим разность $l-l_0$ через Δl_0. Мы имеем строго

$$l_0 = u_0 - e\sin u_0.$$

Тогда, согласно теореме Тэйлора, отбрасывая квадраты и высшие степени Δu_0, получаем следующее приближенное уравнение:

$$\Delta l_0 = \frac{\partial l_0}{\partial u_0}\Delta u_0 = (1-e\cos u_0)\,\Delta u_0,$$

или

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta l_0}{1-e\cos u_0}.$$

Теперь положим $u_1 = u_0+\Delta u_0$; вычислим значение l, соответствующее u_1, и, называя его l_1, положим $l-l_1=\Delta l_1$. Тогда при помощи того же процесса, как и прежде, получим

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta l_1}{1-e\cos u_1},$$

и эту процедуру можно повторить сколь угодно большое число раз. Мы обнаружим, что последовательные значения Δu_j быстро уменьшаются, так что понадобится лишь несколько повторений.

В качестве первого приближения u_0 удобно использовать следующую сокращённую форму уравнения (70) или (71):

$$u = l + e\sin l + \frac{1}{2}e^2 \sin 2l.$$

В качестве численного примера мы приводим числа при вычислении u, когда точно $l = 30°$ и $e = 0{,}3$. Для удобства при пользовании тригонометрическими таблицами мы умножаем уравнения на число градусов в радиане, полагая, таким образом, 17,18873 вместо e и 2,57831 вместо $\frac{1}{2}e^2$. Однако при определении делителя выражения для Δu необходимо использовать само e. Таким образом, мы имеем

u_j	$\sin u_j$	l_j	Δl_j	$1 - e\cos u_j$	Δu_j
40°,82725	0,6537806	29°,58959	+0°,41041	0,77300	+0°,53093
41 ,35818	0,6607642	30 ,00048	−0 ,00048	0,775	−0 ,00062
41 ,35756	0,6607560	30 ,00000			

Если в распоряжении имеется настольная счетная машина, то цель будет достигнута гораздо быстрее при использовании другого метода, не требующего записи никаких чисел, если под рукой имеется таблица синусов для аргумента с десятичным делением градуса или в радианах. Если используется десятичное деление градуса, то умножим e на число градусов в радиане; тогда все углы будут выражены в градусах и десятичных долях градуса.

Напишем формулу

$$u = l + e\sin u.$$

Установим l в результирующем счетчике и e на клавиатуре. Затем повторными сложениями и вычитаниями к l добавляются или вычитаются из l различные кратности e до тех пор, пока не будет выполнено условие, что число, появляющееся в счетчике оборотов и дающее приближение к $\sin u$, равно синусу угла, набранного в результирующем счетчике и являющегося приближением к u. На каждом этапе необходимо посмотреть синус угла, набранного в результирующем счетчике, и увеличивать или уменьшать число в счетчике оборотов указанным образом. Для предыдущего примера можно привести следующие числа, стоящие на машине на последовательных этапах.

Счетчик оборотов	Результирующий счетчик	Счетчик оборотов	Результирующий счетчик
0,0	30,00000	0,6603	41,34972
0,5	38,59437	0,6607	41,35659
0,62	40,65701	0,66075	41,35745
0,652	41,20705	0,6607560	41,35756
0,6588	41,32394		

На практике к окончательному результату приходят гораздо быстрее, чем показывают вышеприведенные числа. Вычислитель быстро овладевает умением «взять в вилку», делая последовательные приближения, так что фактическое число приближений уменьшается до трех или четырех.

Любой из описанных методов применим к быстродействующей автоматической вычислительной машине, причем тригонометрические функции вычисляются в машине вместо того, чтобы считывать их с напечатанных таблиц. Как и в большинстве вычислений подобного рода, число необходимых последовательных приближений в значительной степени зависит от искусства вычислителя.

9. Решение уравнений движения в функции средней аномалии. В предыдущих разделах были получены разложения координат в эллиптическом движении в виде рядов Фурье, аргументами которых являются дуги, кратные средней аномалии, а коэффициенты выражаются рядами по степеням эксцентриситета. Теперь мы рассмотрим разложения координат, которые могут быть получены непосредственно из уравнений движения. Методика состоит в получении координат в виде рядов по степеням эксцентриситета, коэффициентами которых являются ряды Фурье по средней аномалии.

Уравнения движения планеты по орбите, плоскость которой совпадает с плоскостью отсчета, можно написать в полярных координатах в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= 0, \\ r^2\frac{dv}{dt} &= G. \end{aligned} \tag{78}$$

Этим уравнениям удовлетворяет круговая орбита радиуса a. Тогда угловое движение является равномерным и $v = \lambda = nt + \lambda_0$. Оба уравнения дают

$$\begin{aligned} \mu &= a^3n^2, \\ G_c &= a^2n, \end{aligned} \tag{79}$$

если через G_c обозначить значение постоянной интеграла площадей для круговой обиты радиуса a.

Рассмотрим затем некруговые орбиты с тем же периодом, т. е. орбиты со средним движением n и большой полуосью a. Введем

$$\begin{aligned} r &= a(1+\rho), \\ v - \lambda &= \mathcal{E}, \\ G &= G_c(1+\gamma) \end{aligned} \tag{80}$$

и используем в качестве независимой переменной

$$\lambda = nt + \lambda_0.$$

Уравнения, записанные в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r/a)}{d\lambda^2} - \frac{r}{a}\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2} &= 0, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{dv}{d\lambda} &= \frac{G}{a^2n}, \end{aligned} \tag{81}$$

если средний член в левой части первого уравнения представить следующим образом:

$$\frac{r}{a}\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2=\left(\frac{a}{r}\right)^3\frac{G^2}{a^4n^2}=$$
$$=\frac{(1+\gamma)^2}{(1+\varrho)^3},$$

можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\frac{d^2\varrho}{d\lambda^2}-\frac{(1+\gamma)^2}{(1+\varrho)^3}+\frac{1}{(1+\varrho)^2}=0,\\ \frac{dv}{d\lambda}=\frac{1+\gamma}{(1+\varrho)^2}.\end{gathered}\tag{82}$$

Для круговой орбиты эти уравнения удовлетворяются при

$$\varrho=\gamma=0.$$

Разложение по степеням ϱ и γ дает

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{d\lambda^2}+\varrho=3\varrho^2-6\varrho^3+10\varrho^4-\ldots\\ +\gamma(2-6\varrho+12\varrho^2-20\varrho^3+\ldots)+\\ +\gamma^2(1-3\varrho+6\varrho^2-\ldots),\end{aligned}\tag{83}$$

и, если уравнение центра $v-\lambda=\mathscr{E}$, то

$$\begin{aligned}\frac{d\mathscr{E}}{d\lambda}=-2\varrho+3\varrho^2-4\varrho^3+5\varrho^4-\ldots\\ +\gamma(1-2\varrho+3\varrho^2-4\varrho^3+\ldots).\end{aligned}\tag{84}$$

Будем считать ϱ и γ малыми величинами первого порядка. Пренебрегая вторыми степенями и произведениями этих величин в правых частях, положим

$$\frac{d^2\varrho_1}{d\lambda^2}+\varrho_1=2\gamma_1,$$
$$\frac{d\mathscr{E}_1}{d\lambda}=\gamma_1-2\varrho_1,$$

откуда последовательно получаем

$$\varrho_1=2\gamma_1-e\cos(\lambda-\tilde{\omega}),\tag{85}$$
$$\frac{d\mathscr{E}_1}{d\lambda}=-3\gamma_1+2e\cos(\lambda-\tilde{\omega}),$$
$$\mathscr{E}_1=-3\gamma_1\lambda+c_1+2e\sin(\lambda-\tilde{\omega}).\tag{86}$$

Это решение является совершенно общим; e и $\tilde{\omega}$ представляют собой две необходимые постоянные интегрирования уравнения для ϱ_1. Очевидно, что необходимо условие $\gamma_1=0$ для того, чтобы избежать члена, пропорционального λ, в разности $v_1-\lambda=\mathscr{E}_1$, которая должна выражаться периодической функцией от λ. Постоянная c_1 выбирается равной нулю, так чтобы среднее значение $\mathscr{E}$ равнялось нулю. Для краткости мы вводим l вместо $\lambda-\tilde{\omega}$.

Следующим шагом является подстановка $\varrho=\varrho_1+\varrho_2$, $\gamma=\gamma_2$ в правые части при сохранении членов порядка квадрата ϱ_1 и первой степени ϱ_2 и γ_2. В результате получается

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho_2}{d\lambda^2}+\varrho_2&=3\varrho_1^2+2\gamma_2,\\ \frac{d\mathcal{E}_2}{d\lambda}&=3\varrho_1^2+\gamma_2-2\varrho_2.\end{aligned}\tag{87}$$

Значение

$$\varrho_1=-e\cos l$$

подставляется в члены $3\varrho_1^2$, входящие в правые части, что дает

$$\frac{d^2\varrho_2}{d\lambda^2}+\varrho_2=+2\gamma_2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^2\cos 2l,$$

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{d\lambda}=+\gamma_2-2\varrho_2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e^2\cos 2l.$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$\varrho_2=2\gamma_2+\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2\cos 2l.$$

Подставляя это значение ϱ_2 во второе уравнение, получаем

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{d\lambda}=-3\gamma_2-\frac{3}{2}e^2+\frac{5}{2}e^2\cos 2l,$$

$$\mathcal{E}_2=-3\left(\gamma_2+\frac{1}{2}e^2\right)\lambda+\frac{5}{4}e^2\sin 2l,$$

где в выражении для $\mathcal{E}_2$ отброшена постоянная c_2.

Чтобы избежать векового члена в $\mathcal{E}_2$, необходимо положить

$$\gamma_2=-\frac{1}{2}e^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\varrho_2&=+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2\cos 2l,\\ \mathcal{E}_2&=+\frac{5}{4}e^2\sin 2l.\end{aligned}\tag{88}$$

Можно было бы к этому решению для ϱ_2 прибавить член $a\cos l+b\sin l$. Однако это нарушило бы даламберов характер решения. Кроме того, легко видеть, что величина e, введенная как постоянная интегрирования в ϱ_1, соответствует эксцентриситету, так что в перигелии $(l=0)$

$$\varrho=-e,\ \varrho_1=-e,\ \varrho_2=0$$

и в афелии $(l=\pi)$

$$\varrho=+e,\ \varrho_1=+e,\ \varrho_2=0.$$

Любой член вида $a\cos l$, прибавленный к ϱ_2, изменил бы смысл величины e, а синусоидальный член вида $b\sin l$ — смысл величины $\tilde{\omega}$.

Приступая теперь к определению ϱ_3, $\mathcal{E}_3$, находим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho_3}{d\lambda^2}+\varrho_3&=6\varrho_1\varrho_2-6\varrho_1^3-6\gamma_2\varrho_1+2\gamma_3,\\ \frac{d\mathcal{E}_3}{d\lambda}&=-2\varrho_3+6\varrho_1\varrho_2-4\varrho_1^3-2\gamma_2\varrho_1+\gamma_3.\end{aligned}\tag{89}$$

Вычисления можно расположить, как указано в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Вычисление ϱ_3

	$e^3\cos l$	$e^3\cos 3l$
$+6\varrho_1\varrho_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-6\varrho_1^3 \quad =$	$+\frac{9}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-6\gamma_2\varrho_1 =$	-3	
$+2\gamma_3 \quad = +2\gamma_3$		
$\frac{d^2\varrho_3}{d\lambda^2}+\varrho_3 \quad = +2\gamma_3$		$+3e^3\cos 3l$
$\varrho_3 \quad = +2\gamma_3$	$+xe^3\cos l$	$-\frac{3}{8}e^3\cos 3l$

Таблица 4

Вычисление $\mathscr{E}_3$

	$e^3\cos l$	$e^3\cos 3l$
$-2\varrho_3+\gamma_3=-3\gamma_3$	$-2x$	$+\frac{3}{4}$
$+6\varrho_1\varrho_2 \quad =$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-4\varrho_1^3 \quad =$	$+3$	$+1$
$-2\gamma_2\varrho_1 \quad =$	-1	$-$
$\frac{d\mathscr{E}_3}{d\lambda} \quad =-3\gamma_3$	$+\left(\frac{1}{2}-2x\right)e^3\cos l$	$+\frac{13}{4}e^3\cos 3l$
$\mathscr{E}_3=-3\gamma_3\lambda$	$+\left(\frac{1}{2}-2x\right)e^3\sin l$	$+\frac{13}{12}e^3\sin 3l$

В выражении для $\mathscr{E}_3$ опущена постоянная c_3.

Выражение для $\mathscr{E}_3$ требует, чтобы было $\gamma_3=0$. Тогда, чтобы в перигелии и в афелии получить $\varrho_3=0$, мы принимаем $x=+\frac{3}{8}$. В таком случае окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned}\varrho_3 &= +\frac{3}{8}e^3\cos l-\frac{3}{8}e^3\cos 3l,\\ \mathscr{E}_3 &= -\frac{1}{4}e^3\sin l+\frac{13}{12}e^3\sin 3l.\end{aligned}\tag{90}$$

Теперь стал очевидным общий характер решения: ряд для γ содержит только четные степени e, тогда как члены в ϱ нечетного порядка могут потребовать дополнительных членов с аргументом $\cos l$, чтобы удовлетворить условию обращения в нуль всех членов в ϱ, следующих за ϱ_1, в перигелии и в афелии. Можно заметить, что эти члены в ϱ нечетного порядка необходимы только для того, чтобы величина e соответствовала эксцентриситету. Допустим, что такие члены в ϱ_3 отсутствуют. Обозначим величину e в этом случае через e_1. Тогда выражение для ϱ приняло бы следующий вид:

$$(A) \quad \varrho = \frac{1}{2} e_1^2 + (-e_1 + 0 \cdot e_1^3) \cos l - \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2l - \frac{3}{8} e_1^3 \cos 3l$$

вместо

$$(B) \quad \varrho = \frac{1}{2} e^2 + \left(-e + \frac{3}{8} e^3\right) \cos l - \frac{1}{2} e^2 \cos 2l - \frac{3}{8} e^3 \cos 3l,$$

и преобразование от (A) к (B), точное до членов третьего порядка относительно e, могло бы быть выполнено после этого при помощи следующей подстановки:

$$e_1 = e - \frac{3}{8} e^3.$$

Наконец, разложение можно было бы выполнить, подставляя в (82) выражения

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \ldots,$$
$$\gamma = \gamma_2 + \gamma_4 + \ldots,$$

при этом используется тот факт, что в γ входят только члены четного порядка. Собирая члены соответствующего порядка, можно написать в начале интегрирования следующие уравнения до любого порядка:

$$\frac{d^2\varrho_1}{d\lambda^2} + \varrho_1 = 0,$$
$$\frac{d^2\varrho_2}{d\lambda^2} + \varrho_2 = 3\varrho_1^2 + 2\gamma_2,$$
$$\frac{d^2\varrho_3}{d\lambda^2} + \varrho_3 = 6\varrho_1\varrho_2 - 6\varrho_1^3 - 6\gamma_2\varrho_1,$$
$$\frac{d^2\varrho_4}{d\lambda^2} + \varrho_4 = 6\varrho_1\varrho_3 + 3\varrho_2^2 - 18\varrho_1^2\varrho_2 + 10\varrho_1^4 + 2\gamma_4 - 6\gamma_2\varrho_2 + 12\gamma_2\varrho_1^2 + \gamma_2^2;$$

$$\frac{d\mathscr{E}_1}{d\lambda} = -2\varrho_1,$$
$$\frac{d\mathscr{E}_2}{d\lambda} = -2\varrho_2 + 3\varrho_1^2 + \gamma_2,$$
$$\frac{d\mathscr{E}_3}{d\lambda} = -2\varrho_3 + 6\varrho_1\varrho_2 - 4\varrho_1^3 - 2\gamma_2\varrho_1,$$
$$\frac{d\mathscr{E}_4}{d\lambda} = -2\varrho_4 + 3\varrho_2^2 + 6\varrho_1\varrho_3 - 12\varrho_1^2\varrho_2 + 5\varrho_1^4 + \gamma_4 - 2\gamma_2\varrho_2 + 3\gamma_2\varrho_1^2.$$

Вычисление членов четвертого порядка выполняется так, как указано в табл. 5 и 6.

Это требует, чтобы

$$\gamma_4 = -\frac{1}{8} e^4.$$

Таблица 5

Вычисление ϱ_4

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$+6\varrho_1\varrho_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$+3\varrho_2^2 =$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$
$-18\varrho_1^2\varrho_2 =$	$-\frac{9}{4}$		$+\frac{9}{4}$
$+10\varrho_1^4 =$	$+\frac{15}{4}$	$+5$	$+\frac{5}{4}$
$-6\gamma_2\varrho_2 =$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
$+12\gamma_2\varrho_1^2 =$	-3	-3	
$+\gamma_2^2 =$	$+\frac{1}{4}$		
$+2\gamma_4 = +2\gamma_4$			
$\frac{d^2\varrho_4}{d\lambda^2} + \varrho_4 = +2\gamma_4$	$+\frac{1}{4} e^4$	$-e^4 \cos 2l$	$+5e^4 \cos 4l$
$\varrho_4 = +2\gamma_4$	$+\frac{1}{4} e^4$	$+\frac{1}{3} e^4 \cos 2l$	$-\frac{1}{3} e^4 \cos 4l$

Таблица 6

Вычисление $\mathcal{E}_4$

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$-2\varrho_4 = -4\gamma_4$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$+\gamma_4 = +\gamma_4$			
$+3\varrho_2^2 =$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$
$+6\varrho_1\varrho_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$-12\varrho_1^2\varrho_2 =$	$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$
$+5\varrho_1^4 =$	$+\frac{15}{8}$	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{5}{8}$
$-2\gamma_2\varrho_2 =$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$+3\gamma_2\varrho_1^2 =$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
$\frac{d\mathcal{E}_4}{d\lambda} = -3\gamma_4$	$-\frac{3}{8} e^4$	$-\frac{11}{12} e^4 \cos 2l$	$+\frac{103}{24} e^4 \cos 4l$
$\mathcal{E}_4 = -3(\gamma_4$	$+\frac{1}{8} e^4)\lambda$	$-\frac{11}{24} e^4 \sin 2l$	$+\frac{103}{96} e^4 \sin 4l$

Поэтому окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho_4 &= +\frac{1}{3}e^4\cos 2l - \frac{1}{3}e^4\cos 4l, \\ \mathscr{E}_4 &= -\frac{11}{24}e^4\sin 2l + \frac{103}{96}e^4\sin 4l. \end{aligned} \tag{91}$$

В ϱ_4 не содержится постоянного члена, и в приближениях более высокого порядка также не должны появиться другие постоянные члены, поскольку постоянный член разложения r/a равен $1+\frac{1}{2}e^2$, как было найдено в разд. 6.

Вычисления несколько упростятся, если ввести вместо G его значение

$$G = a^2 n\sqrt{1-e^2},$$

что дает следующее уравнение относительно ϱ:

$$\frac{d^2\varrho}{d\lambda^2} - \frac{1-e^2}{(1+\varrho)^3} + \frac{1}{(1+\varrho)^2} = 0,$$

которое можно проинтегрировать независимо от уравнения для $\mathscr{E}$. Недостаток этой методики состоит в том, что исключаются некоторые характерные особенности, которые возникли в ходе интегрирования в связи с вычислением последовательных членов в γ. Эти особенности имеют существенное значение в приложениях к задачам, в которых вначале отсутствует постоянная интегрирования, соответствующая γ.

Следует заметить, что ряд

$$\gamma = \gamma_2 e^2 + \gamma_4 e^4 + \ldots$$

иллюстрирует разложение постоянной интегрирования γ по постоянной e, которая введена в ходе решения. Эта процедура потребовалась для того, чтобы удовлетворить условию, что $\mathscr{E}$ должна быть периодической функцией от l без линейного члена. Если в $\mathscr{E}$ допускается присутствие линейного члена относительно λ, то решение будет соответствовать движению по орбите со средним движением, отличным от указанного наперед.

Уравнения эллиптического движения в плоскости орбиты образуют систему четвертого порядка. Следовательно, для общего решения необходимы четыре постоянные. Разложение, полученное в этом разделе, содержит четыре постоянные: a, e, $\tilde{\omega}$ и λ_0. Постоянная a входит как постоянная, дающая размеры орбиты и (посредством n) период, однако разложения ϱ и $\mathscr{E}$ не зависят от значения a. Следовательно, полученные разложения, позволяя менять значение a, представляют полное решение этих дифференциальных уравнений.

10. Вращающаяся система координат. Мы уже видели, что разложение прямоугольных координат при помощи бесселевых функций значительно проще, чем разложение уравнения центра. Это наводит на мысль о том, что то же положение вещей сохранится и при непосредственном разложении решения, исходя из дифференциальных уравнений. Использование прямоугольных координат открывает также возможность введения показательных функций вместо тригонометрических функций, что может упростить операции. Чтобы получить координаты, тесно связанные с ϱ и $\mathscr{E}$, равными нулю в случае кругового движения, рекомендуется ввести прямоугольную систему координат, равномерно вращающуюся с угловой скоростью n, равной среднему движению по круговой орбите, отклонения от которой мы должны определить.

Исходные уравнения в прямоугольных координатах для орбиты, плоскость которой совпадает с плоскостью xy, имеют вид

$$\ddot{x}=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \ddot{y}=\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$F=\frac{\mu}{r}, \quad r^2=x^2+y^2.$$

Введем систему координат XY, вращающуюся с угловой скоростью n в направлении движения планеты. Если

$$\lambda=nt+\lambda_0,$$

то

$$\begin{aligned} X&=x\cos\lambda+y\sin\lambda,\\ Y&=-x\sin\lambda+y\cos\lambda; \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} x&=X\cos\lambda-Y\sin\lambda,\\ y&=X\sin\lambda+Y\cos\lambda. \end{aligned} \tag{93}$$

Последовательное дифференцирование дает

$$\dot{X}=\dot{x}\cos\lambda+\dot{y}\sin\lambda-nx\sin\lambda+ny\cos\lambda=\dot{x}\cos\lambda+\dot{y}\sin\lambda+nY,$$

$$\dot{Y}=-\dot{x}\sin\lambda+\dot{y}\cos\lambda-nx\cos\lambda-ny\sin\lambda=-\dot{x}\sin\lambda+\dot{y}\cos\lambda-nX,$$

$$\ddot{X}=\ddot{x}\cos\lambda+\ddot{y}\sin\lambda-n\dot{x}\sin\lambda+n\dot{y}\cos\lambda+n\dot{Y},$$

$$\ddot{Y}=-\ddot{x}\sin\lambda+\ddot{y}\cos\lambda-n\dot{x}\cos\lambda-n\dot{y}\sin\lambda-n\dot{X}.$$

Подставляя

$$-n\dot{x}\sin\lambda+n\dot{y}\cos\lambda=n\dot{Y}+n^2X,$$

$$-n\dot{x}\cos\lambda-n\dot{y}\sin\lambda=-n\dot{X}+n^2Y,$$

мы получаем

$$\ddot{X}=\ddot{x}\cos\lambda+\ddot{y}\sin\lambda+2n\dot{Y}+n^2X,$$

$$\ddot{Y}=-\ddot{x}\sin\lambda+\ddot{y}\cos\lambda-2n\dot{X}+n^2Y.$$

Поэтому уравнения можно написать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{X}-2n\dot{Y}-n^2X&=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial F}{\partial y}\sin\lambda,\\ \ddot{Y}+2n\dot{X}-n^2Y&=-\frac{\partial F}{\partial x}\sin\lambda+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\lambda. \end{aligned} \tag{94}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}=\\ &=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial F}{\partial y}\sin\lambda,\\ \frac{\partial F}{\partial Y}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}=\\ &=-\frac{\partial F}{\partial x}\sin\lambda+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\lambda \end{aligned}$$

Но эти выражения тождественны правым частям уравнений (94). В таком случае последние можно записать в следующей форме:

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X = \frac{\partial F}{\partial X},$$
$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y = \frac{\partial F}{\partial Y}, \tag{95}$$

где

$$F = \frac{\mu}{r}, \ r^2 = X^2 + Y^2.$$

Третьи члены в левых частях можно включить в частные производные в правых частях, полагая

$$F' = F + \frac{1}{2} n^2 (X^2 + Y^2),$$
$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} = \frac{\partial F'}{\partial X}, \tag{96}$$
$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} = \frac{\partial F'}{dY}.$$

Допустим, что мы желаем рассмотреть эллиптические орбиты со средним движением n. Этим уравнениям можно удовлетворить круговой орбитой радиуса a, связанного с n посредством соотношения

$$\mu = a^3n^2.$$

Если надлежащим образом выбрана постоянная λ_0, то ось X постоянно направлена в планету, и для этой круговой орбиты мы имеем

$$X = a, \ Y = 0.$$

Чтобы изучить отклонения от кругового движения в случае эллиптических орбит, мы можем ввести

$$X = a(1 + \xi), \quad Y = a\eta,$$

и использовать ξ и η в качестве новых переменных. Подстановка в уравнения (96) дает

$$a\ddot{\xi} - 2an\dot{\eta} = \frac{1}{a}\frac{\partial F'}{\partial \xi},$$
$$a\ddot{\eta} + 2an\dot{\xi} = \frac{1}{a}\frac{\partial F'}{d\eta}. \tag{97}$$

Если, далее, в качестве независимой переменной используется средняя долгота λ, то эти уравнения принимают следующий вид:

$$an^2\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} - 2an^2\frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial F'}{\partial \xi},$$
$$an^2\frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + 2an^2\frac{d\xi}{d\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial F'}{\partial \eta}. \tag{98}$$

Следовательно, если

$$\Omega = \frac{1}{a^2n^2}F' =$$
$$= \frac{1}{a^2n^2}\left\{\frac{1}{2}a^2n^2[(1+\xi)^2 + \eta^2] + \frac{a^2n^2}{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}}\right\} =$$
$$= +\frac{1}{2}(1+\xi)^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}}, \tag{99}$$

то уравнения примут следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\lambda^2}-2\frac{d\eta}{d\lambda}&=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{d\lambda^2}+2\frac{d\xi}{d\lambda}&=\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}. \end{aligned} \tag{100}$$

Представляет интерес выразить переменные ξ и η через величины ϱ и $\mathscr{E}$, введенные в разд. 9. Поскольку

$$x=r\cos v, \quad y=r\sin v,$$

то из соотношений (92) следует, что

$$\begin{aligned} X&=r\cos(v-\lambda)=r\cos\mathscr{E}=a(1+\varrho)\cos\mathscr{E}, \\ Y&=r\sin(v-\lambda)=r\sin\mathscr{E}=a(1+\varrho)\sin\mathscr{E}. \end{aligned} \tag{101}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi&=\frac{X}{a}-1=(1+\varrho)\cos\mathscr{E}-1= \\ &=(1+\varrho)\left(1-\frac{\mathscr{E}^2}{2}+\frac{\mathscr{E}^4}{24}-\dots\right)-1= \\ &=\varrho-\frac{1}{2}\mathscr{E}^2-\frac{1}{2}\varrho\mathscr{E}^2+\frac{1}{24}\mathscr{E}^4-\dots, \\ \eta&=\frac{Y}{a}=(1+\varrho)\sin\mathscr{E}= \\ &=(1+\varrho)\left(\mathscr{E}-\frac{1}{6}\mathscr{E}^3+\dots\right)= \\ &=\mathscr{E}+\varrho\mathscr{E}-\frac{1}{6}\mathscr{E}^3-\frac{1}{6}\varrho\mathscr{E}^3+\dots, \end{aligned} \tag{102}$$

или, наоборот,

$$\begin{aligned} &(1+\varrho)^2=(1+\xi)^2+\eta^2, \\ &\varrho=\sqrt{1+2\xi+\xi^2+\eta^2}-1= \\ &\quad=\xi+\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{2}\xi\eta^2+\frac{1}{2}\xi^2\eta^2-\frac{1}{8}\eta^4+\dots, \\ &\operatorname{tg}\mathscr{E}=\frac{\eta}{1+\xi}, \\ &\mathscr{E}=\frac{\eta}{1+\xi}-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{1+\xi}\right)^3+\dots= \\ &\quad=\eta-\xi\eta+\xi^2\eta-\frac{1}{2}\eta^3-\xi^3\eta+\xi\eta^3+\dots. \end{aligned} \tag{103}$$

Мы замечаем, что в перигелии и в афелии $\mathscr{E}=0$, так что для этих точек орбиты $\xi=\varrho$, $\eta=0$, и, следовательно, в перигелии ($l=0$)

$$\xi=-e, \quad \eta=0,$$

в афелии ($l=\pi$)

$$\xi=+e, \quad \eta=0.$$

Для разложения правых частей уравнений (103), например с точностью до четвертой степени относительно ξ и η, можно с успехом воспользоваться тем, что эти правые части являются частными производными от одной и той же функции Ω. Следовательно, достаточно разложить Ω по степеням ξ и η с точностью до пятой степени, а затем взять производные по ξ и η. Мы можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}} = \frac{1}{1+\xi}\left[1+\frac{\eta^2}{(1+\xi)^2}\right]^{-1/2} =$$
$$= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{(1+\xi)^3} + \frac{3}{8}\frac{\eta^4}{(1+\xi)^5} =$$
$$= 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \xi^4 - \xi^5 -$$
$$- \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta^2 + 5\xi^3\eta^2 +$$
$$+ \frac{3}{8}\eta^4 - \frac{15}{8}\xi\eta^4.$$

Чтобы получить Ω, необходимо прибавить следующие члены:

$$+\frac{1}{2} + \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2.$$

Следовательно,

$$\Omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\xi^2 - \xi^3 + \frac{3}{2}\xi\eta^2 + \xi^4 - 3\xi^2\eta^2 + \frac{3}{8}\eta^4 - \xi^5 + 5\xi^3\eta^2 - \frac{15}{8}\xi\eta^4 + \ldots,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = +3\xi - 3\xi^2 + \frac{3}{2}\eta^2 + 4\xi^3 - 6\xi\eta^2 - 5\xi^4 + 15\xi^2\eta^2 - \frac{15}{8}\eta^4 + \ldots,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = +3\xi\eta - 6\xi^2\eta + \frac{3}{2}\eta^3 + 10\xi^3\eta - \frac{15}{2}\xi\eta^3 + \ldots.$$

Теперь мы подставляем

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4,$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$$

и собираем в уравнениях члены одинаковых порядков. В результате получается

$$\frac{d^2\xi_1}{d\lambda^2} - 2\frac{d\eta_1}{d\lambda} - 3\xi_1 = 0,$$
$$\frac{d^2\eta_1}{d\lambda^2} + 2\frac{d\xi_1}{d\lambda} = 0,$$
$$\frac{d^2\xi_2}{d\lambda^2} - 2\frac{d\eta_2}{d\lambda} - 3\xi_2 = -3\xi_1^2 + \frac{3}{2}\eta_1^2,$$
$$\frac{d^2\eta_2}{d\lambda^2} + 2\frac{d\xi_2}{d\lambda} = +3\xi_1\eta_1,$$
$$\frac{d^2\xi_3}{d\lambda^2} - 2\frac{d\eta_3}{d\lambda} - 3\xi_3 = -6\xi_1\xi_2 + 3\eta_1\eta_2 + 4\xi_1^3 - 6\xi_1\eta_1^2,$$
$$\frac{d^2\eta_3}{d\lambda^2} + 2\frac{d\xi_3}{d\lambda} = +3\xi_1\eta_2 + 3\xi_2\eta_1 - 6\xi_1^2\eta_1 + \frac{3}{2}\eta_1^3,$$
$$\frac{d^2\xi_4}{d\lambda^2} - 2\frac{d\eta_4}{d\lambda} - 3\xi_4 = -6\xi_1\xi_3 - 3\xi_2^2 + 3\eta_1\eta_3 + \frac{3}{2}\eta_2^2 + 12\xi_1^2\xi_2 - 6\xi_2\eta_1^2 -$$
$$- 12\xi_1\eta_1\eta_2 - 5\xi_1^4 + 15\xi_1^2\eta_1^2 - \frac{15}{8}\eta_1^4,$$
$$\frac{d^2\eta_4}{d\lambda^2} + 2\frac{d\xi_4}{d\lambda} = +3\xi_1\eta_3 + 3\xi_2\eta_2 + 3\xi_3\eta_1 - 6\xi_1^2\eta_2 - 12\xi_1\xi_2\eta_1 +$$
$$+ \frac{9}{2}\eta_1^2\eta_2 + 10\xi_1^3\eta_1 - \frac{15}{2}\xi_1\eta_1^3.$$

Легко видеть, что уравнения для каждого порядка имеют одинаковые левые части, тогда как правые части снова являются функциями от величин ξ и η, полученных в предыдущих приближениях.

Уравнения относительно ξ_1, η_2 можно разрешить следующим образом. Первым интегралом второго уравнения является

$$\frac{d\eta_1}{d\lambda}+2\xi_1=C_1.$$

Если его умножить на 2 и сложить с первым уравнением, то получится следующее уравнение:

$$\frac{d^2\xi_1}{d\lambda^2}+\xi_1=2C_1$$

с интегралом

$$\xi_1=2C_1+A\cos(\lambda-B),$$

где A и B суть постоянные интегрирования. Подстановка в уравнение для η_1 дает

$$\frac{d\eta_1}{d\lambda}=-3C_1-2A\cos(\lambda-B),$$

$$\eta_1=-3C_1\lambda+C_1'-2A\sin(\lambda-B).$$

Нам необходимо решение, в котором η_1 является чисто периодической функцией с нулевым средним значением. Для этого необходимо

$$C_1=0,\quad C_1'=0.$$

Далее, условия для ξ_1 в афелии и перигелии требуют

$$A=-e,\quad B=\tilde{\omega}.$$

Вводя среднюю аномалию $l=\lambda-\tilde{\omega}$, мы окончательно получаем

$$\xi_1=-e\cos l,\quad \eta_1=+2e\sin l.$$

Во всех дальнейших приближениях следует стремиться к тому, чтобы в перигелии и в афелии было $\xi_2=0$, $\xi_3=0$ и т. д.

Для любого последовательного приближения, например ξ_j, η_j, уравнения будут иметь вид

$$\frac{d^2\xi_j}{d\lambda^2}-2\frac{d\eta_j}{d\lambda}-3\xi_j=X_j,$$

$$\frac{d^2\eta_j}{d\lambda^2}+2\frac{d\xi_j}{d\lambda}\qquad\qquad=Y_j,$$

где X_j, Y_j являются правыми частями, разложенными, как мы увидим, в ряды соответственно косинусов и синусов по l. Это непосредственно видно для X_2, Y_2 при подстановке выражений для ξ_1, η_1. Следовательно, Y_j не будет иметь постоянного члена, и интеграл второго уравнения дает

$$\frac{d\eta_j}{d\lambda}+2\xi_j=C_j+\int Y_j\,d\lambda, \tag{104}$$

где C_j — постоянная интегрирования. Умножая этот интеграл на 2 и складывая с уравнением для ξ_j, мы получаем

$$\frac{d^2\xi_j}{d\lambda^2}+\xi_j=2C_j+X_j+2\int Y_j\,d\lambda. \tag{105}$$

Постоянный член для ξ_j, определенный из этого уравнения, равен

$$\xi_{j0}=2C_j+X_{j0}, \tag{106}$$

где X_{j0} означает постоянный член в X_j. Подстановка в (104) дает постоянный член в $d\eta_j/d\lambda$, равный

$$-3C_j-2X_{j0}.$$

Поскольку он должен быть равен нулю, то C_j определяется формулой

$$C_j=-\frac{2}{3}X_{j0}.$$

Если это значение подставить в правую часть уравнения (106), то легко видеть, что постоянный член в этой правой части, а следовательно и постоянный член в ξ_j, принимает вид

$$\xi_{j0}=-\frac{1}{3}X_{j0}. \tag{107}$$

Это будет иметь место для каждого приближения, и поэтому становится ненужным нахождение C_j в явном виде. Процедура состоит просто в определении этой постоянной в ξ_j посредством (107) и отбрасывании постоянной, возникающей в $d\eta_j/d\lambda$ в силу (104).

Для второго приближения мы получаем

$$\begin{aligned}
X_2 &= +\frac{3}{2}e^2-\frac{9}{2}e^2\cos 2l,\\
Y_2 &= -3e^2\sin 2l,\\
\int Y_2\,d\lambda &= +\frac{3}{2}e^2\cos 2l,\\
X_2+2\int Y_2\,d\lambda &= +\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e^2\cos 2l,\\
\xi_2 &= -\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2l,\\
C_2-2\xi_2+\int Y_2\,d\lambda &= +\frac{1}{2}e^2\cos 2l,\\
\eta_2 &= +\frac{1}{4}e^2\sin 2l.
\end{aligned}$$

Для третьего приближения мы получаем

	$e^3\cos l$	$e^3\cos 3l$
$-6\xi_1\xi_2=$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$+3\eta_1\eta_2=$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$+4\xi_1^3=$	-3	-1
$-6\xi_1\eta_1^2=$	$+6$	-6
$X_3=$	$+\frac{9}{4}e^3\cos l$	$-\frac{25}{4}e^3\cos 3l,$

	$e^3 \sin l$	$e^3 \sin 3l$
$+3\xi_1\eta_2=$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$
$+3\xi_2\eta_1=$	$-\frac{9}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-6\xi_1^2\eta_1=$	-3	-3
$+\frac{3}{2}\eta_1^3=$	$+9$	-3
$Y_3=$	$+\frac{9}{8}\ e^3 \sin l$	$-\frac{39}{8} e^3 \sin 3l.$

$$\int Y_3\, d\lambda = -\frac{9}{8} e^3 \cos l + \frac{13}{8} e^3 \cos 3l,$$

$$X_3 + 2\int Y_3\, d\lambda = \qquad -3e^3 \cos 3l,$$

$$\xi_3 = -\frac{3}{8}\ e^3 \cos l + \frac{3}{8} e^3 \cos 3l.$$

Член $-\frac{3}{8} e^3 \cos l$ прибавлен для того, чтобы обратить ξ_3 в нуль в перигелии и афелии.

$$C_3 - 2\xi_3 + \int Y_3\, d\lambda = -\frac{3}{8} e^3 \cos l + \frac{7}{8} e^3 \cos 3l,$$

$$\eta_3 = -\frac{3}{8} e^3 \sin l + \frac{7}{24} e^3 \sin 3l.$$

Для определения ξ_4, η_4 мы имеем табл. 7 и 8.

Таблица 7

Вычисление X_4

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$-6\xi_1\xi_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$-3\xi_2^2 =$	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$
$+3\eta_1\eta_3$	$-\frac{9}{8}$	$+2$	$-\frac{7}{8}$
$+\frac{3}{2}\eta_2^2 =$	$+\frac{3}{64}$		$-\frac{3}{64}$
$+12\xi_1^2\xi_2 =$	$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$
$-6\xi_2\eta_1^2 =$	$+9$	-12	$+3$
$-12\xi_1\eta_1\eta_2 =$	$+\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$
$-5\xi_1^4 =$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{8}$
$+15\xi_1^2\eta_1^2 =$	$+\frac{15}{2}$		$-\frac{15}{2}$
$-\frac{15}{8}\eta_1^4 =$	$-\frac{45}{4}$	$+15$	$-\frac{15}{4}$
$X_4 =$	$+\frac{3}{64} e^4$	$+4e^4 \cos 2l$	$-\frac{579}{64} e^4 \cos 4l$

Полезно в качестве упражнения проверить, что результаты для ξ и η, полученные этим методом, согласуются с рядами для $(r/a)\cos f$ и $(r/a)\sin f$, данными в разд. 6 этой главы.

Вычисление членов четвертого порядка при помощи подстановки предшествующих решений, выраженных в тригонометрической форме,

Таблица 8

Вычисление Y_4

		$e^4 \sin 2l$	$e^4 \sin 4l$
$+3\xi_1\eta_3$	=	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{16}$
$+3\xi_2\eta_2$	=	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{16}$
$+3\xi_3\eta_1$	=	$-\frac{9}{4}$	$+\frac{9}{8}$
$-6\xi_1^2\eta_2$	=	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$
$-12\xi_1\xi_2\eta_1$	=	-6	$+3$
$+\frac{9}{2}\eta_1^2\eta_2$	=	$+\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{8}$
$+10\xi_1^3\eta_1$	=	-5	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{15}{2}\xi_1\eta_1^3$	=	$+15$	$-\frac{15}{2}$
$Y_4 =$		$+3e^4\sin 2l$	$-\frac{61}{8}e^4\sin 4l$
$\int Y_4 d\lambda =$		$-\frac{3}{2}e^4\cos 2l$	$+\frac{61}{32}e^4\cos 4l$
$X_4+2\int Y_4 d\lambda =$	$+\frac{3}{64}e^4$	$+e^4\cos 2l$	$-\frac{335}{64}e^4\cos 4l$
$\xi_4 =$	$-\frac{1}{64}e^4$	$-\frac{1}{3}e^4\cos 2l$	$+\frac{67}{192}e^4\cos 4l$
$C_4-2\xi_4+\int Y_4 d\lambda =$		$-\frac{5}{6}e^4\cos 2l$	$+\frac{29}{24}e^4\cos 4l$
$\eta_4 =$		$-\frac{5}{12}e^4\cos 2l$	$+\frac{29}{96}e^4\sin 4l$

в правые части X_4, Y_4 является, по крайней мере для некоторых из этих членов, довольно утомительным. Рекомендуется применение комплексных показательных функций. Например, если $\Lambda = \exp il$, то

$$\xi_1 = -\frac{e}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1}),$$

$$\xi_3 = +\frac{3}{16}e^3(\Lambda^3 - \Lambda - \Lambda^{-1} + \Lambda^{-3}).$$

Тогда, перемножая, получим

$$-6\xi_1\xi_3 = +\frac{9}{16}e^4(\Lambda^4 - 2 + \Lambda^{-4}) =$$
$$= e^4\left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{8}\cos 4l\right).$$

Таким же образом

$$\eta_1 = \frac{e}{i}(\Lambda - \Lambda^{-1}),$$
$$\eta_3 = \frac{e^3}{48i}(7\Lambda^3 - 9\Lambda + 9\Lambda^{-1} - 7\Lambda^{-3}),$$
$$3\eta_1\eta_3 = -\frac{e^4}{16}(7\Lambda^4 - 16\Lambda^2 + 18 - 16\Lambda^{-2} + 7\Lambda^{-4}) =$$
$$= e^4\left(-\frac{9}{8} + 2\cos 2l - \frac{7}{8}\cos 4l\right).$$

11. Комплексные прямоугольные координаты. Большая легкость при выполнении операций с комплексными показательными функциями по сравнению с тригонометрическими функциями подсказывает идею использования в дифференциальных уравнениях комплексных переменных. Переменными, которые, по-видимому, обладают особыми преимуществами, являются

$$u = \xi + i\eta = \frac{r}{a}E^{i(f-l)} - 1,$$
$$s = \xi - i\eta = \frac{r}{a}E^{-i(f-l)} - 1,$$

так что

$$\xi = \frac{u+s}{2}, \quad \eta = \frac{u-s}{2i}.$$

Тогда уравнения (100) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d^2(u+s)}{d\lambda^2} + i\frac{d(u-s)}{d\lambda} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{1}{2}\frac{d^2(u-s)}{d\lambda^2} + i\frac{d(u+s)}{d\lambda} &= i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}. \end{aligned} \tag{108}$$

Путем сложения и вычитания этих уравнений получаем

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + 2i\frac{du}{d\lambda} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta},$$
$$\frac{d^2s}{d\lambda^2} - 2i\frac{ds}{d\lambda} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}.$$

Производные от Ω по u и s можно легко выразить так:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = \frac{d\Omega}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial u} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \frac{1}{2i}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right),$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}+i\,\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right).$$

Это приводит уравнения (108) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\lambda^2}+2i\,\frac{du}{d\lambda}&=2\,\frac{\partial\Omega}{\partial s},\\ \frac{d^2s}{d\lambda^2}-2i\,\frac{ds}{d\lambda}&=2\,\frac{\partial\Omega}{\partial u}.\end{aligned}\tag{109}$$

Поскольку

$$\xi^2+\eta^2=us,$$

то отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(1+\xi)^2+\eta^2&=1+2\xi+\xi^2+\eta^2=\\ &=1+u+s+us=\\ &=(1+u)(1+s).\end{aligned}\tag{110}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Omega&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(u+s)+\frac{1}{2}\,us+\frac{1}{\sqrt{1+u+s+us}}=\\ &=\frac{1}{2}(1+u)(1+s)+(1+u)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{111}$$

Следуя Хиллу, мы вводим следующее обозначение:

$$D=\frac{d}{id\lambda},$$

так что

$$D^2=-\frac{d^2}{d\lambda^2}.$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}D^2u+2Du&=-2\,\frac{\partial\Omega}{\partial s},\\ D^2s-2Ds&=-2\,\frac{\partial\Omega}{\partial u}.\end{aligned}\tag{112}$$

Главное преимущество этой формы уравнений заключается в том, что мнимая единица не входит и не должна войти в решение, если разложения выполняются при помощи комплексных показательных функций. Важной особенностью переменных u и s является то, что они суть сопряженные комплексные числа. Следовательно, необходимо получить решение только для одной из них; другая переменная может быть найдена переходом к сопряженной величине.

Глава XIV содержит пример использования комплексных прямоугольных координат в задаче о движении Луны. Поэтому подробное приложение к проблеме эллиптического движения опускается и указываются лишь первые шаги.

Разложение функции Ω, заданной формулой (111), по степеням u и s дает

$$\Omega=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}u^2+\frac{3}{4}\,us+\frac{3}{8}\,s^2-\frac{5}{16}u^3-\frac{3}{16}\,u^2s-\frac{3}{16}\,us^2-\frac{5}{16}\,s^3+\ \ldots\ .$$

В таком случае

$$-2\frac{\partial\Omega}{\partial s}=-\frac{3}{2}u-\frac{3}{2}s+\frac{3}{8}u^2+\frac{3}{4}us+\frac{15}{8}s^2+\ \ldots\ .$$

Это выражение мы подставляем в первое из уравнений (112). Тогда это уравнение разделяется на отдельные уравнения для членов первого порядка, второго порядка и т. д. путем введения следующих разложений:

$$u=u_1+u_2+u_3+\ \ldots\ ,$$
$$s=s_1+s_2+s_3+\ \ldots\ .$$

При этом получаются следующие уравнения:

$$D^2u_1+2Du_1+\frac{3}{2}(u_1+s_1)=0,$$
$$D^2u_2+2Du_2+\frac{3}{2}(u_2+s_2)=+\frac{3}{8}u_1^2+\frac{3}{4}u_1s_1+\frac{15}{8}s_1^2.$$

Соответствующие уравнения для s_1 и s_2 можно написать в виде

$$D^2s_1-2Ds_1+\frac{3}{2}(u_1+s_1)=0,$$
$$D^2s_2-2Ds_2+\frac{3}{2}(u_2+s_2)=+\frac{15}{8}u_1^2+\frac{3}{4}u_1s_1+\frac{3}{8}s_1^2\ \ldots$$

при помощи простой взаимной замены u и s всюду в правых частях.

Искомое решение для u_1, s_1 имеет вид

$$\begin{aligned}u_1&=a\Lambda+b\Lambda^{-1},\\ s_1&=b\Lambda+a\Lambda^{-1},\end{aligned}\tag{113}$$

где $\Lambda=E^{il}$, $l=\lambda-\tilde{\omega}$, а a и b — действительные множители, которые надлежит определить.

Определение дифференциального оператора D показывает, что

$$DE^{ip\lambda}=pE^{ip\lambda},\quad D^2E^{ip\lambda}=p^2E^{ip\lambda}.$$

Отсюда

$$D\Lambda^p=p\Lambda^p,\qquad D^2\Lambda^p=p^2\Lambda^p.$$

Подстановка этого решения в уравнения для u_1 и s_1 дает

$$\begin{aligned}D^2u_1&=a\Lambda+b\Lambda^{-1}\\ 2Du_1&=2a\Lambda-2b\Lambda^{-1}\\ \frac{3}{2}(u_1+s_1)&=\frac{3}{2}(a+b)\Lambda+\frac{3}{2}(a+b)\Lambda^{-1}\\ \hline 0&=\left(\frac{9}{2}a+\frac{3}{2}b\right)\Lambda+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\Lambda^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^2s_1&=b\Lambda+a\Lambda^{-1}\\ -2Ds_1&=-2b\Lambda+2a\Lambda^{-1}\\ \frac{3}{2}(u_1+s_1)&=\frac{3}{2}(a+b)\Lambda+\frac{3}{2}(a+b)\Lambda^{-1}\\ \hline 0&=\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\Lambda+\left(\frac{9}{2}a+\frac{3}{2}b\right)\Lambda^{-1}.\end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить этим уравнениям, можно выбрать произвольным либо a, либо b, однако обе эти постоянные должны удовлетворять соотношению

$$3a + b = 0.$$

Мы выбираем

$$a = +\frac{1}{2}e, \quad b = -\frac{3}{2}e,$$

так что решение принимает вид

$$u_1 = +\frac{1}{2}e\Lambda - \frac{3}{2}e\Lambda^{-1},$$
$$s_1 = -\frac{3}{2}e\Lambda + \frac{1}{2}e\Lambda^{-1}.$$

Легко видеть, что это решение соответствует

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{u_1+s_1}{2} = -\frac{e}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1}) = -e\cos l, \\ \eta_1 &= \frac{u_1-s_1}{2i} = +\frac{e}{i}(\Lambda - \Lambda^{-1}) = +2e\sin l \end{aligned} \tag{114}$$

и поэтому согласуется с требованием, чтобы величина e была эксцентриситетом орбиты. Чтобы гарантировать это для приближений более высоких порядков, для перигелия ($l = 0$) необходимо ввести следующие условия:

$$\Lambda = E^{i0} = +1, \quad u = \xi = -e, \quad s = \xi = -e,$$

а для афелия ($l = \pi$)

$$\Lambda = E^{i\pi} = -1, \quad u = \xi = +e, \quad s = \xi = +e.$$

Поскольку первое приближение в перигелии дает

$$u_1 = -e, \quad s_1 = -e,$$

а в афелии

$$u_1 = +e, \quad s_1 = +e,$$

то необходимо, чтобы в перигелии и в афелии было соответственно

$$u_2 = u_3 = u_4 = \ldots = 0,$$
$$s_2 = s_3 = s_4 = \ldots = 0.$$

Эти условия достаточны для вычисления коэффициентов Λ^0 в приближениях четного порядка и Λ^1, Λ^{-1} — в нечетных приближениях.

12. Разложения при помощи гармонического анализа. При любом практическом приложении методов небесной механики конечной целью является получение результатов в численном виде. При этом всегда представляется возможным, по крайней мере в принципе, решить конкретную задачу, требующую обширных вычислений, сохраняя некоторые или все связанные с ней параметры (например, элементы эллиптической орбиты) в буквенном виде вплоть до последнего шага. Со времени изобретения вычислительных машин, с постепенным ростом их мощности и продуктивности оказалось более эффективным вводить численные разложения на более ранних этапах решения задачи, а иногда и в самом начале, как, например, при численном интегрировании уравнений движения. Для специалиста, работающего в этой области, важно быть знакомым как с буквенным, так и с численным методами, так чтобы он мог применить метод, наиболее подходящий в конкретном случае; часто бывает так, что оказывается полезной комбинация обоих методов. Простым примером является разложение в ряд Фурье, при котором аргументы сохраняются в виде буквенных величин, тогда как коэффициенты выражаются в виде чисел.

Численные коэффициенты рядов, приведенных в предыдущих разделах этой главы, могут быть легко вычислены, если эксцентриситет достаточно мал; в тех же случаях, когда эксцентриситет значительно больше, чем 0,1 или 0,2, численные коэффициенты легче найти при помощи гармонического анализа. Разложения в ряды таких функций, как $r^m \cos^n f$, где m и n суть любые целые числа, также могут быть намного облегчены при помощи гармонического анализа.

Пусть θ есть любая независимая угловая переменная, а F — некоторая периодическая функция от θ, которую требуется выразить в виде

$$F = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\theta + c_2 \cos 2\theta + \ldots + \frac{1}{2} c_n \cos n\theta +$$
$$+ s_1 \sin\theta + s_2 \sin 2\theta + \ldots + \frac{1}{2} s_n \sin n\theta,$$

где коэффициенты являются числами. Если выбраны $2n+1$ частных значений θ и если для каждого частного значения вычислено значение F, а также значения тригонометрических функций, то тогда получается $2n+1$ линейных уравнений, из которых, если они независимы, можно вычислить эти коэффициенты. Чтобы сделать эти уравнения независимыми, достаточно разделить период по θ на четное число равных частей. Если начальное значение θ выбрано равным нулю, то мы находим, что достаточно $2n$ частей для определения всех коэффициентов, за исключением s_n.

Если $F(\theta) = F(-\theta)$, то ряд состоит исключительно из постоянного и косинусоидальных членов, и в этом случае только первые $n+1$ частных значений F, включая $F(0)$ и $F(\pi)$, отличны от остальных. Если $F(\theta) = -F(-\theta)$, то ряд содержит исключительно синусоидальные члены, причем $F(0) = F(\pi) = 0$, и только первые $n-1$ частных значений F, исключая $F(0)$ и $F(\pi)$, отличны от остальных.

В общих случаях, когда присутствуют как синусы, так и косинусы, обозначим угол $2\pi/2n$ через α и выберем частные значения θ равными поочередно $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots, (2n-1)\alpha$. Тогда решение уравнений дается следующими разложениями:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} F(j\alpha) \cos kj\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} F(j\alpha) \sin kj\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Заметим, что так как $\sin n\alpha = 0$, то формулы для s_n нет. Заметим также, что поскольку $\cos n\alpha = -1$, $\cos 2n\alpha = +1$ и т. д., то формула для c_n сводится к сумме частных значений, взятых с обратными знаками, разделенной на n.

Несмотря на то что предыдущие формулы очень систематичны и поэтому легко могут быть приспособлены для автоматических вычислительных машин, они не совсем удобны для ручных вычислений, так как ведут к ненужному повторению одних и тех же операций. Для ручных вычислений легко получить гораздо менее трудоемкую схему для любого частного значения $2n$. В качестве примера мы приводим здесь схему для $2n=8$. Обозначим частные значения F через F_0, F_1, F_2, ..., F_7. Тогда коэффициенты определяются следующими уравнениями:

$$0{,}4=F_0+F_4,\quad \frac{0}{4}=F_0-F_4,$$

$$1{,}5=F_1+F_5,\quad \frac{1}{5}=F_1-F_5,$$

$$2{,}6=F_2+F_6,\quad \frac{2}{6}=F_2-F_6,$$

$$3{,}7=F_3+F_7,\quad \frac{3}{7}=F_3-F_7,$$

$$0{,}2=0{,}4+2{,}6,$$

$$1{,}3=1{,}5+3{,}7,$$

$$4c_0=0{,}2+1{,}3,\quad 2(c_1+c_3)=\frac{0}{4},$$

$$4c_4=0{,}2-1{,}3,\quad 2(c_1-c_3)=\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{7}\right)\cos 45^\circ,$$

$$4c_2=0{,}4-2{,}6,\quad 2(s_1+s_3)=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\right)\sin 45^\circ,$$

$$4s_2=1{,}5-3{,}7,\quad 2(s_1-s_3)=\frac{2}{6}.$$

Ценный контроль результатов можно получить для коэффициента при косинусах при помощи следующего условия:

$$F_0=\frac{1}{2}c_0+c_1+c_2+\ldots+\frac{1}{2}c_n.$$

Полный контроль должен заключаться в проверке, определяется ли правильно каждое частное значение F посредством ряда.

Ценный контроль коэффициентов при синусах может быть получен нахождением значения $dF/d\theta$ при $\theta=0$. В этом случае

$$\left(\frac{dF}{d\theta}\right)_0=s_1+2s_2+3s_3+\ldots+(n-1)s_{n-1}.$$

Этому контролю нельзя доверять вплоть до последнего десятичного знака, так как ошибки в последних знаках коэффициентов увеличиваются при умножениях. Поэтому следует всегда применять оба контроля.

Ряд, полученный при помощи гармонического анализа, можно рассматривать как интерполяционную формулу, пригодную для получения значений функции, лежащих в промежутках между вычисленными значениями. Как и в случае любой интерполяционной формулы, точность интерполированного значения возрастает с увеличением числа вычисленных значений функции, которые принимаются во внимание. Коэффициенты, полученные при помощи гармонического анализа, являются только приближениями и могут быть сделаны сколь угодно точными выбором достаточно большого числа n. Можно показать, что если бы ряд был продолжен неограниченно, то коэффициент, который мы обозначили через c_i $(i < n)$, был бы равен

$$c_i + c_{2n-i} + c_{2n+i} + c_{4n-i} + c_{4n+i} + \ldots,$$

а значение c_n равно

$$c_n + c_{3n} + c_{5n} + \ldots .$$

Следовательно, чем ниже порядок коэффициента при косинусе, тем выше точность, с которой он определяется, за исключением коэффициента c_n, являющегося более точным, чем любой из предыдущих коэффициентов.

Аналогично, если бы ряд был неограниченно продолжен, то коэффициент s_i был бы равен

$$s_i - s_{2n-i} + s_{2n+i} - s_{4n-i} + s_{4n+i} - \ldots,$$

и снова легко видеть, что коэффициенты более низкого порядка определяются с более высокой точностью.

В качестве хорошего рабочего правила следует иметь в виду, что число частных значений должно быть выбрано достаточно большим, так чтобы коэффициенты c_{n+1} и s_n можно было считать величинами, имеющими нулевые значения. Иногда трудно решить заранее, сколько частных значений функции дадут результаты требуемой степени точности без затраты ненужного труда. Если необходимо произвести лишь несколько разложений, то можно исходить из восьми частных значений и начать разложение вычислением коэффициентов c_n и s_{n-1}. Если какой-нибудь из этих коэффициентов имеет ощутимую величину, то в этом случае число частных значений можно удвоить, сохраняя, таким образом уже вычисленные значения, и повторить испытание вновь. Если необходимо выполнить много разложений, обладающих одинаковой степенью сходимости, то лучше производить пробы с промежуточным числом частных значений.

Можно придумать специальные схемы разложения, дающие возможность лишь немного увеличить число частных значений и по-прежнему сберечь большую часть уже проделанной работы. Примеры такого рода схемы даны Брауном и Брауэром[1]).

В качестве примера гармонического анализа мы вычислим разложение Фурье для функции

$$F = +[1 - 0{,}6\cos(\theta + 30°)]^{1/2}$$

с восемью частными значениями с точностью до пяти десятичных знаков.

$$F_0 = 0{,}69310 \quad F_1 = 0{,}91908 \quad F_2 = 1{,}14018 \quad F_3 = 1{,}25680$$
$$F_4 = 1{,}23273 \quad F_5 = 1{,}07484 \quad F_6 = 0{,}83666 \quad F_7 = 0{,}64842$$

---

[1]) E. W. Brown, D. Brouwer, Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis, Trans. Yale Univ. Obs. 6, pt. 5, 143 (1932).

$0,4 = +1,92583$		$\frac{0}{4} = -0,53963$
$1,5 = +1,99392$	$0.2 = +3.90267$	$\frac{1}{5} = -0,15576$
$2,6 = +1,97684$	$1,3 = +3,89914$	$\frac{2}{6} = +0,30352$
$3,7 = +1,90522$		$\frac{3}{7} = +0,60838$

$4c_0 = +7,80181$	$2(c_1 + c_3) = -0,53963$
$4c_4 = +0,00353$	$2(c_1 - c_3) = -0,54033$
$4c_2 = -0,05101$	$2(s_1 + s_3) = +0,32005$
$4s_2 = +0,08870$	$2(s_1 - s_3) = +0,30352$

$\frac{1}{2}c_0 = +0,97523$	
$c_1 = -0,26999$	$s_1 = +0,15589$
$c_2 = -0,01275$	$s_2 = +0,02218$
$c_3 = +0,00018$	$s_3 = +0,00413$
$\frac{1}{2}c_4 = +0,00044$	
$+0,69311$	$+0,21264$
Контроль: $+0,69310$	Контроль: $+0,21642$

Из сходимости коэффициентов очевидно, что коэффициентам при косинусах нельзя доверять более чем до четырех десятичных знаков, а коэффициентам при синусах — более чем до трех. Другими словами, интерполированное значение функции, вычисленное по ряду, будет точным не более чем до трех десятичных знаков. Чтобы получить более точные результаты, необходимо повторить разложение с большим числом частных значений.

Всякий раз, когда функция от двух независимых угловых переменных, α и β, может быть представлена в следующей форме:

$$F(\alpha, \beta) = \sum (A_{j,k} \cos j\alpha \cos k\beta + B_{j,k} \sin j\alpha \sin k\beta + \\ + C_{j,k} \cos j\alpha \sin k\beta + D_{j,k} \sin j\alpha \cos k\beta),$$

где j, $k = 0, 1, 2 \ldots$, вычисление численных значений коэффициентов можно свести к двукратному применению гармонического анализа для одной переменной.

Допустим, что период по α разделен на $2m$ частей, а период по β — на $2n$ частей. Тогда требуется $4mn$ частных значений F. Начиная с $2m$ частных значений, соответствующих $\beta = 0$, вычислим $m + 1$ коэффициентов при косинусах, соответствующих $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, и $m - 1$ коэффициентов при синусах, соответствующих $j = 1, 2, \ldots, m - 1$. Затем повторим этот процесс для $2m$ частных значений F, соответствующих другому частному значению β, после чего ту же операцию выполняем для остальных частных значений F. Таким образом будут получены $2n$ частных значений коэффициентов при $\cos j\alpha$, $\sin j\alpha$. Выбирая любую систему из них, соответствующую одному и тому же значению j, например $2n$ частных значений $\cos 2\alpha$, разлагаем их по β. В результате получаются коэффициенты $A_{2,k}$, $C_{2,k}$. Остальные коэффициенты получаются аналогичным способом.

Когда разложение завершено, обычно требуется представить результат в виде условного двойного ряда Фурье, заменяя произведения синусов и косинусов суммами и разностями этих последних. Для этой цели достаточны следующие формулы:

$$A\cos j\alpha\cos k\beta = +\frac{1}{2}A\cos(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2}A\cos(j\alpha - k\beta),$$

$$B\sin j\alpha\sin k\beta = -\frac{1}{2}B\cos(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2}B\cos(j\alpha - k\beta),$$

$$C\cos j\alpha\sin k\beta = +\frac{1}{2}C\sin(j\alpha + k\beta) - \frac{1}{2}C\sin(j\alpha - k\beta),$$

$$D\sin j\alpha\cos k\beta = +\frac{1}{2}D\sin(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2}D\sin(j\alpha - k\beta).$$

Когда либо j, либо k, или обе эти величины равны нулю, эти формулы не применяются, так как члены ряда уже имеют требуемый вид. Следует заметить, что коэффициенты $B_{0,k}$ и $B_{j,0}$ не появляются. Также в том случае, когда разложение производится сначала по α, коэффициент $D_{0,k}$ не появляется, и в любом случае отсутствуют $C_{0,0}$ и $D_{0,0}$. Необходимо также заметить, что когда $j = k$ и оба отличны от нуля, то эти формулы дают формальные значения для коэффициентов при $\sin 0$; эти коэффициенты фиктивны, и их никогда не следует записывать, так как это может привести к ошибкам в последующих операциях.

Всегда является возможным и желательным, используя соотношения

$$+\frac{1}{2}A\cos(j\alpha + k\beta) = +\frac{1}{2}A\cos(-j\alpha - k\beta),$$

$$+\frac{1}{2}C\sin(j\alpha + k\beta) = -\frac{1}{2}C\sin(-j\alpha - k\beta),$$

располагать ряд так, чтобы ни j, ни k не принимали отрицательных значений или, наоборот, чтобы ни одно из них не принимало положительных значений.

Когда это сделано, то, считая j неотрицательным, следует расположить ряд по группам так, чтобы внутри каждой группы j было постоянным, а k изменялось от своего наибольшего положительного значения до своего наибольшего отрицательного значения.

Замечания. Литература

Книга Брауна и Шука «Теория планет» (E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, chapt. II and III, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933) содержит много полезных сведений о разложении функций в эллиптическом движении. Различные таблицы для гармонического анализа содержатся в приложении А к этой книге, а также в таблицах Брауна и Брауэра (Tables for the Development of the Disturbing Function, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933; Trans. Yale Obs., 6, pt. 5, 1932).