Глава III

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПРИТЯЖЕНИЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

1. **Введение.** Закон гравитационного притяжения справедлив для двух материальных частиц, а не для тел конечных размеров с произвольным распределением масс. Однако можно показать, что сферические тела с таким распределением масс, что слои равной плотности являются концентрическими сферами, притягивают друг друга так, как если бы массы были сосредоточены в их центрах. Кроме того, можно показать, что если расстояние между двумя телами велико по сравнению с их размерами, то притяжение между ними проявляется в сущности так, как если бы массы были сосредоточены в их центрах. Эти результаты дают возможность в большинстве случаев пренебрегать размерами и распределением масс и рассматривать гравитационное взаимодействие между двумя телами так, как если бы они были материальными частицами. Тем не менее в солнечной системе и системах двойных звезд имеются случаи, когда отклонения от сферической формы оказывают значительное влияние. Следовательно, необходимо исследовать случай гравитационного взаимодействия между двумя конечными телами, каждое из которых обладает произвольным распределением масс. Эта проблема представляет значительные трудности. Гораздо легче рассмотреть притяжение между телом конечных размеров и материальной частицей. Эта упрощенная проблема применяется ко многим случаям в астрономии и будет рассмотрена первой.

2. **Притяжение частицы телом конечных размеров и с произвольным распределением масс.** Пусть в декартовой системе координат, неподвижной в смысле ньютоновой механики, X_0, Y_0, Z_0 — координаты центра масс E тела M, и пусть X, Y, Z — координаты частицы P с массой m. Рассмотрим в точке Q элемент массы dM тела M и обозначим через ξ, η, ζ координаты Q в системе координат с осями, параллельными осям неподвижной системы, но начало которой находится в точке E. Положим

$$x = X - X_0, \quad y = Y - Y_0, \quad z = Z - Z_0,$$

так что x, y, z — координаты m относительно центра масс тела M. Расстояние Δ между точками P и Q получается по формуле

$$\Delta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2. \tag{1}$$

Сила, действующая на частицу m, обусловленная притяжением элемента массы dM, равна $fm\,dM/\Delta^2$ в направлении $\overrightarrow{PQ}$. Составляющие этой силы по трем осям координат получаются умножением величины силы на направляющие косинусы направления $\overrightarrow{PQ}$. Поскольку координаты Q относительно P равны $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, то при помощи (1) легко видеть, что направляющие косинусы равны

$$\frac{\xi - x}{\Delta}, \quad \frac{\eta - y}{\Delta}, \quad \frac{\zeta - z}{\Delta}.$$

Следовательно, три составляющие силы, обусловленной притяжением со стороны dM, равны

$$fm\,dM\,\frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad fm\,dM\,\frac{\eta - y}{\Delta^3}, \quad fm\,dM\,\frac{\zeta - z}{\Delta^3}.$$

Интегрирование по всему объему тела M дает компоненты силы в следующем виде:

$$fm\int \frac{\xi - x}{\Delta^3}\,dM, \quad fm\int \frac{\eta - y}{\Delta^3}\,dM, \quad fm\int \frac{\zeta - z}{\Delta^3}\,dM.$$

Эти интегралы можно привести к более определенному виду, вводя плотность $\varkappa$, которую следует считать конечной функцией от координат ξ, η, ζ. В таком случае

$$dM = \varkappa(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

и компоненты силы выражаются в виде тройных интегралов, в которых интегрирование необходимо распространить на всю массу M. Тогда эти компоненты принимают вид

$$\begin{aligned} F_x &= fm\iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\xi - x}{\Delta^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ F_y &= fm\iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\eta - y}{\Delta^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (2) \\ F_z &= fm\iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{\zeta - z}{\Delta^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \end{aligned}$$

где требуются три тройных интегрирования. Можно получить выражения, в которых встречается только один тройной интеграл. Эта форма получается рассмотрением частных производных от Δ^2 по x, y, z. Из (1) вытекает, что

$$\Delta\,d\Delta = (x - \xi)\,dx + (y - \eta)\,dy + (z - \zeta)\,dz,$$

или

$$-\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{\xi - x}{\Delta^3}\,dx + \frac{\eta - y}{\Delta^3}\,dy + \frac{\zeta - z}{\Delta^3}\,dz.$$

Левую часть можно представить как $d(\Delta^{-1})$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\eta - y}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{\zeta - z}{\Delta^3}. \qquad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает для компонентов силы следующие выражения:

$$F_x = fm \iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$
$$F_y = fm \iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{4}$$
$$F_z = fm \iiint\limits_{(M)} \varkappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Delta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

В этих интегралах координаты x, y, z следует считать параметрами, которые необходимо рассматривать постоянными при интегрировании. К тому же пределы интегрирования не зависят от этих параметров. В этом случае разрешается переменить порядок дифференцирования и интегрирования по параметру при условии, что всюду в интервале интегрирования $\Delta \neq 0$. Это условие говорит только о том, что частица m не должна быть частью массы M; она должна находиться либо вне массы M, либо внутри полости в ней. Случай, когда частица является частью тела M, требует особого исследования.

Определим теперь потенциал U формулой

$$U = f \iiint\limits_{(M)} \frac{\varkappa(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{5}$$

которую для краткости обычно будем записывать в виде

$$U = f \int \frac{dM}{\Delta}. \tag{6}$$

Из (4) следует, что компоненты силы, действующей на m, можно написать в следующем виде:

$$F_x = m\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = m\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = m\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{7}$$

Аналогично силы, действующие на различные элементы тела M, можно привести к центру масс M, и равнодействующая сила будет равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на m. Следовательно, ее компоненты можно написать в следующем виде:

$$F_x^{(0)} = -m\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y^{(0)} = -m\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z^{(0)} = -m\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{8}$$

Для дальнейших приложений необходимо вернуться к исходной неподвижной декартовой системе координат. Тогда U необходимо считать функцией от разностей $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$, и компоненты силы, действующей на m, принимают следующий вид:

$$F_x = m\frac{\partial U}{\partial X}, \quad F_y = m\frac{\partial U}{\partial Y}, \quad F_z = m\frac{\partial U}{\partial Z}. \tag{9}$$

Компоненты силы, определяющей движение центра масс тела M, равны

$$F_x^{(0)} = m\frac{\partial U}{\partial X_0}, \quad F_y^{(0)} = m\frac{\partial U}{\partial Y_0}, \quad F_z^{(0)} = m\frac{\partial U}{\partial Z_0}. \tag{10}$$

Проблема нахождения взаимного притяжения между M и m сведена к проблеме получения функции U, определяемой посредством формулы (5), как функции от x, y, z. Общие свойства U изучаются в теории ньютоновского потенциала. Наиболее фундаментальным из них является то, что для всех точек, не принадлежащих к массе M, U удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение впервые было дано Лапласом. Оно получается непосредственно частным дифференцированием соотношений (3). При помощи этого уравнения можно показать, что потенциал для тела M, обладающего сферической симметрией, принимает вид

$$U = \frac{fM}{r},$$

где r определяется формулой

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Методы, используемые в теории потенциала, имеют большое значение в теории равновесия вращающихся жидких масс. Приложение этой теории к фигурам небесных тел является, собственно, областью динамической астрономии; однако эта тема выходит за рамки настоящей книги.

3. Полиномы Лежандра. Для вопросов, рассматриваемых в этой книге, достаточно получить метод выражения U как функции от x, y, z, который был бы, как правило, применим в тех случаях, когда расстояние между m и центром масс тела M великó по сравнению с размерами этого тела M. При этом допущении существует разложение в ряд, которое будет рассмотрено в последующих разделах.

Пусть ϱ есть расстóяние элемента массы dM от центра масс тела M. Тогда

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2. \tag{11}$$

Далее, считается, что для любой точки тела M $\varrho/r < 1$. Выражение (1) для Δ^2 теперь можно написать в виде

$$\Delta^2 = r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + \varrho^2 =$$
$$= r^2\left[1 - 2\left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\varrho}\right)\frac{\varrho}{r} + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right].$$

Для краткости положим

$$\frac{\varrho}{r} = \alpha, \tag{12}$$

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\varrho} = q = \cos S, \tag{13}$$

так что

$$\Delta^2 = r^2(1 - 2q\alpha + \alpha^2). \tag{14}$$

Из (13) очевидно, что S есть угол POQ, и поэтому

$$|q| \leqslant 1.$$

Теперь подынтегральная функция в выражении

$$U = f\int \frac{dM}{r(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}} \tag{15}$$

будет разложена в степенной ряд по α при помощи полиномов Лежандра $P_n(q)$, определяемых формулой

$$\frac{1}{(1-2q\alpha+\alpha^2)^{1/2}} = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots, \tag{16}$$

в которой P_n означает полиномы относительно q степени n.

Общее выражение для $P_n(q)$ получается при помощи биномиального разложения левой части формулы (16) в виде

$$[1-(2q\alpha-\alpha^2)]^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}(2q\alpha-\alpha^2)^k, \tag{17}$$

где использовано обычное обозначение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Поскольку правые части (16) и (17) должны быть тождественными, то общее выражение для $P_n(q)$ получается нахождением коэффициента при α^n в правой части формулы (17). Это общее выражение является двойным рядом по α и q, и в правой части формулы (16) этот двойной ряд расположен в виде одинарного ряда по α с коэффициентами, являющимися функциями, в данном случае — полиномами, от q.

Собирая коэффициенты при α^n в правой части (17), получаем для общего выражения $P_n(q)$

$$P_n(q) = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left[q^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}q^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}q^{n-4} - \ldots\right]. \tag{18}$$

Из этого выражения следует, что P_n является полиномом степени n, содержащим только нечетные степени q, если n нечетное, и только четные степени, если n четное. Подстановка частных значений n дает следующие полиномы Лежандра от порядка 0 до порядка 6 включительно:

$$P_0(q) = 1,$$
$$P_1(q) = q,$$
$$P_2(q) = \frac{1}{2}(3q^2-1),$$
$$P_3(q) = \frac{1}{2}(5q^3-3q),$$
$$P_4(q) = \frac{1}{8}(35q^4-30q^2+3),$$
$$P_5(q) = \frac{1}{8}(63q^5-70q^3+15q),$$
$$P_6(q) = \frac{1}{16}(231q^6-315q^4+105q^2-5).$$

Эти полиномы будут часто полезны в последующем.

Другая форма разложения получается, если положить

$$\sigma = E^{is};$$

тогда в силу (13)

$$2q = \sigma + \sigma^{-1}.$$

Также имеем

$$2\cos nS = \sigma^n + \sigma^{-n},$$
$$1 - 2q\alpha + \alpha^2 = (1 - \alpha\sigma)(1 - \alpha\sigma^{-1}),$$
$$(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{-1/2} = (1 - \alpha\sigma)^{-1/2}(1 - \alpha\sigma^{-1})^{-1/2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \alpha^k \sigma^k \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} \alpha^l \sigma^{-l}. \tag{19}$$

Оба ряда перемножаются, и коэффициент при α^n дает

$$P_n(\cos S) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot 2\cos nS + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)}\cdot 2\cos(n-2)S +$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2\cdot 4\ldots(2n-4)}\cdot 2\cos(n-4)S + \ldots\ . \tag{20}$$

Оба биномиальных ряда, из которых образовано произведение в правой части (19), абсолютно сходятся при $|\alpha| < 1$, поскольку $|\sigma| = 1$. Следовательно, полученный двойной ряд сходится абсолютно при $|\alpha| < 1$.

Следующие свойства P_n будут полезны для наших непосредственных нужд:

(a) $$P_n(+1) = +1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{21}$$

Это свойство получается немедленно, если положить $q = \pm 1$ в (14), что приводит в этом случае к следующим частным разложениям:

$$\frac{1}{1 \mp \alpha} = 1 \pm \alpha + \alpha^2 \pm \alpha^3 + \ldots;$$

(б) $$|P_n(q)| \leqslant 1, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant q \leqslant +1. \tag{22}$$

Поскольку все коэффициенты в правой части (20) положительны, то максимальное значение P_n для действительных значений S равно сумме этих коэффициентов. Оно достигается при $S = 0$; $q = +1$; в силу свойства (21) это доказывает справедливость (22).

Важное значение свойства (22) для нашей цели заключается в том, что оно доказывает абсолютную сходимость ряда (16) при $|\alpha| < 1$ и для всех значений q, соответствующих действительным значениям S. Доказательство получается сравнением ряда (16) со следующим рядом:

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n + \ldots, \tag{23}$$

абсолютно сходящимся при $|\alpha| < 1$. Так как абсолютные значения коэффициентов в правой части (16) не превосходят значений соответствующих коэффициентов в (23), то первый ряд должен также сходиться абсолютно.

4. Главные члены U. Возвращаясь теперь к интегралу (15) для U, при помощи подстановки ряда (16) получаем ряд, сходящийся абсолютно при $\alpha < 1$. Поэтому можно написать

$$U = \frac{f}{r}\int\left[1 + P_1(q)\frac{\varrho}{r} + P_2(q)\frac{\varrho^2}{r^2} + P_3(q)\frac{\varrho^3}{r^3} + \ldots\right] dM. \tag{24}$$

Запишем это интегральное выражение в следующем виде:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ .$$

Нам необходимо теперь вычислить отдельные члены, восстанавливая в подынтегральных функциях ξ, η, ζ при помощи соотношения $q\varrho = (x\xi + y\eta + z\zeta)/r$.

Имеются следующие различные члены U:

$$U_0 = \frac{f}{r} \int dM = \frac{fM}{r}. \tag{25}$$

Это тот результат, который получился бы, если бы вся масса тела M была сосредоточена в его центре масс.

$$U_1 = \frac{f}{r^2} \int \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} dM = \\ = \frac{f}{r^2} \left(\frac{x}{r} \int \xi \, dM + \frac{y}{r} \int \eta \, dM + \frac{z}{r} \int \zeta \, dM \right).$$

Но эти три интеграла равны нулю, так как ξ, η, ζ отсчитываются в системе координат, имеющей начало в центре масс тела M. Следовательно,

$$U_1 = 0. \tag{26}$$

Выражение для U_2 имеет вид

$$U_2 = \frac{f}{r} \int \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r^2} \right] dM$$

и может быть представлено в следующем виде:

$$U_2 = \frac{f}{r^3} \left\{ \left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \xi^2 \, dM + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \eta^2 \, dM + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \zeta^2 \, dM + \right. \\ \left. + \frac{3yz}{r^2} \int \eta\zeta \, dM + \frac{3zx}{r^2} \int \zeta\xi \, dM + \frac{3xy}{r^2} \int \xi\eta \, dM \right\}. \tag{27}$$

Шесть интегралов, которые входят в это выражение, являются моментами второго порядка, связанными с моментами инерции тела M. Чтобы получить более удобную форму этого выражения, обозначим через I момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и через α, β, γ — направляющие косинусы этой оси. Тогда, если θ есть угол между этой осью и прямой, соединяющей некоторый элемент dM с координатами ξ, η, ζ и центр масс тела M, то

$$I = \int \varrho^2 \sin^2 \theta \, dM,$$

где, как и прежде, $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Этот интеграл можно развернуть, используя соотношение

$$\varrho \cos \theta = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma.$$

Отсюда

$$I = \int [\varrho^2 - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] \, dM,$$

что можно написать в следующем виде:

$$I = \int [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] \, dM = \\ = \int [(\eta^2 + \zeta^2)\alpha^2 + (\zeta^2 + \xi^2)\beta^2 + (\xi^2 + \eta^2)\gamma^2 - 2\eta\zeta\beta\gamma - 2\zeta\xi\gamma\alpha - 2\xi\eta\alpha\beta] \, dM.$$

Моменты инерции A, B, C относительно осей X, Y, Z и произведения инерции D, E, F определяются следующими интегралами:

$$A = \int (\eta^2 + \zeta^2)\, dM, \qquad D = \int \eta\zeta\, dM,$$
$$B = \int (\zeta^2 + \xi^2)\, dM, \qquad E = \int \zeta\xi\, dM,$$
$$C = \int (\xi^2 + \eta^2)\, dM, \qquad F = \int \xi\eta\, dM.$$

Поэтому момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, с направляющими косинусами α, β, γ можно написать в виде

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь следующую поверхность второго порядка с центром в начале координат:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = +1. \tag{29}$$

Эта поверхность называется эллипсоидом инерции тела M. Сравнение уравнений (28) и (29) показывает, что выполняются следующие соотношения:

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{I},$$

если X, Y, Z — координаты любой точки на поверхности этого эллипсоида, а α, β, γ — направляющие косинусы прямой, соединяющей эту точку с центром. Последнее соотношение показывает, что расстояние любой точки X, Y, Z от центра равно $1/\sqrt{I}$, что доказывает отсутствие у этой поверхности действительных точек на бесконечности, поскольку моменты инерции трехмерного тела относительно любой оси отличны от нуля. Поэтому эта поверхность является эллипсоидом, а не какой-либо другой формой поверхности второго порядка.

Соответствующим выбором осей координат это уравнение эллипсоида можно привести к следующему виду:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = +1. \tag{30}$$

Приведение общей формы (28) к форме (30) требует решения алгебраического уравнения третьей степени. Это решение фиксирует направления осей, но оставляет полную свободу в распределении обозначений X, Y, Z между этими осями. Как правило, выбор обозначений определяется динамическими соображениями. Если положительные направления осей X и Z выбраны, то положительное направление оси Y однозначно следует из условия, чтобы оси координат составляли, например, правую систему.

Предположим, что оси выбраны так, что уравнение эллипсоида имеет вид (30). Эти оси называются главными осями тела. При этом выборе осей мы имеем $D = E = F = 0$. Важное значение такого выбора в связи с нашей настоящей задачей заключается в том, что в этом случае обращаются в нуль последние три интеграла в выражении (27) для U_2. Остальные интегралы можно выразить через A, B и C. Из определения A, B, C вытекает, что

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dM = \frac{A + B + C}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \xi^2 dM = \frac{B+C-A}{2}$$
$$\int \eta^2 dM = \frac{C+A-B}{2},$$
$$\int \zeta^2 dM = \frac{A+B-C}{2}.$$

Это дает после простого преобразования

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{3}{2}\frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{r^2}\right]. \tag{31}$$

Пусть теперь α, β, γ — направляющие косинусы прямой, соединяющей точку x, y, z с началом координат. Тогда

$$\frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{r^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

В силу уравнения (28) и выбора главных осей в качестве осей координат это — момент инерции тела относительно прямой, соединяющей его центр масс с точкой x, y, z. Если этот момент инерции обозначить через I, то выражение (31) можно написать в следующем виде:

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\left[\frac{A+B+C-3I}{2}\right]. \tag{32}$$

Это выражение для U_2 следует рассматривать просто как удобную сокращенную форму. Во всех приложениях для потенциала U необходимо получить выражение, в которое явно входят координаты точки m, так чтобы можно было без труда получить частные производные по этим координатам. Этому требованию удовлетворяет выражение (31).

5. **Введение полярных координат.** Введем полярные координаты формулами

$$x = r\cos\psi\cos\beta,$$
$$y = r\sin\psi\cos\beta,$$
$$z = r\sin\beta,$$

где ψ — долгота и β — широта. Следует отличать последнюю от направляющего косинуса β, использованного выше. Тогда выражение для U_2 можно написать в следующем виде:

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{3}{2}(A\cos^2\psi + B\sin^2\psi)\cos^2\beta - \frac{3}{2}C\sin^2\beta\right] =$$
$$= \frac{f}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{3}{2}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\cos 2\psi\right)\cos^2\beta - \frac{3}{2}C\sin^2\beta\right],$$

что дает окончательно

$$U_2 = \frac{f}{r^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\beta\right) - \frac{3}{4}(A-B)\cos^2\beta\cos 2\psi\right]. \tag{33}$$

Допустим теперь, что тело M обладает осевой симметрией относительно оси Z. Тогда $A = B$ и (33) приводится к

$$U_2 = \frac{f}{r^3}(C-A)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\beta\right). \tag{34}$$

Более частным случаем является случай сфероида, который, кроме осевой симметрии относительно оси Z, обладает также симметрией относительно экваториальной плоскости, перпендикулярной к этой оси. Следует заметить, что выражение (34) для U_2 не зависит от того, обладает ли тело экваториальной плоскостью симметрии. То же самое выражение справедливо как для сфероида, так и для грушевидного тела, обладающего осевой симметрией относительно оси Z.

Эта упрощенная форма члена U_2 может быть использована для задач, связанных с рассмотрением притяжения планетами их спутников. Она применима к двойным звездным системам, если одна из компонент настолько малых размеров, что ее можно считать материальной частицей. В очень тесных парах может стать значительной приливная деформация, нарушая осевую симметрию и вызывая необходимость применения общей формулы (33).

6. Выражение для U_3. Следующим членом потенциала является

$$U_3=\frac{f}{r^4}\int\frac{1}{2}\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r}\left[5\left(\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r}\right)^2-3\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)\right]dM. \quad (35)$$

Этот интеграл порождает десять различных интегралов вида

$$\int\xi^j\eta^k\zeta^l\,dM \quad \text{при} \quad j+k+l=3,$$

где j, k, l — нуль или положительные целые числа 1, 2 или 3.

Допустим, что тело симметрично относительно плоскости XY и относительно плоскости ZX. В этом случае только три из этих десяти интегралов отличны от нуля, и выражение для U_3 принимает вид

$$U_3=\frac{f}{r^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{r}\left[\left(5\frac{x^2}{r^2}-3\right)\int\xi^3dM+\left(15\frac{y^2}{r^2}-3\right)\int\xi\eta^2dM+\right.$$
$$\left.+\left(15\frac{z^2}{r^2}-3\right)\int\xi\zeta^2dM\right]. \quad (36)$$

Примером тела, к которому применимо это выражение, является грушевидное тело при выборе в качестве оси X оси этой груши.

Если тело симметрично относительно всех трех координатных плоскостей, каким является, например, однородный эллипсоид с тремя неравными осями, то все десять интегралов обращаются в нуль. В этом случае моменты нечетного порядка вообще обращаются в нуль, и $U_3=0$, $U_5=0$ и т. д.

7. Выражение для U_4. Общее выражение (24) дает

$$U_4=\frac{f}{r^5}\int\frac{1}{8}\left[\frac{35\,(x\xi+y\eta+z\zeta)^4}{r^4}-30\frac{(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{r^2}\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)+\right.$$
$$\left.+3\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)^2\right]dM. \quad (37)$$

В самом общем случае имеется пятнадцать различных интегралов моментов четвертого порядка вида $\int\xi^j\eta^k\zeta^l\,dM$. Выражение (37) можно без труда записать через эти интегралы. Развертывание этого выражения приводится здесь только для тела, симметричного относительно всех трех координатных плоскостей. В этом случае только шесть моментов четвертого порядка будут отличны от нуля, а именно те, у которых все три показателя степени j, k, l — четные числа. Это рассмотрение применимо, например, к однородному эллипсоиду с тремя неравными осями. В таком случае

$$U_4 = \frac{f}{r^5}\left[\left(\frac{35}{8}\frac{x^4}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{8}\right)\int \xi^4\,dM + \left(\frac{35}{8}\frac{y^4}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{y^2}{r^2} + \frac{3}{8}\right)\int \eta^4\,dM + \right.$$
$$+\left(\frac{35}{8}\frac{z^4}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{z^2}{r^2} + \frac{3}{8}\right)\int \zeta^4\,dM + \left(\frac{105}{4}\frac{y^2z^2}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{y^2+z^2}{r^2} + \frac{3}{4}\right)\int \eta^2\zeta^2\,dM +$$
$$+\left(\frac{105}{4}\frac{z^2x^2}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{z^2+x^2}{r^2} + \frac{3}{4}\right)\int \zeta^2\xi^2\,dM +$$
$$\left. +\left(\frac{105}{4}\frac{x^2y^2}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{x^2+y^2}{r^2} + \frac{3}{4}\right)\int \xi^2\eta^2\,dM\right]. \qquad (38)$$

Пусть в более частном случае сфероида ось Z является осью осевой симметрии. Тогда

$$\int \xi^4\,dM = \int \eta^4\,dM, \qquad \int \xi^2\zeta^2\,dM = \int \eta^2\zeta^2\,dM.$$

Кроме того, должна существовать связь между $\int \xi^2\eta^2\,dM$ и $\int \xi^4\,dM$. Эту связь легко обнаружить следующим образом. Обозначим

$$\varrho_1^2 = \xi^2 + \eta^2$$

и введем цилиндрические координаты ϱ_1, ψ, ζ. Плотность $\varkappa$ в силу осевой симметрии будет функцией от ϱ_1 и ζ, но не будет зависеть от ψ. Следовательно, если

$$dM = \varkappa\, d\zeta\varrho_1\, d\varrho_1\, d\psi,$$

то

$$\int \xi^2\eta^2\,dM = \int\int \varkappa\, d\zeta\varrho_1^5\, d\varrho_1 \int_0^{2\pi} \sin^2\psi\cos^2\psi\, d\psi =$$
$$= \frac{\pi}{4}\int\int \varkappa\, d\zeta\varrho_1^5\, d\varrho_1.$$

Пределы интегрирования по ϱ_1, ζ должны быть введены в соответствии с конкретно рассматриваемым телом. Аналогично

$$\int (\xi^2+\eta^2)^2\,dM = \int\int \varkappa\, d\zeta\varrho_1^5\, d\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi =$$
$$= 2\pi\int\int \varkappa\, d\zeta\varrho_1^5\, d\varrho_1.$$

Отсюда

$$\int \xi^2\eta^2\,dM = \frac{1}{8}\int (\xi^2+\eta^2)^2\,dM.$$

Далее непосредственно следует, что

$$\int \xi^4\,dM = \int \eta^4\,dM = \frac{3}{8}\int (\xi^2+\eta^2)^2\,dM.$$

После введения этих соотношений и дальнейшего упрощения выражение (38) для члена U_4 в случае сфероида приводится к виду

$$U_4 = \frac{f}{r^5}\left(1 - 10\frac{z^2}{r^2} + \frac{35}{3}\frac{z^4}{r^4}\right)\int\left[\frac{9}{64}(\xi^2+\eta^2)^2 - \frac{9}{8}(\xi^2+\eta^2)\zeta^2 + \frac{3}{8}\zeta^4\right]dM. \quad (39)$$

Если затем ввести полярные координаты формулами

$$z^2 = r^2 \sin^2\beta,$$

$$z^4 = r^4\left(\sin^2\beta - \frac{1}{4}\sin^2 2\beta\right),$$

то это выражение принимает следующий вид:

$$U_4 = \frac{f}{r^5}\left(1 + \frac{5}{3}\sin^2\beta - \frac{35}{12}\sin^2 2\beta\right)\int\left[\frac{9}{64}(\xi^2+\eta^2)^2 - \frac{9}{8}(\xi^2+\eta^2)\zeta^2 + \frac{3}{8}\zeta^4\right]dM.$$

Довольно неожиданное упрощение заключается в том, что в случае сфероида появляется множителем одна общая функция от координат x, y, z, тогда как различные интегралы в (38) имели множителем различные функции от этих координат частицы m. Это свойство можно было бы получить из общих свойств ньютоновского потенциала.

8. Потенциал сфероида. Результаты, полученные для сфероида, можно собрать воедино в следующей форме:

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \frac{B_2}{r^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin^2\beta\right) + \frac{B_4}{r^4}\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4}\sin^2\beta + \frac{35}{8}\sin^4\beta\right) + \ldots\right], \tag{40}$$

где

$$B_2 = -\frac{C-A}{M} = -\frac{1}{M}\int\left[\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) - \zeta^2\right]dM,$$

$$B_4 = \frac{1}{M}\int\left[\frac{3}{8}(\xi^2+\eta^2)^2 - 3(\xi^2+\eta^2) + \zeta^4\right]dM.$$

Очевидно, B_2 имеет размерность $[L^2]$, B_4 — размерность $[L^4]$. Более часто применяемыми параметрами являются J и K, связанные с B_2, B_4 соотношениями

$$B_2 = -\frac{2}{3}JR^2, \qquad B_4 = +\frac{4}{15}KR^4,$$

в которых R означает экваториальный радиус сфероида. Тогда

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \frac{JR^2}{r^2}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\beta\right) + \frac{KR^4}{r^4}\left(\frac{1}{10} - \sin^2\beta + \frac{7}{6}\sin^4\beta\right) + \ldots\right]. \tag{41}$$

Вместо K часто применяется параметр D, определяемый как $\frac{35}{8}B_4R^{-4}$. Тогда K-член в выражении (41) принимает следующий вид:

$$\frac{DR^4}{r^4}\left(\frac{3}{35} - \frac{6}{7}\sin^2\beta + \sin^4\beta\right).$$

Постоянные M, J, K, которые определяют потенциал сфероида, должны быть получены из данных наблюдений, т. е. по гравитационному притяжению этим сфероидом другого тела.

Для Земли параметр J можно вывести из измерений ускорения силы тяжести на земной поверхности. Параметр K для Земли получается малым, того же порядка величины, что и коэффициенты гармоник высших порядков, которые появляются в потенциале тела с таким же неправильным строением поверхности, какое имеет Земля.

В движении Луны важен параметр J, однако влияние Солнца на движение Луны настолько сильнее влияния сжатия Земли, что определение численного значения J по движению Луны представляет особую трудность.

Интересный метод определения J для Земли основан на представлении J в виде произведения двух сомножителей, а именно

$$J=\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\cdot\frac{C}{MR^2}.$$

Отношение $(C-A)/C$ можно найти из наблюденных значений постоянной прецессии, тогда как отношение C/MR^2 может быть получено из теории гидростатического равновесия Земли. Этот метод с большим успехом был использован Дарвином и далее развит Де Ситтером; его ограниченность зависит от степени приложимости теории гидростатического равновесия к Земле.

Изучение движений искусственных спутников открыло возможность определения численных значений постоянных J и K, а также других параметров, входящих в потенциал Земли, при помощи метода, свободного от трудностей, имеющихся в прежних методах.

При наличии искусственных спутников представляется возможным применить к Земле метод, который оказался полезным для изучения потенциала Сатурна по его естественным спутникам. Внутренние шесть спутников этой планеты, от Мимаса до Титана, имеют средние расстояния, колеблющиеся от $3{,}11R$ до $20{,}48R$. Движения узлов и перицентриев этих спутников в значительной степени определяются сжатием центральной планеты. По наблюдениям движений двух или более спутников на различных расстояниях от центральной планеты можно определить значения J и K (или D). Для дальнейшего чтения рекомендуется работа Джеффриса о применении этого метода к системе Сатурна[1]). Относительно движений перицентрия и узла орбиты близкого спутника см. гл. XVII.

Форма потенциала сфероида, данная в формуле (40), соответствует общему результату, полученному Лапласом. Для тела с осевой симметрией это общее выражение имеет вид

$$U=\frac{fM}{r}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{r^k}P_k(\sin\beta)\right],$$

в котором P_k — полиномы Лежандра. В случае сфероида в силу симметрии относительно экваториальной плоскости в этом ряде присутствуют только четные члены. Для тел, не обладающих осевой симметрией, существует обобщенное разложение[2]), также данное Лапласом.

9. Потенциал для двух тел конечных размеров. Разложение потенциала, приведенное в предыдущих разделах, применимо к подавляющему большинству проблем динамической астрономии. Однако имеется несколько проблем, в которых необходимо использовать разложение потенциала двух тел конечных размеров. В этом случае функцию U можно написать в следующем виде:

$$U=f\int\int\frac{dM\,dM'}{\Delta},$$

---

[1]) H. Jeffreys, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 113, 81 (1953); 114, 433 (1954).

[2]) F. Tisserand, Mécanique Céleste, t. 2, chap. XVI—XIX, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

где Δ теперь означает расстояние между двумя элементами массы: dM тела M и dM' тела M'. Интегрирование должно быть распространено на массы обоих тел.

Пусть O есть центр масс тела M, O' — центр масс тела M', и пусть O является началом декартовой системы координат ξ, η, ζ, а O' — начало системы координат ξ', η', ζ' с параллельными осями. Пусть, далее, OO' совпадает с осью Ox. Если r означает расстояние OO', ξ, η, ζ — координаты dM, а ξ', η', ζ' — координаты dM', то

$$\Delta^2 = (r+\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2 =$$
$$= r^2\left\{1-\frac{2(\xi-\xi')}{r}+\frac{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}{r^2}\right\}.$$

Следовательно, если

$$q=\frac{\xi-\xi'}{r\alpha}, \qquad \alpha^2=\frac{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}{r^2},$$
$$\Delta^2 = r^2(1-2q\alpha+\alpha^2),$$

то величина, обратная Δ, может быть разложена при помощи (16), что дает разложение для U вида

$$U = f\int\int\frac{dM\,dM'}{r}\{1+P_1(q)\cdot\alpha+P_2(q)\cdot\alpha^2+\ldots\}, \tag{42}$$

и, подобно разложению, использованному в предыдущих разделах,

$$\begin{aligned} U_0 &= f\frac{MM'}{r},\\ U_1 &= f\int\int\frac{\alpha q}{r}\,dM\,dM' =\\ &= f\int\int\frac{\xi-\xi'}{r^2}\,dM\,dM' =\\ &= 0, \end{aligned} \tag{43}$$

так как

$$\int\xi\,dM=0, \qquad \int\xi'\,dM'=0.$$

$$U_2 = f\int\int\left(\frac{3}{2}q^2-\frac{1}{2}\right)\alpha^2\frac{dM\,dM'}{r} =$$
$$=\frac{f}{r^3}\int\int\left\{\frac{3}{2}(\xi-\xi')^2-\frac{1}{2}[(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2]\right\}dM\,dM' =$$
$$=\frac{f}{r^3}\int\int\left[\left(\xi^2-\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{2}\zeta^2\right)+\left(\xi'^2-\frac{1}{2}\eta'^2-\frac{1}{2}\zeta'^2\right)-2\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'\right]dM\,dM'.$$

Члены с произведениями обращаются в нуль в силу выбора начал координат. Следовательно, U_2 можно написать в следующем виде:

$$U_2=\frac{fM'}{r^3}\int\left[\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{3}{2}(\eta^2+\zeta^2)\right]dM +$$
$$+\frac{fM}{r^3}\int\left[\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2-\frac{3}{2}(\eta'^2+\zeta'^2)\right]dM'.$$

Независимо от ориентации координат имеем

$$\int(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dM=\frac{1}{2}(A+B+C),$$
$$\int(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\,dM'=\frac{1}{2}(A'+B'+C'),$$

если A, B, C, A', B', C' — моменты инерции относительно главных осей. Кроме того,

$$I=\int(\eta^2+\zeta^2)\,dM,$$

$$I'=\int(\eta'^2+\zeta'^2)\,dM'$$

— моменты инерции обоих тел относительно прямой OO'. Следовательно,

$$I=Aa^2+Bb^2+Cc^2,$$

$$I'=A'a'^2+B'b'^2+C'c'^2,$$

если a, b, c — направляющие косинусы прямой OO' относительно главных осей тела M, а a', b', c' — направляющие косинусы относительно главных осей тела M'. Для U_2 получается следующее выражение:

$$U_2=\frac{fM'}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{3}{2}(Aa^2+Bb^2+Cc^2)\right]+$$
$$+\frac{fM}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A'+B'+C')-\frac{3}{2}(A'a'^2+B'b'^2+C'c'^2)\right], \tag{44}$$

аналогичное (31) и (32).

Это выражение для U_2 еще не является окончательным, поскольку движение центра масс тела M определяется следующими компонентами силы:

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial X},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial Y},\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial Z},$$

а движение центра масс тела M' — компонентами

$$F_{x'}=\frac{\partial U}{\partial X'},\quad F_{y'}=\frac{\partial U}{\partial Y'},\quad F_{z'}=\frac{\partial U}{\partial Z'},$$

где X, Y, Z — координаты центра масс тела M, а X', Y', Z' — координаты центра масс тела M' в неподвижной системе координат. Следовательно, координаты точки O' относительно O суть $X'-X$, $Y'-Y$, $Z'-Z$ и

$$r^2=(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2.$$

Теперь необходимо выразить через эти координаты направляющие косинусы, которые входят в выражение (44). Пусть главные оси тела M имеют направляющие косинусы λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 относительно этой неподвижной системы координат. Тогда

$$a^2=\frac{[\lambda_1(X-X')+\mu_1(Y-Y')+\nu_1(Z-Z')]^2}{r^2},$$

$$b^2=\frac{[\lambda_2(X-X')+\mu_2(Y-Y')+\nu_2(Z-Z')]^2}{r^2},$$

$$c^2=\frac{[\lambda_3(X-X')+\mu_3(Y-Y')+\nu_3(Z-Z')]^2}{r^2}.$$

Аналогичные выражения можно написать для a'^2, b'^2, c'^2, обозначая через λ_1', μ_1', ν_1' и т. д. направляющие косинусы главных осей инерции тела M'.

Что касается разложения до членов более высоких порядков в выражении (42) для U, то принципиальных трудностей нет. Методика та же самая, как и применявшаяся при рассмотрении притяжения конечным телом материальной частицы. В самом общем случае эти слагаемые более высокого порядка вскоре оказываются состоящими из такого большого числа членов, что разложение становится затруднительным. Для большинства астрономических задач достаточны разложения, данные в этой главе. Если для какой-либо частной задачи необходимы дополнительные члены разложений, то они легко могут быть найдены при помощи описанной выше процедуры. В любых таких случаях необходимо использовать выгоды от всех упрощений, которые обусловливаются симметрией и особенностями ориентации в каждой отдельной задаче.

Замечания. Литература

Второй том книги Тиссерана «Трактат по небесной механике» содержит исчерпывающее рассмотрение вопросов, изложенных в этой главе. Полезной книгой для дополнительных справок является книга Томсона и Тэта «Трактат по натуральной философии» (часть II, новое издание), особенно гл. VI.