Глава IV

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Представление функций. Функцию часто представляют при помощи аналитического выражения через одну или более независимых переменных, о которых можно предположить, что они непрерывным образом изменяются в некотором интервале численных значений (бесконечном или конечном). Такая формула явным образом предписывает систему математических операций над этими переменными, при помощи которых эта функция определяется для любых частных значений переменных. Исчисление бесконечно малых занимается дифференцированием и интегрированием такого рода выражений. Другой формой задания функций является табличная форма, в которой численные значения функции заданы для некоторых определенных значений независимой переменной (или переменных). Значения независимой переменной, если имеется только одна, обычно записываются в столбец, и рядом с каждым из них располагается соответствующее значение этой функции. Такое наглядное представление называется *таблицей*. Независимая переменная называется *аргументом*. Аргумент обычно, но не всегда задается на равных интервалах; разность между двумя последовательными аргументами, взятая независимо от знака, называется *табличным интервалом*, интервалом аргумента или просто интервалом. Когда имеются две независимые переменные, то значения одной из них (называемой вертикальным аргументом) можно написать вдоль левого поля страницы, а другой (горизонтального аргумента) — поперек страницы вверху: тогда значения функции образуют прямоугольную таблицу, известную под названием таблицы с двумя входами. Таблицы с одной независимой переменной называются таблицами с одним входом.

Третьей формой, в которой можно представить функцию, является *графическая*, при которой в противоположность табличной форме представление является непрерывным. Однако эта форма мало применяется в небесной механике, так как она не обеспечивает большую точность.

Табличная форма функции может быть предпочтена аналитической в силу ряда причин. Созданы таблицы логарифмов и тригонометрических функций, экономящие время, так как вычисление отдельных значений при помощи подстановки чисел в бесконечные ряды является слишком трудоемким делом для вычислителя. Эфемериды Солнца, Луны и планет табулируются в ежегодных выпусках «American Ephemeris» и в аналогичных публикациях, так как их вычисление по выражениям, образующим основу этих эфемерид, невыполнимо для большинства лиц, нуждающихся в этих данных. В качестве третьего примера мы имеем таблицы, представляющие численные решения дифференциальных уравнений, полученные непосредственно численными методами, т. е. без первоначального выражения решения в аналитической форме.

Общераспространенные таблицы логарифмов и тригонометрических функций снабжены настолько малым табличным интервалом, что интерполирование выполняется очень легко; этот процесс известен как *линейное интерполирование*. Такая подробная табуляция не всегда осуществима даже для часто используемых таблиц, и поэтому необходимо иметь более общие методы интерполирования, чем линейный метод, применимые в тех случаях, когда линейное интерполирование привело бы к неточным результатам. Полезно также уметь дифференцировать и интегрировать функции, выраженные в табличной форме, особенно интегрировать такие функции, которые нельзя проинтегрировать аналитически или для которых аналитическое разложение потребовало бы много труда. Эти три операции — интерполирование, численное дифференцирование и численное интегрирование — составляют *исчисление конечных разностей*.

Преимущество аналитических методов заключается в том, что только они могут привести к совершенно общим результатам, т. е. к результатам, о которых известно, что они справедливы для всех значений независимых переменных. Преимущество численных методов состоит в том, что они *всегда* применимы. К тому же численные методы часто менее трудоемки и меньше подвержены ошибкам, чем аналитические методы, и способны дать одинаково высокую точность. Кроме того, небесная механика, подобно любой другой отрасли прикладной математики, стремится к практическим приложениям. Здесь всегда необходимы численные результаты, и для большинства практических приложений промежуточные аналитические выкладки являются совершенно излишними.

2. Разности. Таблица 1 дает значения полинома $x^3-3x-23$ для некоторых целочисленных значений x вместе с их разностями.

Числа f^{I} получаются вычитанием подряд каждого значения f из значения, находящегося непосредственно под ним. Другие столбцы вычисляются подобным же образом. Числа f^{I} называются *первыми разностями*, f^{II} — *вторыми разностями* и т. д. Позже мы увидим, что разности последовательных порядков тесно связаны с последовательными производными функции; действительно, можно заметить, что вторые, третьи и четвертые разности в точности равны соответствующим производным в этом частном примере, но в общем случае это не имеет места. Разности какого-либо порядка, как правило, меньше разностей непосредственно предшествующего порядка, т. е. разности *сходятся*. Если функция и все ее производные непрерывны и не обращаются в бесконечность в пределах таблицы, то разности сходятся тем быстрее, чем меньше табличный интервал. Фактически мы можем всегда ускорить эту сходимость как угодно сильно, выбирая интервал достаточно малым (что в данном случае, конечно, потребовало бы нецелочисленных значений x).

Полином является функцией особого рода, обнаруживающей свойства, которые не встречаются обычно в небесной механике. Особое свойство приведенной выше табл. 1 заключается в том, что это представление является точным, без каких бы то ни было погрешностей. Таблица 2, дающая склонение Солнца, вычисленное в предположении эллиптического движения Земли, является более характерной для тех

Таблица 1

Полином

x	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
−3	−41				
		+16			
−2	−25		−12		
		+4		+6	
−1	−21		−6		0
		−2		+6	
0	−23		0		0
		−2		+6	
+1	−25		+6		0
		+4		+6	
+2	−21		+12		0
		+16		+6	
+3	−5		+18		0
		+34		+6	
+4	+29		+24		
		+58			
+5	+87				

функций, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем.

Разности в этой таблице сходятся, но медленно и только до определенного порядка, после чего знаки разностей начинают чередоваться. Если мы вычислим разности последующих порядков, то увидим, что они расходятся. Такое поведение разностей вызвано *ошибками округления*, входящими в f. Каждое значение f, хотя и вычисленное со всей возможной тщательностью, непременно отягощено погрешностью, которая может достигать любой величины между $+0°{,}00005$ и $-0°{,}00005$. Эти погрешности накапливаются в разностях последовательных порядков до тех пор, пока не начинают играть определяющую роль в том порядке, в котором знаки разностей начинают чередоваться. Никакой пользы в продолжении вычисления разностей выше этого порядка нет. Такими разностями в нашем примере являются разности f^{IX}.

Это свойство накапливания, которым обладают ошибки округления, демонстрируется в табл. 3, представляющей самый худший из возмож-

Таблица 2

Склонение Солнца

1966		f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
Февр.	19,75	−11°,2441								
			+3,6921							
Март	1,75	−7,5520		+1812						
			+3,8733		−1075					
	11,75	−3,6787		+737		+51				
			+3,9470		−1024		−14			
	21,75	+0,2683		−287		+37		+8		
			+3,9183		−987		−6		−9	
	31,75	+4,1866		−1274		+31		−1		+23
			+3,7909		−956		−7		+14	
Апр.	10,75	+7,9775		−2230		+24		+13		−11
			+3,5679		−932		+6		+3	
	20,75	+11,5454		−3162		+30		+16		−2
			+3,2517		−902		+22		+1	
	30,75	+14,7971		−4064		+52		+17		−4
			+2,8453		−850		+39		−3	
Май	10,75	+17,6424		−4914		+91		+14		−5
			+2,3539		−759		+53		−8	
	20,75	+19,9963		−5673		+144		+6		
			+1,7866		−615		+59			
	30,75	+21,7829		−6288		+203				
			+1,1578		−412					
Июнь	9,75	+22,9407		−6700						
			+0,4878							
	19,75	+23,4285								

ных случаев расходимости погрешностей, который только может возникнуть, когда функции непрерывны и правильно вычислены и когда табличный интервал достаточно мал, чтобы обеспечить хорошую сходимость. Вместо самой функции табулированы гипотетические погрешности этой функции.

Таблица 3

Расходимость погрешностей

ε	ε_{I}	ε_{II}	ε_{III}	ε_{VI}	ε_{V}	ε_{VI}
$+\frac{1}{2}$						
	-1					
$-\frac{1}{2}$		$+2$				
	$+1$		-4			
$+\frac{1}{2}$		-2		$+8$		
	-1		$+4$		-16	
$-\frac{1}{2}$		$+2$		-8		$+32$
	$+1$		-4		$+16$	
$+\frac{1}{2}$		-2		$+8$		
	-1		$+4$			
$-\frac{1}{2}$		$+2$				
	$+1$					
$+\frac{1}{2}$						

Эта таблица подсказывает правило, которое можно часто с успехом использовать для контроля вычисленных функций. Вычислим разности функции до такого порядка, при котором знаки разностей начинают чередоваться, и назовем его m-м порядком. Тогда если любая m-я разность по абсолютной величине превосходит 2^{m-1}, то в значении функции наверняка имеется погрешность, бо́льшая половины последнего десятичного знака. Обратное утверждение неверно: погрешность, бо́льшая половины единицы, не обязательно окажет столь сильное влияние, как мы увидим в следующем разделе.

Исключение из этого правила встречается в том случае, когда табличный интервал выбран настолько большим, что разности не сходятся, как, например, если $\cos x$ протабулирован с интервалом в 180°, начиная с 0°, но таких случаев всегда можно легко избежать путем проб или выяснением общего поведения функции.

При обширных вычислениях редко удается и никогда не бывает эффективным ограничение погрешностей половиной единицы последнего десятичного знака, но это правило легко изменяется, чтобы стать применимым к таким случаям. Если, например, допускают погрешности в 3 единицы последнего знака, то ни одна m-я разность не должна превосходить 3×2^m: вообще для погрешностей в p единиц m-е разности не должны превосходить $p \times 2^m$.

3. Обнаружение случайных ошибок. Под случайной ошибкой подразумевается такая ошибка, которая влияет только на отдельные значения функции, как, например, опечатка или ошибка в вычислениях. Такого рода погрешности, если они не слишком многочисленны, легко обнаружить изучением хода разностей. Чтобы показать влияние такой погрешности, в табл. 4 снова дан полином, табулированный в табл. 1, но значение f, соответствующее $x = +1$, изменено на единицу.

Четвертые разности вместо того, чтобы обратиться в нуль, как это было прежде, образуют особую упорядоченную структуру, в которой легко распознать коэффициенты разложения бинома $(a-b)^4$. Если написать пятые разности, то будет очевидным, что они соответствуют коэффициентам в разложении бинома $(a-b)^5$. Если бы ошибка в функции была равна p единицам вместо 1, то все еще было бы легко распознать эту структуру; каждая из четвертых разностей просто была бы умножена на p. Вообще отдельная погрешность в функции, достигающая p единиц, создает характерную структуру расположения разностей m-го порядка, которая соответствует биномиальным коэффициентам в разложении $p(a-b)^m$. Для более общих типов функций, чем полиномы, эта структура оказывается частично скрытой из-за влияния ошибок округления, что может затруднить обнаружение ошибок малой величины, т. е. погрешностей лишь немного больших, чем ошибки округления; в общем эту структуру тем труднее разглядеть, чем медленнее сходятся разности.

Таблица 4

Полином с погрешностью

x	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
−3	−41				
		+16			
−2	−25		−12		
		+4		+6	
−1	−21		−6		+1
		−2		+7	
0	−23		+1		−4
		−1		+3	
+1	−24		+4		+6
		+3		+9	
+2	−21		+13		−4
		+16		+5	
+3	−5		+18		+1
		+34		+6	
+4	+29		+24		
		+58			
+5	+87				

Правило исправления случайных ошибок в функции гласит: Когда в разностях m-го порядка обнаруживается характерная структура, то, если m четное, берут наибольшую m-ю разность, делят ее на число, взятое из нижеследующей таблицы, и прибавляют частное (ближайшее целое число) к значению функции, стоящему на той же строке; если m нечетное, то берут среднее, не обращая внимания на знаки, из двух наибольших последовательных разностей m-го порядка, приписывают ему знак нижней разности, делят на число из нижеприведенной таблицы и прибавляют частное (ближайшее целое число) к значению функции, стоящему на промежуточной строке. Эти числа с точностью до знака равны наибольшим коэффициентам в биномиальных разложениях порядка m. Полезно сравнить их с числами 2^{m-1} из предыдущего раздела:

m	2	3	4	5	6	7	8	9
Делитель	+2	−3	−6	+10	+20	−35	−70	+126

Чтобы продемонстрировать применение этого правила, приводится табл. 5. Это таблица пятизначных логарифмов с ошибкой в единицу, нарочно введенной в lg 50. Табличный интервал выбран достаточно большим, чтобы сделать разности медленно сходящимися. Влияние ошибок округления в восьмых разностях настолько велико, что почти скрывает характерную структуру, однако остаются следующие две наиболее заметные особенности. Разности постепенно уменьшаются на некотором расстоянии вверх и вниз от самой большой и чередуются по знаку. Деля наибольшую разность, + 94, на число, взятое из таблицы, — 70, получаем — 1 как поправку, которую необходимо прибавить к значению функции 69898. Если теперь построить эту таблицу заново, то мы увидим, что новые восьмые разности будут гораздо глаже, чем ранее: наибольшая разность в области, где они меняют знаки, равна 34.

Этот пример хорошо демонстрирует силу изложенного метода обнаружения случайных ошибок. В большинстве случаев, встречающихся на практике, разности будут сходиться быстрее, а ошибки окажутся

Таблица 5

Логарифмы с погрешностью

x	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
15	17609								
		+12494							
20	30103		−2803						
		+9691		+1030					
25	39794		−1773		−480				
		+7918		+550		+257			
30	47712		−1223		−223		−149		
		+6695		+327		+108		+90	
35	54407		−896		−115		−59		−61
		+5799		+212		+49		+29	
40	60206		−684		−66		−30		+10
		+5115		+146		+19		+39	
45	65321		−538		−47		+9		−81
		+4577		+99		+28		−42	
50	69898		−439		−19		−33		+94
		+4138		+80		−5		+52	
55	74036		−359		−24		+19		−87
		+3779		+56		+14		−35	
60	77815		−303		−10		−16		+61
		+3476		+46		−2		+26	
65	81291		−257		−12		+10		−47
		+3219		+34		+8		−21	
70	84510		−223		−4		−11		
		+2996		+30		−3			
75	87506		−193		−7				
		+2803		+23					
80	90309		−170						
		+2633							
85	92942								

бо́льшими; обе эти особенности способствуют облегчению в применении метода. Необходимо соблюдать две предосторожности. Если ошибки настолько многочисленны, что характерные структуры хода разностей перекрывают друг друга, то применение метода становится затруднительным или даже невозможным, хотя большая величина и «шероховатость» (отсутствие гладкого хода) разностей указывают тем не менее на присутствие ошибок. Этот метод можно применять только для обнаружения случайных ошибок; систематические ошибки, как, например, ошибки, вызванные отбрасыванием существенных членов в разложении в ряд, не могут быть обнаружены.

4. Прямое интерполирование. Прямым интерполированием называется процесс определения численного значения функции посредством ее таблицы для значения независимого переменного, лежащего между двумя табулированными значениями. Таблица 6 показывает используемые символические обозначения.

Кроме этого, для обозначения $\frac{1}{2}(\delta_{3/2}+\delta_{1/2})$ применяют $\mu\delta_1$; $\mu\delta_0^3$ означает $\frac{1}{2}(\delta^3_{-1/2}+\delta^3_{1/2})$ и т. д. Табличный интервал обозначается через w, так что $w=x_1-x_0$, если интервал постоянен. Обычно, но не всегда считают, что аргумент, для которого требуется найти интерполированное значение f, лежит между x_0 и x_1. Обозначим этот аргумент через x. Тогда $n=(x-x_0)/w$ называется *интерполяционным множителем*, и значение f для аргумента x можно обозначить через f_n. В большинстве обычно применяемых таблиц w является некоторой степенью 10 и может выражаться в любых единицах, как, например, 1 сутки, 0,00001 суток, 0,01 градуса дуги и т. д. Необходимо заметить, что n, наоборот, всегда является отвлеченным числом. При линейном интерполировании, обычно применяемом в тригонометрических таблицах, предполагается, что

Таблица 6

Обозначения

Аргумент	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
x_{-2}	f_{-2}		δ^2_{-2}		δ^4_{-2}
		$\delta_{-3/2}$		$\delta^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		δ^2_{-1}		δ^4_{-1}
		$\delta_{-1/2}$		$\delta^3_{-1/2}$	
x_0	f_0		δ^2_0		δ^4_0
		$\delta_{1/2}$		$\delta^3_{1/2}$	
x_1	f_1		δ^2_1		δ^4_1
		$\delta_{3/2}$		$\delta^3_{3/2}$	
x_2	f_2		δ^2_2		δ^4_2

$$f_n=f_0+n\delta_{1/2}. \qquad (1)$$

Поскольку $\delta_{1/2}=f_1-f_0$, то это равносильно следующему уравнению:

$$f_n=f_0+n(f_1-f_0)=(1-n)f_0+nf_1. \qquad (2)$$

Если f нанести на график как ординату относительно абсциссы x, то, поскольку это уравнение является линейным относительно n и так как при $n=0$ $f_n=f_0$, а при $n=1$ $f_n=f_1$, это уравнение представляет прямую линию, проходящую через точки f_0 и f_1. Поэтому процесс линейного интерполирования заменяет функцию рядом прямолинейных отрезков, соединяющих последовательные табличные значения. Если табличный интервал настолько мал, что функция не имеет заметной кривизны между двумя последовательными табличными значениями, то результат линейного интерполирования достаточно точен; в противном случае это не имеет места. Функции, которые широко применяются, как, например, пятизначные значения синусов и тангенсов, могут быть успешно протабулированы с таким малым интервалом, но это не принято делать для функций, имеющих ограниченное применение, или же в случаях, когда требуется много значащих цифр; в таких случаях вместо составления очень обширных таблиц легче применить более общие методы интерполирования.

Поскольку две точки на кривой не могут дать никакой информации об ее кривизне, то, очевидно, необходимо иметь более двух точек для более общего метода интерполирования, чем линейный. Принято проводить гладкую кривую через 3, 4, 5 или более последовательных табличных значений и предполагать, что эта кривая представляет функцию между этими табличными значениями. Гладкую кривую через конечное число точек можно провести бесконечно многими способами;

необходимо выбрать способ, который даст простую аналитическую апроксимацию этой функции. Самая распространенная методика заключается в замене функции полиномом по степеням n. Если используются три точки, то этот полином содержит постоянный член и первую и вторую степени n; если используются четыре точки, то необходима третья степень и т. д. Этот результат напоминает известное разложение функции в ряд Тэйлора, но вместо последовательных производных, входящих в эту формулу, выступают разности последовательных порядков. В качестве примера этого процесса подробно рассматривается случай трех точек, или интерполирование второго порядка.

Пусть три табличных значения $f(x)$ будут f_{-1}, f_0 и f_1. Полином второй степени имеет следующий вид: $A+Bx+Cx^2$, где A, B и C — постоянные. Их необходимо определить из условия, что кривая должна проходить через f_{-1}, f_0 и f_1. При $x=0$ мы имеем непосредственно $A=f_0$. При $x=+1$ и $x=-1$ мы имеем

$$A+B+C=f_1,$$
$$A-B+C=f_{-1}.$$

Вычитание второго уравнения из первого дает

$$2B=f_1-f_{-1}=f_1-f_0+f_0-f_{-1}=\delta_{1/2}+\delta_{-1/2}.$$

Но поскольку

$$\delta_{-1/2}=\delta_{1/2}-\delta_0^2,$$

то

$$B=\delta_{1/2}-\frac{1}{2}\delta_0^2.$$

Складывая оба уравнения, получаем

$$2A+2C=f_1+f_{-1}.$$

Подстановка вместо A его значения f_0 дает

$$\begin{aligned}2C&=f_1-2f_0+f_{-1}=\\&=(f_1-f_0)-(f_0-f_{-1})=\\&=\delta_{1/2}-\delta_{-1/2}=\\&=\delta_0^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x)=f_0+\left(\delta_{1/2}-\frac{1}{2}\delta_0^2\right)x+\frac{1}{2}\delta_0^2x^2=f_0+\delta_{1/2}x+\delta_0^2x(x-1)/2,$$

или, когда x равно n,

$$f_n=f_0+\delta_{1/2}n+\delta_0^2n(n-1)/2.$$

Это один пример формулы для интерполирования со вторыми разностями. Формула, включающая влияние третьих или более высоких разностей, может быть найдена аналогичным методом. Формулу можно применять в приведенной выше форме или преобразовать многочисленными способами, используя определения δ и δ^2 через f или группируя члены различными путями. Одной формой, особенно удобной для вычислений в уме, является

$$f_n=f_0+\left[\delta_{1/2}-\frac{1}{2}(1-n)\delta_0^2\right]n.$$

Другая форма, известная как формула Лагранжа, имеет следующий вид:

$$f_n = f_{-1}\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) + f_0(1-n^2) + f_1\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right).$$

Если $n = \frac{1}{2}$, то она принимает простой вид

$$f_{1/2} = -\frac{1}{8}f_{-1} + \frac{3}{4}f_0 + \frac{3}{8}f_1.$$

Формула Лагранжа обладает кажущимся преимуществом, не требуя разностей, однако сомнительно, является ли это преимущество реальным. Для каждой рукописной таблицы, а также большинства печатных таблиц необходимо вычислить разности перед их применением, чтобы убедиться в их правильности. Как только разности образованы, они обычно могут с успехом использоваться при интерполировании, так как функции от n требуются с меньшим числом значащих цифр, чем само n, тогда как в случае формулы Лагранжа все числовые коэффициенты необходимо брать с той же точностью, что и интерполируемая функция. Кроме того, как это мы увидим дальше, не зная величины разностей, невозможно сказать, сколько значений f требуется в каждом частном случае.

5. Формулы Эверетта и Бесселя. Как только усвоены общие принципы, при помощи которых можно строить интерполяционные формулы, не обязательно рассматривать подробный вывод всех тех формул, которые могут использоваться на практике. Из них в большинстве случаев наиболее полезными оказываются формулы Эверетта и Бесселя.

Формула Эверетта имеет следующий вид:

$$f_n = f_0 + n\delta_{1/2} + E_0^2\delta_0^2 + E_1^2\delta_1^2 + E_0^4\delta_0^4 + E_1^4\delta_1^4 + \ldots,$$

где

$$E_0^2 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}, \qquad E_1^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{2\cdot 3},$$

$$E_0^4 = -\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$E_1^4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

Формула Бесселя имеет вид

$$f_n = f_0 + n\delta_{1/2} + B^2(\delta_0^2 + \delta_1^2) + B^3\delta^3{}_{1/2} + B^4(\delta_0^4 + \delta_1^4) + B^5\delta^5{}_{1/2} + \ldots,$$

где

$$B^2 = \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}, \qquad B^3 = \frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 3},$$

$$B^4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \qquad B^5 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Число членов, используемых при каждом отдельном применении интерполяционной формулы, зависит от величины погрешности, допустимой в результате, и от величины разностей. Обычно считается допустимым оборвать формулу в том месте, где величина наибольшего отброшенного члена не превосходит половины единицы последнего десятичного знака значения функции. Крайние значения бесселевых коэффициентов приближенно равны

$$B^2, \quad -\frac{1}{16}; \qquad B^3, \quad \pm\frac{1}{125};$$
$$B^4, \quad +\frac{1}{85}; \qquad B^5 \quad \pm\frac{1}{1150}.$$

Из них легко выводятся следующие удобные предельные значения разностей, которыми можно пренебречь:

Отбрасываемая разность	Вторая	Третья	Четвертая	Пятая
Наибольшее численное значение	4	60	20	500

Таким образом, если четвертая разность больше 20 и пятая разность меньше 500, то следует применять первые пять членов формулы Бесселя. При использовании формулы Эверетта ограничиваются четным числом членов, так как E_0 и E_1 одного и того же порядка величины. Точность любого четного числа членов формулы Эверетта как раз равна точности того же числа членов формулы Бесселя. Поэтому первые четыре члена формулы Эверетта включают влияние третьих разностей и первые шесть включают влияние пятых разностей. Вообще следует предпочесть формулу Эверетта, когда наивысший порядок учитываемых разностей нечетен, и формулу Бесселя — если он четен; однако можно использовать пятый член формулы Бесселя вместе с первыми четырьмя членами формулы Эверетта, когда необходимо учесть четвертые разности, пренебрегая пятыми.

В тех случаях, когда четвертыми разностями пренебречь нельзя, любая из приведенных формул может быть тем не менее ограничена первыми четырьмя членами при использовании мощного приема, известного как *метод смещения* (метод модифицированных разностей [1])), изобретение которого приписывают Лагранжу. Легко видеть, что

$$B^4/B^2=(n+1)(n-2)/12$$

и что при изменении n между 0 и 1 эта функция меняется в узких пределах со средним значением, равным приблизительно $-0{,}184$. Если мы положим

$$M^2=\delta^2-0{,}184\delta^4,$$

то полученную таким образом вторую модифицированную разность M^2 можно использовать вместо δ^2 в формуле Эверетта или в формуле Бесселя с погрешностью, меньшей половины единицы, если δ^4 меньше 1000. В таких случаях почти всегда следует применять метод смещения.

Вычисление коэффициентов формул Бесселя и Эверетта несколько утомительно, особенно для высших порядков. Поэтому они подробно

[1]) См., например, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*

табулированы как функции от n. В практических вычислениях можно затратить впустую много труда из-за удержания в этих коэффициентах большего числа знаков, чем требуется на самом деле. Как общее правило, интерполяционные коэффициенты необходимы с тем же числом *десятичных знаков*, что и число *значащих цифр* в разностях, на которые они умножаются.

6. Формула Ньютона. Формулы Эверетта и Бесселя известны как центрально-разностные формулы, так как все разности, входящие в них, расположены вблизи центра используемой части таблицы. В другом типе формулы, введенном Ньютоном, используются диагональные разности. Эту формулу можно написать в следующем виде:

$$f_n = f_0 + n\delta_{1/2} + \frac{n(n-1)}{2!}\delta_1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta^3_{3/2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\delta_2^4 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+m+1)}{m!}\delta^m_{m/2} + \ldots,$$

известном под названием «формула для интерполирования вперед», или в виде

$$f_n = f_0 + n\delta_{-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!}\delta^2_{-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\delta^3_{-3/2} + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\delta^4_{-2} + \\ + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{m!}\delta^m_{-m/2} + \ldots,$$

известном как «формула интерполирования назад».

Формула для интерполирования вперед иногда полезна для интерполяции вблизи начала таблицы, где может не оказаться центральных разностей, а формулу для интерполирования назад можно использовать около конца таблицы. Однако основную ценность эта формула представляет для экстраполяции в связи с интегрированием шаг за шагом (разд. 12). Ее можно также использовать для расширения таблицы, полагая $n = -1$ в формуле для интерполирования вперед или $n = 1$ в формуле для интерполирования назад, однако даже в тех случаях, когда это вообще предпринимается, обычно не следует применять указанный прием больше чем для одного шага из-за быстрого накопления погрешностей. Применение формулы Ньютона для расширения таблицы в точности равносильно допущению, что разности наивысшего порядка, принимаемые во внимание, постоянны. Этот результат можно получить простым переписыванием значения разности самого высокого порядка непосредственно внизу и расширением таблицы вниз и влево при помощи последовательных сложений.

7. Формула Лагранжа для интерполирования на середину. Хотя формула Лагранжа не рекомендуется для общего применения, все же в одном случае ее удобство может перевесить ее недостатки: это случай интерполирования на середину при помощи счетной машины. Формула четырех точек, которую необходимо применять в тех случаях, когда можно пренебречь четвертыми разностями, принимает очень простой вид

$$f_{1/2}=\frac{1}{16}\left(-f_{-1}+9f_0+9f_1-f_2\right),$$

а формула шести точек, используемая, когда отбрасываются шестые разности, имеет вид

$$f_{1/2}=\frac{1}{256}\left(3f_{-2}-25f_{-1}+150f_0+150f_1-25f_2+3f_3\right).$$

8. **Обратное интерполирование.** Это название дано процессу нахождения численного значения независимой переменной по данному значению функции. Эта проблема является часто весьма трудной, если применяются аналитические методы, но при помощи численных методов она оказывается лишь немного более трудной, чем прямое интерполирование. Формулу можно легко вывести, разрешая любую интерполяционную формулу относительно n и выражая этим n через f_n, f_0 и разности. Но если эта формула оборвана на разностях какого-либо порядка, например j-го, то легко видеть, что n необходимо определить решением уравнения j-й степени, которое может оказаться очень трудным. Поэтому лучше прибегнуть к помощи *метода итерации*, частного случая *метода последовательных приближений*. При использовании этого мощного численного метода формулу преобразуют таким образом, что подстановка в нее приближенного значения результата дает более точное значение, и этот процесс можно повторить сколько угодно раз. В настоящей задаче приближенное значение n определяется при помощи линейной обратной интерполяции. Это значение n используется для получения приближенных значений интерполяционных коэффициентов, которые могут быть затем использованы для определения более точного значения n. Например, формулу Бесселя можно применить в следующем виде:

$$n\delta_{1/2}=f_n-f_0-B^2\left(\delta_0^2+\delta_1^2\right)-B^3\delta_{1/2}^3,$$

где сумму $\delta_0^2+\delta_1^2$ следует заменить на $M_0^2+M_1^2$, если четвертые разности ощутимы и не слишком велики, чтобы можно было применить метод смещения. Препебрегая членами, содержащими B^2 и B^3, в первом приближении можно легко разрешить это уравнение относительно n. Используя это значение n для определения B^2 и B^3, можно снова разрешить это уравнение относительно n и это новое значение n употребить для получения улучшенных значений B^2 и B^3. Этот процесс следует повторять до тех пор, пока значение n не перестанет изменяться при дальнейших повторениях.

При обратной интерполяции необходима значительная осторожность. Значение n нельзя получать с большим числом значащих цифр, чем содержащееся в $\delta_{1/2}$. Если написать дополнительные цифры, то они могут ввести вычислителя в заблуждение, так как у него может создаться впечатление, что он получает большую точность, чем имеет на самом деле. Следует всегда быть настороже в отношении «сфабрикованных десятичных знаков», которые могут быть оправданы лишь в очень редких случаях. Хорошо известный пример — это те затруднения, которые возникают при попытках определения малого угла по его косинусу. Один из путей преодоления этой трудности состоит в вычислении первой разности с большим числом десятичных знаков. Однако обычно лучше избежать такого затруднения посредством целесообразного преобразования. Вместо косинуса, например, можно использовать синус-верзус[1]) или $\sin^2$ половинного аргумента.

9. Погрешность интерполированной величины. Выше было указано, что максимальная погрешность значения функции, которое вычислено со всей возможной тщательностью, равна $\pm 0{,}5$ единицы последнего десятичного знака. Кроме того, все значения погрешности внутри этих пределов равновозможны, это значит, что около половины погрешностей широкого ряда значений лежит в пределах $\pm 0{,}25$, остальные погрешности расположены вне этих пределов. Этот факт можно выразить утверждением, что вероятная ошибка равна $\pm 0{,}25$. Еще одна погрешность вносится процессом интерполирования. Если вторые и более высокие разности равны нулю и если проинтерполированная величина округлена с точностью до того же числа десятичных знаков, что и табличное значение, то вносится еще одна аналогичная погрешность. В этом случае максимальная погрешность интерполированной величины равна $\pm 1{,}0$, а вероятная ошибка равна приблизительно $\pm 0{,}3$. Немного большую точность можно получить удержанием дополнительных цифр в интерполированной величине. Если это сделано, то погрешность интерполированной величины лишь немного больше погрешности табличного значения. Однако, вообще говоря, дополнительные цифры не стоят того, чтобы затруднять себя их записыванием. Они не являются значащими цифрами в любом смысле этого слова; первый лишний десятичный знак отягощен погрешностью в 5 единиц, а второй — совершенно фиктивен.

На практике вторые разности обычно отличны от нуля, и если их отбрасывают, то вводится дополнительная погрешность, которая в максимуме может достигать 1/8 второй разности. Поскольку обычно принято пренебрегать влиянием вторых разностей и разностей более высоких порядков, если они меньше 0,5, то можно установить в качестве общего правила, что максимальная погрешность интерполированной величины несколько больше $\pm 1{,}5$ единицы, а ее вероятная ошибка близка к $\pm 0{,}5$ единицы.

Погрешность величины, полученной при помощи обратного интерполирования, определяется другими законами. Если погрешности табличных функций удерживаются в пределах $\pm 0{,}5$, то погрешность любой первой разности лежит в пределах $\pm 1{,}0$, а погрешность результата будет заключена в пределах $\pm 1/\delta$, если влияние разностей выше первого порядка неощутимо.

10. Численное дифференцирование. Мы видели в разд. 2, что разности функции последовательных порядков тесно связаны с последовательными производными. Чтобы найти точное выражение для производных через разности, необходимо лишь продифференцировать любую из интерполяционных формул столько раз, сколько потребуется. Мы имеем

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dn}\,\frac{dn}{dx},$$

но

$$\frac{dn}{dx}=\frac{1}{w}$$

[1]) Обращенный синус, или синус-верзус, аргумента α определяется как $\operatorname{vers}\alpha = 1-\cos\alpha$. — *Прим. ред.*

и, следовательно,

$$w\frac{df}{dx}=\frac{df}{dn}.$$

Аналогично

$$w^2\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2f}{dn^2} \quad \text{и т. д.}$$

Например, дифференцирование формулы Бесселя дает

$$w\frac{df}{dx}=\delta_{1/2}+(\delta_0^2+\delta_1^2)\left(\frac{2n-1}{4}\right)+\delta_{1/2}^3\left(\frac{3n^2-3n-\frac{1}{2}}{6}\right)+\ldots .$$

Другие формы можно получить при помощи перегруппировки членов и простых подстановок. Обычно производная требуется либо для точки табулирования, либо для средней точки. Далее следуют некоторые наиболее полезные формулы:

$$w\left(\frac{df}{dx}\right)_0=\mu\delta_0-\frac{1}{6}\mu\delta_0^3+\frac{1}{30}\mu\delta_0^5+\frac{1}{140}\mu\delta_0^7+\frac{1}{630}\mu\delta_0^9-\frac{1}{2772}\mu\delta_0^{11}+\ldots, \quad (3)$$

$$w^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0=\delta_0^2-\frac{1}{12}\delta_0^4+\frac{1}{90}\delta_0^6-\frac{1}{560}\delta_0^8+\frac{1}{3150}\delta_0^{10}-\ldots, \quad (4)$$

$$w\left(\frac{df}{dx}\right)_{1/2}=\delta_{1/2}-\frac{1}{24}\delta_{1/2}^3+\frac{3}{640}\delta_{1/2}^5-\frac{5}{7168}\delta_{1/2}^7+\frac{35}{294912}\delta_{1/2}^9-\ldots, \quad (5)$$

$$w^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{1/2}=\mu\delta_{1/2}^2-\frac{5}{24}\mu\delta_{1/2}^4+\frac{259}{5760}\mu\delta_{1/2}^6-\frac{3229}{322560}\mu\delta_{1/2}^8+\ldots . \quad (6)$$

Таблица 7 иллюстрирует принцип численного дифференцирования.

Таблица 7

Значения sin x

x	$f=\sin x$	f^{I}	f^{II}	f^{III}
—30°	—0,50000			
		+15798		
—20	—0,34202		+1039	
		+16837		—511
—10	—0,17365		+528	
		+17365		—528
0	0,00000		0	
		+17365		—528
+10	+0,17365		—528	
		+16837		—511
+20	+0,34202		—1039	
		+15798		
+30	+0,50000			

При $x=0$ и $n=0$ мы имеем

$$+10^\circ\frac{df}{dx}=+0{,}17365+0{,}00088=+0{,}17453.$$

При изучении исчисления бесконечно малых обычно не обязательно рассматривать вопрос о том, в каких единицах может быть выражена функция или ее независимая переменная, но при вычислительной работе необходимо всегда помнить об этом. Производная от функции принимает различные численные значения в соответствии с применяемыми единицами. В рассмотренном примере аргумент x выражен в градусах дуги. Следовательно, мы можем сказать, что значение производной df/dx при $x=0$ равно 0,17453 на 10°, или 0,017453 на 1°, или 1,00000 на 1 *рад* (вспоминая, что 1 *рад* равен 57°,29578) или, для краткости, просто 1,00000.

11. Специальные формулы. Особенно полезную форму формулы (3) можно получить, подставляя вместо разностей их значения, выраженные через значения функций. Таким образом, если пятые разности меньше 15, то

$$12w\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2, \tag{7}$$

и, если седьмые разности меньше 70, имеем

$$60w\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = -f_{-3} + 9f_{-2} - 45f_{-1} + 45f_1 - 9f_2 + f_3. \tag{8}$$

12. Численное интегрирование. В небесной механике необходимо рассмотреть численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В наиболее распространенном случае, которому посвящена следующая глава, интегрируется система трех дифференциальных уравнений второго порядка, чтобы определить прямоугольные координаты планеты или кометы в функции времени. Этот раздел посвящен рассмотрению двух более простых примеров.

Применяемый метод в точности противоположен численному дифференцированию, при котором разности функции используются для вычисления производных и даются соответствующие формулы. В настоящей задаче сначала вычисляются производные от функции, а их разности образуются для контроля. Получающаяся при этом таблица затем расширяется налево при помощи *суммирования*, т. е. путем последовательного сложения следующих друг за другом значений производной с некоторым *начальным значением*. Окончательные значения интегралов вычисляются по суммам при помощи формулы. Формулы для этой цели можно вывести, интегрируя интерполяционную формулу, в которой n рассматривается как независимая переменная. Эти необходимые формулы даны ниже; в них первая сумма обозначена через ${}^{\mathrm{I}}f$, а вторая сумма — через ${}^{\mathrm{II}}f$.

$$\int^{1/2} f(x)\,dx = w\left[{}^{\mathrm{I}}f_{1/2} + \frac{1}{24}\delta_{1/2} - \frac{17}{5760}\delta^3_{1/2} + \frac{367}{967680}\delta^5_{1/2} - \dots\right], \tag{9}$$

$$\int\int^{0} f(x)\,dx^2 = w^2\left[{}^{\mathrm{II}}f_0 + \frac{1}{12}f_0 - \frac{1}{240}\delta^2_0 + \frac{31}{60480}\delta^4_0 - \dots\right]. \tag{10}$$

В качестве первого примера рассмотрим $y=\int(3x^2-3)dx$. Известно, что результат интегрирования имеет вид $y=x^3-3x+C$, где C — некоторая произвольная постоянная. Слово *произвольная* означает, что какая бы постоянная ни была выбрана, результат является точным с с математической точки зрения. Однако следует заметить, что нельзя получить никакого численного значения y, пока не будет известна определенная величина постоянной C. В физических проблемах постоянные интегрирования определяются *начальными условиями*, которые в этом примере сводятся просто к численному значению y для некоторого частного значения x. (При двойном интегрировании требуется либо два значения y, либо одно значение y и одно значение его первой производной.) В рассматриваемой задаче начальное условие находится в нашем распоряжении; мы выберем его так, чтобы получить полином из разд. 2, а именно $x^3-3x-23$.

Сначала вычисляем несколько значений $3x^2-3$, для которых затем составляем разности. Результаты приводятся в табл. 8, где еще необходимо заполнить столбец первых сумм ${}^{\mathrm{I}}f$.

Таблица 8

Численное интегрирование

x	${}^{\mathrm{I}}f$	f	f^{I}	f^{II}	y	y^{I}	y^{II}	y^{III}
−3		+24						
	−30,5		−15		−31,125			
−2		+9		+6		+9,25		
	−21,5		−9		−21,875		−9	
−1		0		+6		+0,25		+6
	−21,5		−3		−21,625		−3	
0		−3		+6		−2,75		+6
	−24,5		+3		−24,375		+3	
+1		0		+6		+0,25		+6
	−24,5		+9		−24,125		+9	
+2		+9		+6		+9,25		+6
	−15,5		+15		−14,875		+15	
+3		+24		+6		+24,25		+6
	+8,5		+21		+9,375		+21	
+4		+45		+6		+45,25		
	+53,5		+27		+54,625			
+5		+72						

Очевидно, что значения ${}^{\mathrm{I}}f$, полученные суммированием, будут находится на половинных строках, и поэтому требуется начальное значение, соответствующее некоторому значению аргумента на половинной строке. Значение y для $x=+0{,}5$, определенное непосредственной подстановкой, равно $-24{,}375$. Значение первой суммы ${}^{\mathrm{I}}f$ в этой же точке определяется формулой (9). Таким образом

$$-24{,}375=w\left\{{}^{\mathrm{I}}f_{1/2}+\frac{1}{24}(+3)\right\}$$

и поскольку мы имеем $w=1$, то ${}^{\mathrm{I}}f_{1/2}=-24{,}5$. Внося это значение в таблицу, легко расширить последнюю сколь угодно далеко в любом направлении. По этим значениям ${}^{\mathrm{I}}f$ соответствующие значения y можно найти по формуле (9). Они приводятся справа в табл. 8 вместе с их разностями. Если эту таблицу из y проинтерполировать на середину, то полученные результаты будут согласовываться с таблицей, помещенной в разд. 2.

Этот первый пример отличается от интегрирования уравнений движения планеты, кометы или спутника по орбите в двух важных отношениях. Во-первых, результаты являются точными, не отягощенными ошибками округления. Во-вторых, значения интегрируемой функции можно было бы все вычислить заранее. При интегрировании уравнений движения этого сделать нельзя, так как интегрируемая функция может быть определена только после того, как станет известным значение интеграла, причем от шага к шагу необходимо переходить путем экстраполяции с последовательными приближениями на каждом шаге. На любом этапе вычислений таблица значений вторых сумм ${}^{II}f$ экстраполируется на один шаг в предположении, что разности некоторого порядка (обычно вблизи шестого) постоянны. Затем вычисляется соответствующее значение y и проверяется, дает ли оно экстраполированное значение f; если нет, то это значение исправляется. Чтобы иллюстрировать этот процесс, мы проинтегрируем уравнения движения некоторой гипотетической планеты с пренебрежимо малой массой, которая движется по орбите только под действием притяжения Солнца от перигелия к афелию. Известно, что эта орбита является эллипсом. Пусть большая полуось эллипса равна 2 а. е., а эксцентриситет равен 0,2. Примем плоскость орбиты за плоскость отсчета xy и направим ось X в перигелий. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{r^3},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, а k есть гауссова постоянная, равная 0,017 202 098 95.

Известно, что эти уравнения справедливы при фиксированном значении k, если x, y и r измеряются в астрономических единицах, а t измеряется в эфемеридных сутках. Эмпирическим путем найдено, что для орбиты такого размера и формы нужную сходимость разностей дает табличный интервал в 20 суток, но для экономии места при печатании разностей в этом примере используется интервал в 10 суток. Таким образом, величина $w^2 = 100$ будет множителем, необходимым для превращения вторых сумм для $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ в x и y. Однако оказывается несколько неудобным умножать $-x/r^3$ и $-y/r^3$ на малый множитель k^2 и после этого их вторые суммы — на 100. Лучше сохранить ${}^{II}f_x$ и ${}^{II}f_y$ с тем же порядком величины, что и порядок x и y, что легко сделать, выбирая уравнения, подлежащие интегрированию, в следующем виде:

$$f_x = -w^2k^2\frac{x}{r^3}, \tag{11}$$

$$f_y = -w^2k^2\frac{y}{r^3}, \tag{12}$$

где множитель w^2k^2 равен 0,0295 9122 для 10-дневного интервала.

Таблица 9

Начальные значения

t	l	u	$\cos u$	$\sin u$	x	y
−30	−10,4539	−13,0393	+0,974216	−0,225620	+1,54843	−0,44212
−20	−6,9693	−8,7033	+0,988485	−0,151318	+1,57697	−0,29652
−10	−3,4846	−4,3547	+0,997113	−0,075931	+1,59423	−0,14879
0	0,0000	0,0000	+1,000000	0,000000	+1,60000	0,00000
+10	+3,4846	+4,3547	+0,997113	+0,075931	+1,59423	+0,14879
+20	+6,9693	+8,7033	+0,988485	+0,151318	+1,57697	+0,29652
+30	+10,4539	+13,0393	+0,974216	+0,225620	+1,54843	+0,44212

Поскольку начало счета времени находится в нашем распоряжении, то мы принимаем за него момент прохождения через перигелий. Две постоянные интегрирования непосредственно получаются из размеров и ориентации орбиты. Мы имеем $x_0 = r_0 = a(1-e) = 1{,}6$ a. e. и $y_0 = 0$. За другие две постоянные мы выбираем $wk\dot{x}_0$ и $wk\dot{y}_0$; $wk\dot{x}_0 = 0$, поскольку $\dot{x}_0 = 0$, а $wk\dot{y}_0 = wka^{1/2}r^{-1}(1-e^2)^{1/2} = 0{,}1489745$. Чтобы начать интегрирование, удобно вычислить семь последовательных значений f_x и f_y. Среднее движение в градусах дуги за сутки равно $57°{,}2957795\, ka^{-3/2} = 0°{,}348464933$; это значение среднего суточного движения используется для получения значений средней аномалии. Эксцентрическая аномалия определяется при помощи уравнения Кеплера, а x и y — по формулам

$$x = a(\cos u - e),$$
$$y = a(1-e^2)^{1/2}\sin u.$$

По этим значениям x и y мы сначала находим r, затем $1/r^3$, потом w^2k^2/r^3 и, наконец, f_x и f_y. По этим значениям составляют первые семь строк табл. 10 и 11, оставляя столбцы сумм ${}^{II}f$ и ${}^{I}f$ пока свободными для заполнения в дальнейшем.

Начальные значения ${}^{II}f_0$ и ${}^{I}f_{1/2}$ получаются по формулам следующего вида:

$$ {}^{II}f_0 = x_0 - \frac{1}{12}f_0 + \frac{1}{240}\delta_0^2 - \frac{31}{60480}\delta_0^4, \tag{13}$$

$$ {}^{I}f_{1/2} = wk\dot{x}_0 + \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{12}\mu\delta_0 - \frac{11}{720}\mu\delta_0^3 + \frac{191}{60480}\mu\delta_0^5, \tag{14}$$

причем $\mu\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_{-1/2} + \delta_{1/2})$, с двумя аналогичными уравнениями для y и $\dot{y}$. Теперь эти таблицы можно расширить по усмотрению вниз и налево до $t = 40$.

Следующий шаг состоит в вычислении f_x и f_y для $t = 40$. Для этого необходимы значения x и y. Предварительные значения x и y можно найти по формуле (10), экстраполируя необходимые для этого значения в таблицах при переписывании значения разности f^V в две ближайшие нижние строки. Значения x и y, полученные таким путем, достаточно точны, чего, однако, нельзя сказать о разностях, которые вписаны по усмотрению при экстраполяции и должны быть перевычислены после того, как значения f_x и f_y станут известны. Вместо формулы (10) удобнее воспользоваться формулой, которая определяет предварительные значения x и y, выражая их через уже известные диагональные разности. Такого рода формулу можно получить, дважды интегрируя формулу Ньютона для интерполирования назад. После небольших преобразований мы находим следующую формулу:

$$ \begin{aligned} x_0 = {}^{II}f_0 + \frac{1}{12}f_{-1} + \frac{1}{12}\delta_{-3/2} + 0{,}0791667\delta_{-2}^2 + 0{,}075\delta_{-5/2}^3 + \\ + 0{,}07135\delta_{-3}^4 + 0{,}0682\delta_{-7/2}^5 + 0{,}065\delta_{-4}^6 + 0{,}06\delta_{-9/2}^7 \end{aligned} \tag{15}$$

с точностью, достаточной для большинства практических приложений.

Формула для интегрирования вперед, применяемая для интегрирования назад, может быть получена из этой формулы простой переменой знаков у всех нижних индексов и коэффициентов членов нечетного порядка. Результаты, полученные применением этой формулы, исполь-

Таблица 10

Интегрирование для x

t	$^{II}f_x$	$^{I}f_x$	f_x	f_x^{I}	f_x^{II}	f_x^{III}	f_x^{IV}	f_x^{V}
—30			—109729					
				—3220				
—20			—112949		+1245			
				—1975		+63		
—10			—114924		+1308		—37	
				—667		+26		—15
0	+1,6009638		—115591		+1334		—52	
		—57796		+667		—26		+15
10	+1,5951842		—114924		+1308		—37	
		—172720		+1975		—63		—7
20	+1,5779122		—112949		+1245		—44	
		—285669		+3220		—107		+15
30	+1,5493453		—109729		+1138		—29	
		—395398		+4358		—136		+8
40	+1,5098055		—105371		+1002		—21	
		—500769		+5360		—157		+8
50	+1,4597286		—100011		+845		—13	
		—600780		+6205		—170		+8
...	...		...		...		...	
		...		...		...		...
500	—2,3933823		+51314		—45		+1	
		—59327		+51		+1		—3
510	—2,3993150		+51365		—44		—2	
		—7962		+7		—1		
520	—2,4001112		+51372		—45			
		+43410		—38				
530	—2,3957702		+51334					
		+94744						
540	—2,3862958		+51253					

Таблица 11

Интегрирование для y

t	$^{II}f_y$	$^{I}f_y$	f_y	f_y^{I}	f_y^{II}	f_y^{III}	f_y^{IV}	f_y^{V}
—30			+31331					
				—10093				
—20			+21238		—419			
				—10512		+205		
—10			+10726		—214		+9	
				—10726		+214		—9
0	0,0000000		0		0		0	
		+1488848		—10726		+214		—9
10	+0,1488848		—10726		+214		—9	
		+1478122		—10512		+205		—15
20	+0,2966970		—21238		+419		—24	
		+1456884		—10093		+181		—3
30	+0,4423854		—31331		+600		—27	
		+1425553		—9493		+154		—11
40	+0,5849407		—40824		+754		—38	
		+1384729		—8739		+116		+4
50	+0,7234136		—49563		+870		—34	
		+1335166		—7869		+82		—4
...	...		...		...		...	
		...		...		...		...
500	+0,1642454		—3521		—7		+3	
		—991836		+2128		+5		—4
510	+0,0650618		—1393		—2		—1	
		—993229		+2126		+4		
520	+0,0342611		+733		+2			
		—992496		+2128				
530	—0,1335107		+2861					
		—989635						
540	—0,2324742		+4993					

зуются для того, чтобы начать третью таблицу, которая содержит x, y и r^2. Если в распоряжении имеется таблица, дающая $1/r^3$ по аргументу r^2, то ничего больше записывать не нужно; $1/r^3$ можно набрать на клавиатуре вычислительной машины, умножить на w^2k^2, произведение перенести на клавиатуру и умножить сначала на $-x$, затем на $-y$, получая значения f_x и f_y, которые вносятся в таблицы интегрирования. Вычислитель быстро научится на опыте оценивать, имеет ли смысл записывать значения $1/r^3$ и вычислять для контроля разности этих величин. Может даже потребоваться вычисление разностей x и y, если вычислитель склонен допускать большое количество ошибок. Во всяком случае, единственный контроль всей работы в целом дается разностями в таблицах интегрирования; необходимо особо заботиться о том, чтобы эти разности были правильно записаны. Из-за накопления ошибок округления последний десятичный знак x и y становится неверным после нескольких шагов интегрирования, и его обычно разрешается отбрасывать.

Записав значения f_x и f_y для $t=40$ в таблицы интегрирования, можно вписать диагональные разности вверху и направо, но прежде чем вписывать диагональные разности с левой стороны, необходимо проверить предварительные значения x и y при помощи более точной формулы

$$x_0={}^{\mathrm{II}}f_0+\frac{1}{12}f_0+\frac{1}{240}\delta^2_{-1}-\frac{1}{240}\delta^3_{-3/2}-0{,}00365\delta^4_{-2}-0{,}0031\delta^5_{-5/2}-0{,}003\delta^6_{-3}. \quad (16)$$

Если новые значения x и y отличаются от предварительных значений на половину единицы или более, то их следует исправить и проверить значения f_x и f_y, чтобы выяснить, не нуждаются ли также они в исправлении. Если это необходимо, то в таблицу интегрирования следует вписать исправленные значения f_x и f_y, исправить разности и снова применить формулу (16). Вообще табличный интервал следует выбрать таким, чтобы предварительные значения x и y нуждались в исправлении на несколько единиц последнего десятичного знака, и достаточно малым, чтобы предварительные значения f_x и f_y лишь изредка требовали изменения.

Когда получены окончательные значения f_x и f_y, таблицы можно расширить налево, получая значения вторых сумм ${}^{\mathrm{II}}f_x$ и ${}^{\mathrm{II}}f_y$ для $t=50$. Этим завершается первый шаг интегрирования. Второй шаг подобен первому; и правила для любого шага можно свести к следующим:

1. Завершив заполнение диагонали таблиц интегрирования, найти при помощи формулы (15) предварительные значения x и y.

2. Вычислить f_x и f_y по дифференциальным уравнениям и записать их в таблицы, вписывая разности вверх и направо.

3. Проверить x и y по формуле (16); исправить их, если необходимо, и снова проверить f_x и f_y. Затем закончить эту диагональ таблиц.

В приведенном примере табличный интервал настолько мал, что вряд ли необходим этап 3. Такой малый интервал дает выигрыш при вычислении одного шага, но требует большего числа шагов, чем необходимо, а потому малый интервал не дает экономии труда вычислителя в целом. Кроме того, накопление ошибок в последнем знаке в этом случае больше обычного.

Мы не приводим здесь полных таблиц интегрирования, а только несколько строк начала и конца интегрирования.

13. Накопление ошибок при численном интегрировании. В общем невозможно определить, какой величины ошибка накапливается при интегрировании, однако при помощи теории ошибок можно установить, какую вероятную ошибку следует ожидать после любого числа шагов. Тем не менее для примера из предыдущего раздела теория эллиптического движения дает возможность точного определения этой погрешности. Точные координаты и скорости в афелии найдены равными $x = -2{,}4$ а. е., $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -0{,}5773503$ а. е. за эфемеридные сутки. Эта теория также дает время прохождения через перигелий, равное $t = 516{,}551259$. Можно использовать формулы (13) и (14) для получения координат и компонентов скорости для нескольких дат, интерполируемых затем на этот момент. В результате получается

$$x = -2{,}3999888, \quad wk\dot{x} = +0{,}0000007, \quad \dot{x} = +0{,}0000041,$$

$$y = -0{,}0000047, \quad wk\dot{y} = -0{,}0993166, \quad \dot{y} = -0{,}5773516.$$

Легко видеть, что погрешности в значениях x и y больше погрешностей в $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Этого можно было ожидать, так как погрешность в f на каком-либо шаге интегрирования создает равную погрешность во всех последующих значениях ${}^{\mathrm{I}}f$, тогда как соответствующая погрешность в ${}^{\mathrm{II}}f$ возрастает на эту величину при каждом шаге.

Общая теория накопления погрешностей при численном интегрировании указывает, что после n шагов вероятная ошибка двойного интеграла равна $0{,}1124\,n^{3/2}$ (в единицах последнего десятичного знака). Это означает, что при большом числе примеров около половины погрешностей будет больше этого значения, а половина — меньше. В рассматриваемом примере $n = 52$, что дает значение 42 для вероятной ошибки x и y. Обе фактические ошибки больше этой вероятной ошибки, и этому не следует удивляться отчасти из-за того, что общая теория применима только в том случае, когда интегрирование выполнено для ряда обращений планеты, отчасти из-за того, что двух примеров недостаточно для проверки любой теории ошибок.

Применение приведенного выше выражения для вероятной ошибки даст возможность программисту решить перед началом интегрирования, с каким числом десятичных знаков следует проводить работу. Допустим, например, что необходимо выполнить численное интегрирование для астероида на 10 лет с 10-дневным интервалом, т. е. для 365 шагов или на 183 шага в каждую сторону, если интегрирование начинается в середине дуги орбиты. Вероятная ошибка после 183 шагов равна приблизительно 280. Предположим, далее, что вероятная ошибка в $0'',1$, или 0,0000005 *рад*, является наибольшей, которую можно допустить. Сравнение этого значения с 280 показывает, что при вычислениях необходимо девять десятичных знаков.

Этот критерий необходимо применять всегда перед началом любого интегрирования. Иначе программист либо получит недопустимые погрешности в своей работе, либо затратит много бесполезного труда, оперируя с лишними десятичными знаками.

Общая теория накопления погрешностей находит важное приложение к ошибкам оскулирующих кеплеровых элементов орбиты, полученным при помощи численного интегрирования. Ею доказано, что средняя ошибка средней долготы в орбите пропорциональна числу шагов в степени 3/2, тогда как средние ошибки остальных пяти элементов пропорциональны квадратному корню из числа шагов. Это верно как в том случае, когда эти элементы получены непосредственно интегрированием, так и в том, когда они определены после него при помощи преобразования прямоугольных координат и компонент скоростей.

14. Символические операторы. Все формулы, приводившиеся до сих пор в этой главе, а также большинство других можно вывести очень элегантным и простым способом при помощи символических операторов, которые мы рассмотрим в этом разделе. Однако сначала мы сделаем несколько замечаний относительно интерполирования с более общей точки зрения, чем ранее.

Пусть значения какой-либо функции $f(x)$ заданы для n дискретных значений x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не обязательно составляют арифметическую прогрессию, а могут быть какими угодно значениями x. Рассмотрим следующий полином:

$$\varphi(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}f(x_2)+$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}f(x_n).$$

Очевидно, $\varphi(x)=f(x_1)$ при $x=x_1$, поскольку все коэффициенты обращаются в нуль, за исключением одного коэффициента, умноженного на $f(x_1)$, который становится равным единице. Аналогично $\varphi(x)=f(x_2)$ при $x=x_2$ и т. д. Этот полином называется интерполяционной формулой Лагранжа и представляет собой обобщенный вид формулы, приведенной ранее под тем же названием.

Частное

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

называется первой разделенной разностью функции $f(x)$; для краткости мы обозначаем ее следующим символическим обозначением: $[k,\ k+1]$. Вторая разделенная разность обозначается $[k,\ k+1,\ k+2]$ и дается формулой

$$[k,\ k+1,\ k+2]=\frac{[k+1,\ k+2]-[k,\ k+1]}{x_{k+2}-x_h}.$$

Аналогичным образом p-я разделенная разность дается формулой

$$[k,\ k+1,\ \ldots,\ k+p]=\frac{[k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+p]-[k,\ k+1,\ \ldots,\ k+p-1]}{x_{k+p}-x_h}.$$

Мы можем расширить это понятие разделенных разностей, чтобы включить случай, когда x не является одним из дискретных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда мы можем написать

$$[x,\ 1]=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

или еще короче

$$[x,\ 1]=\frac{f_1-f}{x_1-x},$$

откуда

$$f=f_1+[x,\ 1](x-x_1).$$

Аналогично

$$[x,\ 1,\ 2]=\frac{[1,\ 2]-[x,\ 1]}{x_2-x},$$

откуда

$$[x,\ 1]=[1,\ 2]+[x,\ 1,\ 2]\,(x-x_2),$$

и вообще

$$f(x)=f_1+(x-x_1)[1,\ 2]+(x-x_1)(x-x_2)[1,\ 2,\ 3]+\ldots$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})[1,\ 2,\ \ldots,\ n]+R(x), \qquad (17)$$

где

$$R(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)[x,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n].$$

Интерполяционный полином Лагранжа принимает те же значения, что и функция $f(x)$, для $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, и поэтому имеет те же самые разделенные разности в этих точках. Теперь $\varphi(x)$ является полиномом $(n-1)$-й степени, и n-я разделенная разность такого полинома равна нулю, как это можно показать методом индукции. Следовательно, то же верно и для n-й разделенной разности функции $f(x)$, и

$$f(x)=\varphi(x)+R(x).$$

Поскольку $f(x)=\varphi(x)$ для $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, то при этих значениях $xR(x)=0$. Следовательно, $(n-1)$-я производная от $R(x)$ равна нулю, по крайней мере для одного значения x в интервале (x_1, x_n).

Теперь, дифференцируя $n-1$ раз, имеем

$$f^{(n-1)}(x)=(n-1)!\,[1,\ 2,\ \ldots,\ n]+R^{(n-1)}(x).$$

Если ξ есть значение x, для которого $R^{(n-1)}(x)=0$, то

$$f^{(n-1)}(\xi)=(n-1)!\,[1,\ 2,\ \ldots,\ n],$$

откуда

$$[1,\ 2,\ \ldots,\ n]=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

и

$$[x,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Для любого значения x найдется некоторое значение ξ, для которого справедливо это уравнение.

Теперь мы можем написать $R(x)$ в следующем виде:

$$R(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Это выражение показывает, что если значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию, то $R(x)$ имеет минимальное значение, когда x лежит в центре интервала (x_1, x_n). Кроме того, для любых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $R(x)$ принимает меньшие значения, когда x находится внутри интервала (x_1, x_n), чем в том случае, когда x лежит вне его.

Если мы ограничиваемся представлением функции $f(x)$ на интервале (x_1, x_n) полиномом $(n-1)$-й степени, то мы используем формулу (17), отбрасывая остаточный член $R(x)$, и получаем интерполяционную формулу Ньютона.

Если эта функция табулирована для значений x, образующих арифметическую прогрессию, что обычно имеет место в астрономии, то имеются три общепринятых обозначения для разностей, которые показаны в табл. 12. Для центральных разностей нижние индексы одинаковы

Таблица 12

Обозначения для разностей

Центральные разности				Восходящие разности				Нисходящие разности			
f_{-3}				f_{-3}				f_{-3}			
	$\delta_{-5/2}$				Δ_{-3}				∇_{-2}		
f_{-2}		δ^2_{-2}		f_{-2}		Δ^2_{-3}		f_{-2}		∇^2_{-1}	
	$\delta_{-3/2}$		$\delta^3_{-3/2}$		Δ_{-2}		Δ^3_{-3}		∇_{-1}		∇^3_0
f_{-1}		δ^2_{-1}		f_{-1}		Δ^2_{-2}		f_{-1}		∇^2_0	
	$\delta_{-1/2}$		$\delta^3_{-1/2}$		Δ_{-1}		Δ^3_{-2}		∇_0		∇^3_1
f_0		δ^2_0		f_0		Δ^2_{-1}		f_0		∇^2_1	
	$\delta_{1/2}$		$\delta^3_{1/2}$		Δ_0		Δ^3_{-1}		∇_1		∇^3_2
f_1		δ^2_1		f_1		Δ^2_0		f_1		∇^2_2	
	$\delta_{3/2}$		$\delta^3_{3/2}$		Δ_1		Δ^3_0		∇_2		∇^3_3
f_2		δ^2_2		f_2		Δ^2_1		f_2		∇^2_3	
	$\delta_{5/2}$		$\delta^3_{5/2}$		Δ_2		Δ^3_1		∇_3		∇^3_4
f_3		δ^2_3		f_3		Δ^2_2		f_3		∇^2_4	
	$\delta_{7/2}$				Δ_3				∇_4		
f_4		δ^2_4		f_4				f_4			

вдоль горизонтальной строки, для восходящих разностей — по восходящей диагонали, а для нисходящих разностей — по нисходящей диагонали. В предыдущих разделах мы применяли только обозначения для центральных разностей. Мы имеем, например,

$$\delta_{1/2} = \Delta_0 = \nabla_1,$$
$$\delta^2_1 = \Delta^2_0 = \nabla^2_2,$$

и, как и ранее в этой главе,

$$\delta_{1/2} = f_1 - f_0,$$
$$\delta^2_0 = \delta_{1/2} - \delta_{-1/2} = f_1 - 2f_0 + f_{-1},$$
$$\mu\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_{1/2} + \delta_{-1/2}).$$

Если, как и прежде, мы обозначим интервал аргумента через w, n последовательных табличных аргументов через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и любое число из интервала (x_1, x_n) — через x, то общий интерполяционный множитель θ определяется формулой

$$x = x_1 + \theta w,$$

где θ не обязательно лежит между 0 и 1. Имеем также

$$x - x_1 = \theta w,$$
$$x - x_2 = (\theta - 1) w, \ \ldots$$

и, используя наши символические обозначения, получаем

$$[1, 2] = (f_2 - f_1)/w = \Delta_1/w,$$
$$[1, 2, 3] = \Delta^2_1/2w^2,$$
$$[1, 2, 3, 4] = \Delta^3_1/3!w^3, \ \ldots$$

Подставляя эти выражения в формулу (17) и отбрасывая остаточный член R, получаем следующую формулу:

$$f(x_1+\theta w)=f(x_1)+\theta\Delta_1+\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta_1^2+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta_1^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots(\theta-n+2)}{(n-1)!}\Delta_1^{n-1}, \quad (18)$$

которая известна как формула Грегори. С точностью до обозначений это формула Ньютона из разд. 6.

Символически мы можем написать формулу (18) в виде

$$f(x_1+\theta w)=(1+\Delta)^\theta f(x_1), \quad (19)$$

так как если разложить $(1+\Delta)^\theta$ в биномиальный ряд, то получится

$$1+\theta\Delta+\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3+\ldots.$$

Необходимо помнить, что, например, символ Δ^3 не означает куба величины Δ, а введен вместо третьей восходящей разности $f(x_1)$. Возможность вывести формулу (19) из формулы (18), рассматривая $(1+\Delta)^\theta$ как бином $(1+\Delta)$ в степени θ, является лишь следствием особых символических обозначений, выбранных нами. Применяемый здесь символ Δ называют *оператором*.

Теперь мы введем новый оператор E, такой, что в результате действия E на $f(x)$ получается $f(x+w)$. В символической форме это выглядит так:

$$Ef(x)=f(x+w).$$

Кроме того, мы имеем следующие операторы:

$$\Delta f(x)=f(x+w)-f(x),$$
$$\delta f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}w\right)-f\left(x-\frac{1}{2}w\right),$$
$$Df(x)=\frac{df(x)}{dx},$$
$$\mu f(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{2}w\right)+f\left(x-\frac{1}{2}w\right)\right].$$

Теперь, поскольку

$$Ef(x)=f(x+w)=(1+\Delta)f(x),$$

то

$$E=1+\Delta. \quad (20)$$

Если также существуют все производные функции $f(x)$, то, согласно теореме Тэйлора, можно написать

$$f(x+w)=f(x)+\sum_1^\infty\frac{w^n}{n!}f^{(n)}(x). \quad (21)$$

Так как основание натуральных логарифмов e, возведенное в любую степень, например y, представляется рядом

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots,$$

то уравнение (21) можно записать символически в виде

$$f(x+w)=e^{wD}f(x). \tag{22}$$

Правда, в общем случае мы не знаем, существуют ли первые n производных функции $f(x)$, так как мы располагаем лишь табулированными значениями этой функции, однако для целей интерполирования мы прибегаем к представлению функции $f(x)$ полиномом, производные от которого, как известно, существуют.

Мы можем теперь написать

$$Ef(x)=f(x+w)=(1+\Delta)f(x)=e^{wD}f(x),$$

откуда в символической форме имеем

$$E=1+\Delta=e^{wD}. \tag{23}$$

Для нисходящих разностей мы имеем

$$\nabla f(x)=f(x)-f(x-w).$$

Действуя на обе части оператором E, получаем

$$E\nabla f(x)=f(x+w)-f(x)=\Delta f(x),$$

откуда

$$E\nabla=\Delta=E-1, \tag{24}$$

или

$$E=\frac{1}{1-\nabla}. \tag{25}$$

Теперь мы можем выразить $f(x_1+\theta w)$ через нисходящие разности в виде следующей формулы:

$$\begin{aligned} f(x_1+\theta w)&=(1-\nabla)^{-\theta}f(x_1)= \\ &=1+\theta\nabla_1+\frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla_1^2+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla_1^3+\ldots \\ &\quad+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\ldots(\theta+n-2)}{(n-1)!}\nabla_1^{n-1}, \end{aligned} \tag{26}$$

известной под названием формулы Грегори для интерполирования назад.

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \delta f(x)&=f\left(x+\frac{1}{2}w\right)-f\left(x-\frac{1}{2}w\right)= \\ &=(1+\Delta)^{1/2}f(x)-(1+\Delta)^{-1/2}f(x), \end{aligned}$$

откуда вытекает следующее соотношение:

$$\delta=(1+\Delta)^{1/2}-(1+\Delta)^{-1/2}.$$

Из него мы находим

$$E=1+\Delta=\left[\frac{\delta}{2}+\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)^{1/2}\right]^2 \tag{27}$$

и аналогично

$$\mu=\left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}. \tag{28}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x_1+\theta w) &= E^\theta f(x_1) = \\ &= \left[\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^{2\theta} f(x_1) = \\ &= \frac{\mu\left[\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^{2\theta}}{\left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}} f(x_1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k\delta^k f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\mu\delta^k f(x_1), \end{aligned} \tag{29}$$

где $\delta^0 f(x_1) = f(x_1)$ и $\mu\delta^0 f(x_1) = \mu f(x_1)$, а A и B означают коэффициенты в разложении выражений, записанных в строках выше. Мы полагаем

$$\sum A_k\delta^k f(x_1) = \sum A'_k\delta^k f(x_1) + \sum A''_k\delta^k f(x_1),$$
$$\sum B_k\mu\delta^k f(x_1) = \sum B'_k\mu\delta^k f(x_1) + \sum B''_k\mu\delta^k f(x_1),$$

где A' и B' соответствуют нечетным значениям k, а A'' и B'' — четным значениям. Поскольку

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^{-2\theta} &= \left[\frac{1}{2}\delta - \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^{2\theta} = \\ &= \left[-\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^{2\theta}, \end{aligned}$$

то отсюда следует, что A' и B' — нечетные функции от θ, а A'' и B'' — четные функции от θ и что

$$\sum A'_k\delta^k f(x_1) = \sum B'_k\mu\delta^k f(x_1),$$
$$\sum A''_k\delta^k f(x_1) = \sum B''_k\mu\delta^k f(x_1).$$

Следовательно, мы можем также написать

$$\begin{aligned} f(x_1+\theta w) &= \sum A'_k\delta^k f(x_1) + \sum B''_k\mu\delta^k f(x_1) = \\ &= \sum B'_k\mu\delta^k f(x_1) + \sum A''_k\delta^k f(x_1). \end{aligned} \tag{30}$$

Если в первой части формулы (30) мы положим $x_1 + \frac{1}{2}w$ вместо x_1, то получим следующую формулу:

$$f\left(x_1+\frac{1}{2}w+\theta w\right) = \sum A'_k\delta^k f\left(x_1+\frac{1}{2}w\right) + \sum B''_k\mu\delta^k f\left(x_1+\frac{1}{2}w\right),$$

которая является формулой Бесселя из разд. 5. Вторая формула из (30) известна как формула Ньютона — Котса. В формуле Бесселя можно заменить $\delta f\left(x_1+\frac{1}{2}w\right)$ на $f(x_2) - f(x_1)$ и $\delta^3 f\left(x_1+\frac{1}{2}w\right)$ на $\delta^2 f(x_2) - \delta^2 f(x_1)$ и т. д., получая формулу Эверетта из разд. 5.

Формулы для численного дифференцирования можно получить из следующего уравнения:

$$1+\Delta = e^{wD} = \left[\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]^2,$$

которое можно использовать для выражения символа D и его степеней через диагональные разности Δ или ∇ или центральные разности δ. Например,

$$wD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^n}{n},$$

откуда

$$\frac{df(x_1)}{dx} = Df(x_1) = \frac{1}{w}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^n}{n}\right] f(x_1).$$

Формулы, выраженные через центральные разности, можно получить, используя следующие уравнения:

$$wD = 2\ln\left[\frac{1}{2}\delta + \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right] = \sum C_k\delta^k,$$

или

$$wD = \frac{2\mu\ln\left[\frac{1}{2}\delta + \left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}\right]}{\left(1+\frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}} = \sum G_k\delta^k.$$

Формулы для численного интегрирования могут быть получены столь же легко. Мы можем символически написать $D^{-1}f(x)$ вместо функции, производной которой является $f(x)$, так что

$$D^{-1}f(x) = \int f(x)\,dx,$$

$$D^{-2}f(x) = \int\int f(x)\,dx^2 \text{ и т. д.}$$

Также мы можем написать символ $\Delta^{-1}f(x)$ вместо функции, первыми разностями которой являются $f(x)$. Тогда

$$w^{-1}D^{-1} = -\ln(1+\Delta), \ \ldots$$

Замечания. Литература

Хорошим руководством по численному анализу является книга Бута «Численные методы» (A. D. Booth, Numerical Methods, 2nd ed., Acad. Press, New York, 1957). В ней доказывается справедливость большинства формул, данных здесь, а также многих других, и, кроме того, приводятся ссылки на литературу, которая достаточна для того, чтобы читатель смог изучить любой раздел предмета настолько глубоко, насколько он пожелает.

Исчерпывающим трактатом по исчислению конечных разностей является книга Минё «Методы численных вычислений» (H. Mineur, Techniques de calcul numérique, Librairie polytechnique Ch. Bérnager, Paris, 1952).

Прекрасным собранием пособий для интерполирования с правилами их применения являются таблицы (Interpolation and Allied Tables, London, 1956), подготовленные Бюро Ежегодника (Nautical Almanac Office). Эти таблицы содержат также полезные разделы по численному дифференцированию и интегрированию, дифференциальным уравнениям и вопросам точности вычислений. Справочная книга «Subtabulation» была издана в 1958 г.