Глава V

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

1. Введение. Метод численного интегрирования является самым мощным методом, известным в небесной механике, для вычисления движения любого тела в солнечной системе на *несколько обращений* вокруг центрального тела со всей точностью, требуемой современными наблюдениями. Опыт показывает, что для определения орбиты на большое число обращений небесного тела более эффективными, вероятно, являются аналитические методы, за исключением случаев орбит с большими эксцентриситетами, для которых трудность применения аналитических методов прогрессивно растет с величиной эксцентриситета. Поэтому численные методы применяются для большинства комет и многих малых планет, тогда как аналитические методы применяются к восьми большим планетам, к Луне и большинству остальных спутников, а кроме того, к ряду малых планет. Долго ли сохранится такое положение вещей, предсказать нельзя. Недавние успехи в вычислениях с перфокартами и ведущиеся теперь опыты с электронными машинами сделают, конечно, как численные, так и аналитические методы гораздо более эффективными, чем они были в прошлом. Пока еще не известно, получит ли один из методов преимущество за счет другого, однако несомненно, что специалист по практической небесной механике всегда извлечет пользу, применяя разумное сочетание численного и аналитического методов.

В этой главе подробно рассматриваются два наиболее распространенных метода численного интегрирования уравнений движения—методы Коуэлла и Энке. Эти методы обязаны своей известностью частично широкому распространению счетных машин, частично наличию прямоугольных координат семи больших планет до 1980 г., которые опубликованы в удобном виде вместе со вспомогательными таблицами институтом British Nautical Almanac Office; без этих двух пособий оба метода, по-видимому, были бы менее эффективны, чем остальные.

В методе Коуэлла коническое сечение как первое приближение к орбите явно не используется. Уравнения движения в прямоугольных координатах интегрируются непосредственно, давая прямоугольные координаты возмущаемого тела. Этот процесс сходен с процессом, примененным в гл. IV (разд. 12), с той лишь разницей, что необходимы три координаты вместо двух и на каждом шаге интегрирования возмущающие ускорения от планет прибавляются к притяжению Солнца. Начало координат обычно выбирают в центральном теле, но это ограничение не является обязательным, и для этой цели можно использовать центр масс системы или любого возмущающего тела. Единственное ограничение состоит в том, что предполагаются уже известными движения относительно выбранного начала координат всех тел, оказывающих ощутимое влияние. Поскольку в качестве первого приближения не используется коническое сечение, этот метод применим к движению тел в таких системах, в которых доминирует не одна масса, как, например, к движению спутника двойной звезды. Единственным практическим неудобством этого метода является то, что получаемые интегрированием координаты содержат много значащих цифр и быстро меняются со временем. В силу этого обстоятельства таблицы интегрирования сходятся медленно, что заставляет применять малый табличный интервал.

В методе Энке координаты не получаются непосредственно, а вместо этого интегрирование дает разности между действительными координатами и координатами в оскулирующей орбите, т. е. тем положением, в котором находилось бы тело, если бы оно продолжало двигаться по коническому сечению, соответствующему координатам и компонентам скорости в определенный момент времени, называемый эпохой оскуляции. Отклонения от этой оскулирующей орбиты называются возмущениями. Они обращаются в нуль в эпоху оскуляции. Преимущество этого метода заключается в том, что для моментов, лежащих вблизи эпохи оскуляции, возмущения малы; их можно выразить несколькими значащими цифрами, что допускает использование большего, табличного интервала, чем при употреблении метода Коуэлла. Недостаток метода Энке состоит в том, что с течением времени возмущения возрастают до значительной величины, из-за чего время от времени требуется исправление орбиты. Координаты и скорости определяются на новую эпоху, и интегрирование начинается снова. По-видимому, можно было бы избежать этой трудности, принимая в качестве первого приближения коническое сечение, которое апроксимирует действительное движение на большем интервале времени, чем оскулирующая орбита, но обычно это не практикуется из-за отсутствия достаточной информации.

Методом, который много применялся в XIX столетии и не утратил своей ценности до настоящего времени, является метод вариации элементов. В этом методе величинами, получающимися при интегрировании, являются шесть оскулирующих элементов. Они меняются относительно медленно, что означает возможность применения довольно большого табличного интервала, однако дифференциальные уравнения более сложны по форме, чем уравнения в прямоугольных координатах.

Вероятно, самым изящным по замыслу методом является метод Ганзена. Ганзен исходит из оскулирующего эллипса, как и Энке, но вместо возмущений прямоугольных координат интегрирует возмущения трех других параметров. Основное возмущение — возмущение средней аномалии — определяется двойным интегралом. Это возмущение прибавляется к средней аномалии в эллипсе, оскулирующем в фундаментальную эпоху, и результат вместе с остальными оскулирующими элементами используется для вычисления долготы, широты и радиуса-вектора. Долгота, полученная таким образом, является истинной долготой, а радиус-вектор и широта нуждаются в небольших поправках, определяемых интегрированием двух уравнений первого порядка. Таким образом, на первый взгляд кажется, что полное решение содержит лишь четыре постоянных интегрирования, однако, строго говоря, это не так. Полное решение включает в себя три другие переменные, которые тесно связаны с возмущениями наклонности и узла оскулирующего эллипса, но они гораздо меньше по величине и становятся ощутимыми только после многих обращений возмущаемого тела. Преимущество этого метода состоит в том, что обычно можно пренебречь тремя последними величинами (однако в том случае, если этого сделать нельзя, их можно очень просто вычислить) и что возмущения трех остальных параметров имеют меньшую величину, чем в любом другом известном методе. Неудобство этого метода заключается в необходимости использования нескольких величин, для которых не существует широко распространенных таблиц (таких, как, например, таблицы прямоугольных координат возмущающих планет), в связи с чем требуется выполнение ряда довольно трудоемких преобразований. Метод Ганзена никогда не находил широкого применения, но, вероятно, после создания специальных таблиц, облегчающих эти преобразования, он мог бы быть весьма эффективным.

2. Уравнения метода Коуэлла. Уравнения движения двух материальных точек, m_a и m_b, под действием их взаимного притяжения были даны в разд. 3 гл. 1. Составляющие по оси ξ даются уравнениями

$$m_a \ddot{\xi}_a = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \quad m_b \ddot{\xi}_b = k^2 m_b m_a \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \tag{1}$$

с аналогичными уравнениями для η и ζ и

$$r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\zeta_a - \zeta_b)^2.$$

Введем в эту систему дополнительные материальные точки m_1, m_2, m_3, ... и обозначим любую из них через m_j. Очевидно, притяжения со стороны m_j на m_a и m_b даются уравнениями, подобными уравнениям (1), а общие ускорения m_a и m_b получаются суммированием всех этих притяжений, что дает

$$m_a \ddot{\xi}_a = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3} + \sum_j k^2 m_a m_j \frac{\xi_j - \xi_a}{\varrho_{j,a}^3}, \tag{2}$$

$$m_b \ddot{\xi}_b = k^2 m_b m_a \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3} + \sum_j k^2 m_b m_j \frac{\xi_j - \xi_b}{\varrho_{j,b}^3}, \tag{3}$$

с аналогичными уравнениями для η и ζ, где

$$\varrho_{j,a}^2 = (\xi_a - \xi_j)^2 + (\eta_a - \eta_j)^2 + (\zeta_a - \zeta_j)^2,$$
$$\varrho_{j,b}^2 = (\xi_b - \xi_j)^2 + (\eta_b - \eta_j)^2 + (\zeta_b - \zeta_j)^2.$$

Выберем начало координат в m_a, что равносильно следующему линейному преобразованию:

$$\xi_b - \xi_a = x, \quad \xi_j - \xi_a = x_j,$$

из которого следует, что

$$\xi_j - \xi_b = x_j - x,$$

и положим

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2,$$
$$\varrho_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2.$$

Разделим уравнение (2) на m_a, а уравнение (3) — на m_b и вычтем первое из второго. Тогда получится следующее уравнение движения m_b относительно m_a:

$$\ddot{x} = -k^2 (m_a + m_b) \frac{x}{r^3} - \sum_j k^2 m_j \frac{x_j}{r_j^3} + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{\varrho_j^3}, \tag{4}$$

с аналогичными уравнениями для y и z.

Допустим, что масса m_a выбрана в качестве единицы массы и что все остальные массы выражены в этой единице. Тогда мы можем положить $m_a = 1$, отбросить индекс в m_b и написать уравнение (4) в следующем виде:

$$\ddot{x} = -k^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} + \sum_j k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{\varrho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right). \tag{5}$$

Это и аналогичные уравнения для y и z являются фундаментальными уравнениями в методе Коуэлла. Если m_a представляет Солнце, то очевидно, что x, y, z — гелиоцентрические координаты тела, движение которого определяется, а x_j, y_j, z_j — гелиоцентрические координаты любых других тел, действующих на m. Из способа вывода этих уравнений видно, что в уравнении (5) первый член представляет действие Солнца на тело m, первый член в скобках соответствует действию m_j на m, а второй — действию m_j на Солнце.

Эти уравнения с одинаковым успехом можно применить к движению спутника, помещая начало координат в центральную планету и выбирая для Солнца одно из m_j.

Если тело, движение которого необходимо определить, является астероидом или кометой, то полагаем m равным нулю. В этом случае все m_j малы по сравнению с единицей, а x_j, y_j, z_j обычно можно считать известными, что дает возможность получить искомое решение последовательными приближениями. На каждом шаге интегрирования приближенные координаты тела определяются экстраполированием и используются для вычисления $w^2\ddot{x}$, $w^2\ddot{y}$, $w^2\ddot{z}$ при помощи процесса, сходного с примененным в предыдущей главе, с той лишь разницей, что возмущения от возмущающих планет вычисляются отдельно для каждой планеты и прибавляются к действию Солнца. Когда интегрирование распространяется на небольшое число обращений, тело не будет сильно отклоняться от орбиты, определяемой эллипсом в эпоху оскуляции, и до тех пор, пока оно не сближается весьма тесно с какой-нибудь большой планетой, можно вычислять возмущения от планет заранее, используя положение тела в оскулирующей орбите вместо положения в истинной орбите. Таким путем удается сберечь много труда. Когда же интегрирование распространяется на большой ряд обращений, такой приближенный прием недопустим; в этих случаях иногда можно при вычислении возмущений от планет воспользоваться результатами интегрирования, выполненного ранее.

3. Численный пример приложения метода Коуэлла. Чтобы иллюстрировать численные методы, описанные в предыдущем разделе, мы приводим схему интегрирования для астероида Цереры. За основу работы выбраны следующие элементы, отнесенные к эклиптике и среднему равноденствию эпохи 1950,0:

Эпоха оскуляции

1941, январь, 6,0; эфем. врем. = J. D. 243 0000,5

Средняя аномалия

$$l = 75°46'11'',94 = 75°,76998$$

Расстояние по дуге эклиптики от узла до перигелия

$$\omega = 71°4'5'',06$$

Долгота узла на эклиптике

$$\Omega = 80°48'50'',71$$

Наклонность к эклиптике

$$I = 10°35'49'',00$$

Эксцентриситет

$$e = 0,0794\,2668$$

Большая полуось

$$a = 2,7672\,3786 \text{ а. е.}$$

С этими элементами вычисляем

$$\begin{aligned} \sin I &= +0,1838\,9893, & \sin \Omega &= +0,9871\,7554, \\ \cos I &= +0,9829\,4516, & \cos \Omega &= +0,1596\,3850, \\ \sin \omega &= +0.9459\,0471, & \cos \varphi &= 0,9968\,4071. \\ \cos \omega &= +0.3244\,4457, \end{aligned}$$

Наклонность эклиптики в эпоху 1950,0 даёт

$$\sin \varepsilon = +0,3978\,8118, \quad \cos \varepsilon = +0,9174\,3695,$$

откуда

$$\begin{aligned} A_x &= -2,3965\,7958, & A_y &= +0,9984\,2280, & A_z &= +0,9576\,8656, \\ B_x &= -1,2849\,7379, & B_y &= -2,2997\,8838, & B_z &= -0,8179\,9285. \end{aligned}$$

$$\text{Контроль:} \quad A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = +0,0000\,0003.$$

При определении среднего движения по большой полуоси при помощи третьего закона Кеплера мы прибавляем массу Меркурия к массе Солнца по соображениям, которые будут указаны в разд. 7, и получаем для общей массы Солнце + Меркурий значение, равное 1,0000 00167, откуда для 10-дневного интервала $wk = 0,1720\,2101\,82$ и поэтому среднее движение равно 0,2141 0874 66 градуса в сутки. Затем для эпохи оскуляции вычисляются координаты и компоненты скорости с точностью до восьми десятичных знаков.

$$l = 75°46'11'',94 = 1,3224\,35683 \text{ рад}, \quad u = 1,4007\,16333 \text{ рад},$$

$$\sin u = +0,9855\,71232, \quad \cos u = +0,1692\,61179,$$

$$\begin{aligned} x &= -1,4817\,2875, & r^2 &= 7,4530\,9385, & wk\dot{x} &= +0,0812\,3006, \\ y &= -2,1769\,1244, & r &= 2,7300\,3550, & wk\dot{y} &= -0,0520\,1752, \\ z &= -0,7201\,5692, & \frac{wk}{r\sqrt{a}} &= 0,0378\,78256, & wk\dot{z} &= -0,0409\,9650. \end{aligned}$$

Удобнее всего начать интегрирование с вычисления по оскулирующим элементам координат и ускорений для трех дат по обе стороны от эпохи оскуляции или просто начальной эпохи. В дальнейшем может потребоваться небольшое исправление этих величин, после того как будут учтены возмущающие ускорения от планет (табл. 1).

Таблица 1

Начальные данные

Юлианская дата	l	u	$\sin u$	$\cos u$
242 9970,5	69°,34672	73°,71495	+0,959 8785	+0,280 4162
242 9980,5	71 ,48781	75 ,90155	+0,969 8785	+0,243 5888
242 9990,5	73 ,62889	78 ,08160	+0,978 4427	+0,206 5184
243 0000,5	75 ,76998	80 ,25513	+0,985 5712	+0,169 2612
243 0010,5	77 ,91107	82 ,42214	+0,991 2665	+0,131 8732
243 0020,5	80 ,05215	84 ,58264	+9,995 5334	+0,094 4100
243 0030,5	82 ,19324	86 ,73667	+0,998 3785	+0,056 9250

x	y	z	r^2	$-w^2k^2/r^3$
—1,715106	—2,006845	—0,592689	7,320296	—0,0014 94067
—1,639696	—2,066612	—0,636138	7,364160	—0,0014 80738
—1,561859	—2,123320	—0,678645	7,408450	—0,0014 67479
—1,481729	—2,176912	—0,720157	7,453093	—0,0014 54314
—1,399444	—2,227339	—0,760622	7,498028	—0,0014 41260
—1,315143	—2,274556	—0,799990	7,543190	—0,0014 28337
—1,228963	—2,318525	—0,838216	7,588514	—0,0014 15559

Поскольку интегрирование необходимо вести с восемью десятичными знаками, последний столбец следует вычислить с точностью до девяти знаков, для того чтобы после умножения на координаты восьмой десятичный знак был точным. Затем для тех же семи дат вычисляются возмущающие ускорения от планет с одним лишним десятичным знаком, чтобы после суммирования с притяжением от Солнца можно было результат округлить до восьми десятичных знаков. В табл. 2 приведены результаты для каждой планеты, а именно для каждой даты даны три величины компонент возмущающего ускорения по осям x, y, z и их сумма.

Эти данные вместе с начальными значениями, вычисленными по формулам гл. IV, образуют первые семь строк таблиц интегрирования 3, 4 и 5. Мы приводим только те цифры юлианской даты, которые достаточны для отождествления моментов времени.

Для координаты x имеем

$$
\begin{aligned}
{}^{II}f_0 &= x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^{II} + \dots \\
&= -1{,}4817\,2875 - \frac{1}{12}(215453) + \frac{1}{240}(-85) = -1{,}4819\,0830, \\
{}^{I}f_{1/2} &= wk\dot{x}_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^{I} - \frac{11}{720} f_0^{III} + \dots \\
&= +0{,}0812\,3006 + \frac{1}{2}(215453) + \frac{1}{12}(-13752) - \frac{11}{720}(29) = \\
&= +0{,}0822\,9586,
\end{aligned}
$$

аналогично для y и z.

Таблица 2

Возмущающие ускорения Цереры от планет

Юлианская дата	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Сумма
	+14,6	−2,1	+0,4	−49,0	−3,1	−39,2
242 9970,5	+ 0,7	−7,7	+0,5	−40,6	−2,4	−49,5
	− 0,7	−3,4	+0,2	−47,6	−0,9	−22,4
	+14,3	−0,5	+0,4	−48,6	−3,1	−37,5
242 9980,5	+ 4,4	−7,9	+0,6	−41,1	−2,4	−46,4
	+ 1,0	−3,5	+0,2	−17,8	−0,9	−21,0
	+13,0	+1,1	+0,4	−48,1	−3,1	−36,7
242 9990,5	+ 8,0	−7,9	+0,6	−41,6	−2,4	−43,3
	+ 2,6	−3,5	+0,2	−17,9	−0,9	−19,5
	+10,7	+2,7	+0,4	−47,6	−3,1	−36,9
243 0000,5	+10,8	−7,5	+0,7	−42,1	−2,3	−40,4
	+ 4,0	−3,3	+0,2	−18,0	−0,9	−18,0
	+ 7,7	+4,2	+0,4	−47,2	−3,1	−38,0
243 0010,5	+12,7	−7,0	+0,7	−42,5	−2,3	−38,4
	+ 5,1	−3,1	+0,2	−18,1	−0,9	−16,8
	+ 4,1	+5,6	+0,4	−46,7	−3,1	−39,7
243 0020,5	+13,7	−6,1	+0,8	−43,0	−2,3	−36,9
	+ 5,8	−2,7	+0,3	−18,2	−0,9	−15,7
	+ 0,3	+6,8	+0,4	−46,2	−3,2	−41,9
243 0030,5	+13,7	−5,1	+0,8	−43,5	−2,3	−36,4
	+ 6,1	−2,2	+0,3	−18,3	−0,9	−15,0

Таблица 3

Интегрирование для x

Дата	^{II}f	^{I}f	f_x	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
997			+256 209				
				−13450			
998			+242 759		−146		
				−13596		+32	
999			+229 163		−114		−3
				−13710		+29	
000	−1,481 908 30		+215 453		−85		0
		+8229 586		−13795		+29	
001	−1,399 612 44		+201 658		−56		−4
		+8431 244		−13851		+25	
002	−1,315 300 00		+187 807		−31		
		+8619 051		−13882			
003	−1,229 109 49		+173 925				

Таблица 4

Интегрирование для y

Дата	^{II}f	^{I}f	f_y	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
997			+299 787				
				+6178			
998			+305 965		−594		
				+5584		+12	
999			+311 549		−582		−4
				+5002		+8	
000	−2,177 176 26		+316 551		−574		+5
		−5043 084		+4428		+13	
001	−2,227 607 10		+320 979		−561		−1
		−4722 105		+3867		+12	
002	−2,274 828 15		+324 846		−549		
		−4397 259		+3318			
003	−2,318 800 74		+328 164				

Таблица 5

Интегрирование для z

Дата	$^{\mathrm{II}}f$	$^{\mathrm{I}}f$	f_z	f^{I}	f^{II}	f^{III}
997			+88 529			
				+5645		
998			+94 174			
				+5396	−249	
999			+99 570			−2
				+5145	−251	
000	−0,720 244 19		+104 715			0
		−4046 874		+4894	−251	
001	−0,760 712 93		+109 609			−2
		−3937 265		+4641	−253	
002	−0,800 085 58		+114 250			+1
		−3823 015		+4389	−252	
003	−0,838 315 73		+118 639			

Следующий этап состоит в перевычислении f_x, f_y, f_z для дат 001, 002, 003, используя значения x, y, z, полученные из таблиц интегрирования. Мы видим, что предварительные значения x, y, z требуют небольших поправок, но что значения f не изменяются. Интегрирование теперь производится так же, как и в примере из последней главы. Для целей интегрирования значения x, y, z, получаемые при каждом шаге, необходимо записывать с точностью только до шести десятичных знаков, однако если орбита, полученная численным интегрированием, должна быть после этого сравнена с наблюдениями, то следует удержать в координатах семь десятичных знаков и необходимые малые поправки к экстраполированным значениям вводить на каждом шаге; тогда значения x, y, z будут окончательными и могут быть использованы для сравнения с наблюдениями.

4. Уравнения для метода Энке. Пусть x_0, y_0, z_0 — гелиоцентрические прямоугольные координаты материальной точки m, движущейся только под действием притяжения Солнца. Известно, что орбита в этом случае определяется следующими уравнениями:

$$\ddot{x}_0 = -k^2(1+m)\frac{x_0}{r_0^3}, \quad \ddot{y}_0 = -k^2(1+m)\frac{y_0}{r_0^3}, \quad \ddot{z}_0 = -k^2(1+m)\frac{z_0}{r_0^3}, \tag{6}$$

где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Пусть ξ, η, ζ представляют собой приращения координат x_0, y_0, z_0, создаваемые притяжениями со стороны планет. Тогда действительные координаты x, y, z частицы m в любой момент времени будут равны

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

и уравнениями действительного движения будут уравнение (5)

$$\ddot{x} = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + \sum_j k^2 m_j\left(\frac{x_j - x}{\rho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right) \tag{7}$$

и аналогичные уравнения для y и z.

Вычитание (6) из (7) дает следующее уравнение:

$$\ddot{x} - \ddot{x}_0 = \ddot{\xi} = k^2(1+m)\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right) + \sum_j k^2 m_j\left(\frac{x_j - x}{\rho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right) \tag{8}$$

с аналогичными уравнениями для $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$.

Возмущения ξ, η, ζ можно было бы получить непосредственным интегрированием уравнений (8). Член x_0/r_0^3 можно вычислять для каждого шага интегрирования заранее при помощи законов эллиптического движения, член x/r^3 — определять на каждом шаге, экстраполируя ξ и прибавляя это значение к x_0, что и даст x, и т. д., однако этот путь действий на практике оказался бы неудобным. Поскольку ξ есть малая величина, то член x_0/r_0^3 почти равен x/r^3 и эти два члена следует вычислять со значительно большим числом значащих цифр, чем то, которое необходимо в их разности. Поэтому Энке был вынужден искать преобразование, которое устранило бы эту трудность.

Рассматривая только уравнение для $\ddot{\xi}$, поскольку уравнения для $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$ совершенно аналогичны, мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{x_0}{r_0^3}-\frac{x}{r^3}&=\frac{1}{r_0^3}\left(x_0-\frac{r_0^3}{r^3}x\right)=\\&=\frac{1}{r_0^3}\left(x-\xi-\frac{r_0^3}{r^3}x\right)=\\&=\frac{1}{r_0^3}\left[\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right)x-\zeta\right].\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}r^2&=x^2+y^2+z^2=\\&=(x_0+\xi)^2+(y_0+\eta)^2+(z_0+\zeta)^2=\\&=r_0^3+2x_0\xi+2y_0\eta+2z_0\zeta+\xi^2+\eta^2+\zeta^2,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{r^2}{r_0^2}=1+2\,\frac{\left(x_0+\frac{1}{2}\xi\right)\xi+\left(y_0+\frac{1}{2}\eta\right)\eta+\left(z_0+\frac{1}{2}\zeta\right)\zeta}{r_0^2}.$$

Если мы положим

$$q=\frac{\left(x_0+\frac{1}{2}\xi\right)\xi+\left(y_0+\frac{1}{2}\eta\right)\eta+\left(z_0+\frac{1}{2}\zeta\right)\zeta}{r_0^2},\tag{9}$$

то мы получим

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2}&=1+2q,\\ \frac{r_0^3}{r^3}&=(1+2q)^{-3/2},\\ 1-\frac{r_0^3}{r^3}&=1-(1+2q)^{-3/2}.\end{aligned}$$

Если ξ, η, ζ настолько малы по сравнению с x_0, y_0, z_0, что можно пренебречь их квадратами, то мы можем написать

$$q=\frac{x_0\xi+y_0\eta+z_0\zeta}{r_0^2},\tag{10}$$

откуда легко видеть, что q представляет собой легко вычисляемую функцию, тогда как функция $1-(1+2q)^{-3/2}$ не является таковой. Можно было бы построить таблицы, определяющие эту последнюю функцию по аргументу q, однако такие таблицы должны были бы быть довольно обширными и несколько неудобными для интерполирования. Если q меньше единицы, то приближенное значение функции

$1-(1+2q)^{-3/2}$ будет дано несколькими первыми членами биномиального разложения. Мы получаем приближенно

$$1-(1+2q)^{-3/2}=3q-\frac{15}{2}q^2.$$

Если мы теперь определим функцию f (ее не следует смешивать с f из таблиц интегрирования) следующим равенством:

$$f=\frac{1-(1+2q)^{-3/2}}{q},$$

то, когда q мало, f будет близко к 3, а поскольку f изменяется намного медленнее, чем q, то можно легко интерполировать в таблице, дающей f как функцию от q.

После умножения на w^2 уравнения (8) теперь принимают вид

$$\begin{aligned}
w^2\ddot{\xi} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqx-\xi)+\sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{x_j-x}{\varrho_j^3}-\frac{x_j}{r_j^3}\right),\\
w^2\ddot{\eta} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqy-\eta)+\sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{y_j-y}{\varrho_j^3}-\frac{y_j}{r_j^3}\right),\\
w^2\ddot{\zeta} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqz-\zeta)+\sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{z_j-z}{\varrho_j^3}-\frac{z_j}{r_j^3}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

и представляют собой основные уравнения метода Энке, подлежащие интегрированию. Решение содержит шесть постоянных интегрирования, которые выбираются так, чтобы координаты и компоненты скорости в невозмущенной орбите (x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$) были равны тем же значениям координат и компонент скорости в действительной орбите в некоторую определенную дату, т. е. чтобы ξ, η, ζ, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ были бы равны нулю. Дата, для которой это имеет место, называется эпохой оскуляции.

Уравнения (11) являются точными при условии, что q вычисляется по формуле (9). На практике в начале интегрирования используется формула (10). Возмущения ξ, η, ζ постепенно возрастают по величине, и, когда их квадраты становятся ощутимыми, вводится формула (9).

Поскольку x, y, z отличаются от x_0, y_0, z_0 на малые величины ξ, η, ζ и так как масса m_j мала, то в формулах (11) можно вместо x, y, z подставить x_0, y_0, z_0, и погрешность, обусловленная такой подстановкой, будет порядка массы m_j, умноженной на притяжение, испытываемое астероидом или кометой со стороны соответствующей возмущающей планеты, т. е. порядка m_j^2. Такая замена обычно производится и дает возможность заранее вычислить возмущения от планет для большого числа шагов вперед. Получающиеся возмущения называются точными до первого порядка возмущающих сил. Если интегрирование распространяется на достаточно длинный интервал времени, то возмущения становятся настолько большими, что допускаемая погрешность достигает заметной величины, и тогда возмущающие ускорения можно вычислить по строгим формулам. Однако такого вычисления можно избежать при помощи операции, называемой исправлением орбиты. Координаты астероида или кометы определяются для новой даты вычислением точных значений x_0, y_0, z_0 и прибавлением к ним ξ, η, ζ, а компоненты скорости получаются сложением $w\dot{x}_0$, $w\dot{y}_0$, $w\dot{z}_0$ со значениями $w\dot{\xi}$, $w\dot{\eta}$, $w\dot{\zeta}$, полученными из ξ, η, ζ при помощи численного дифференцирования. Далее вычисляются значения a, e, n и векторные постоянные эллипса, соответствующие этим координатам и компонентам скорости, и интегрирование начинается снова в эту новую эпоху оскуляции. Как правило, следует предпочесть второй путь и исправить орбиту, а не пользоваться для вычисления возмущений от планет точными формулами, так как при этом объем работы будет меньше.

5. Численный пример приложения метода Энке. Мы используем пример, данный для метода Коуэлла, но с интегралом в 20 суток, что дает $w^2k^2 = 0{,}1183\,6492$. Мы начинаем с вычисления координат по элементам оскулирующей орбиты для одной даты перед эпохой и ряда дат после нее (табл. 6).

Таблица 6

Юлианская дата	l	u	$\sin u$	$\cos u$
242 9980,5	71,488	75,902	+0,96988	+0,24359
243 0000,5	75,770	80,255	+0,98557	+0,16926
243 0020,5	80,052	84,583	+0,99553	+0,09441
243 0040,5	84,334	88,884	+0,99981	+0,01948
243 0060,5	88,617	93,161	+0,99848	—0,05514
243 0080,5	92,899	97,412	+0,99164	—0,12900
243 0100,5	97,181	101,638	+0,97944	—0,20173

x_0	y_0	z_0	r_0^2	w^2k^2/r_0^3
—1,6397	—2,0666	—0,6361	7,364	+0,005923
—1,4817	—2,1769	—0,7202	7,453	+0,005817
—1,3151	—2,2746	—0,8000	7,543	+0,005713
—1,1411	—2,3592	—0,8752	7,634	+0,005611
—0,9605	—2,4307	—0,9456	7,725	+0,005513
—0,7747	—2,4887	—1,0108	7,816	+0,005417
—0,5847	—2,5332	—1,0704	7,905	+0,005325

Возмущающие ускорения от планет для первых трех дат можно получить, умножив планетные члены предыдущего примера на 4. Необходимые и дополнительные значения приводятся в табл. 7 в том же виде, что и выше.

Таблица 7

Возмущающие ускорения Цереры от планет

Юлианская дата	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Сумма
	—14,0	+30,8	+1,2	—182,8	—12,6	—177,4
243 0040,5	+51,2	—15,2	+3,2	—175,6	—9,3	—145,7
	+23,6	—6,8	+1,2	—73,6	—3,4	—59,0
	—39,6	+35,4	+1,3	—178,6	—12,7	—194,2
243 0060,5	+34,3	—3,9	+3,5	—179,0	—9,2	—154,3
	+17,8	—1,9	+1,3	—74,2	—3,3	—60,3
	—52,8	+35,4	+1,1	—174,3	—12,7	—203,3
243 0080,5	+8,5	+8,4	+3,5	—182,3	—9,0	—170,9
	+7,1	+3,5	+1,4	—74,9	—3,1	—66,0
	—49,7	+31,2	+0,8	—169,9	—12,8	—200,4
243 0100,5	—19,1	+20,2	+3,3	—185,4	—8,9	—189,9
	—5,5	+8,7	+1,4	—75,4	—3,0	—73,8

Начальные условия мы вычисляем при помощи уравнений гл. IV, налагая условие, чтобы возмущения и их первые производные равнялись нулю в эпоху, и, значит, мы располагаем теперь достаточными данными, чтобы заполнить первые три строки таблиц интегрирования 8, 9 и 10, которые приведены с добавлением еще нескольких шагов интегрирования.

Таблица 8

Интегрирование для x

Дата	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f_ξ	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			—150				
				+2			
000	+12		—148		—13		
		—74		—11		+4	
020	—62		—159		—9		+8
		—233		—20		+12	
040	—295		—179		+3		—6
		—412		—17		+6	
060	—707		—196		+9		0
		—608		—8		+6	
080	—1315		—204		+15		
		—812		+7			
100	—2127		—197				
		—1009					
120	—3136						

Таблица 9

Интегрирование для y

Дата	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f_η	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			—186				
				+24			
000	+13		—162		—11		
		—79		+13		—3	
020	—66		—149		—14		+4
		—228		—1		+1	
040	—294		—150		—13		+2
		—378		—14		+3	
060	—672		—164		—10		+3
		—542		—24		+6	
080	—1214		—188		—4		
		—730		—28			
100	—1944		—216				
		—946					
120	—2890						

Таблица 10

Интегрирование для z

Дата	${}^{II}f$	${}^{I}f$	f_ζ	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			—84				
				+12			
000	+6		—72		—3		
		—35		+9		—4	
020	—29		—63		—7		+6
		—98		+2		+2	
040	—127		—61		—5		—3
		—159		—3		—1	
060	—286		—64		—6		+4
		—223		—9		+3	
080	—509		—73		—3		
		—296		—12			
100	—805		—85				
		—381					
120	—1186						

Предварительные значения f в первых трех строках являются просто планетными членами. Далее, для возмущения ξ координаты x

имеем

$$^{\mathrm{II}}f_0 = \xi_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^{\mathrm{II}} = 0 - \frac{1}{12}(-148) + \frac{1}{240}(-13) = +12,$$

$$^{\mathrm{I}}f_{1/2} = \dot{\xi}_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^{\mathrm{I}} = 0 + \frac{1}{2}(-148) + \frac{1}{12}(-4) = -74$$

и аналогично для η и ζ.

После того как первые три строки в таблицах интегрирования заполнены, перевычисляем ускорения для даты, предшествующей эпохе оскуляции, и для дат, следующих за ней. Находим, что некоторые значения должны быть исправлены на единицу последнего знака, вводим необходимые поправки и исправляем разности. Теперь интегрирование идет обычным путем. Сначала вычисляются значения ξ, η, ζ для даты 040 по формуле (15) гл. IV, затем определяется q и fq и, наконец, вычисляются полностью правые части основных уравнений (11), а результаты записываются в таблицы. Затем снова вычисляются ξ, η, ζ при помощи более точной формулы (16) гл. IV и исправляются, если необходимо, предыдущие значения этих величин. Удобно составить таблицу значений ξ, η, ζ, q и fq по мере их получения шаг за шагом. В качестве примера приводится табл. 11 с уже введенными необходимыми поправками к пяти предварительным значениям возмущений. В этом примере не было необходимости в поправках к предварительным значениям fq. Все данные в табл. 11 и таблицах интегрирования выражены в единицах восьмого десятичного знака.

Таблица 11

Возмущения по методу Энке

Дата	ξ	η	ζ	q	fq
000	0	0	0	0	0
020	—75	—78	—34	+40	+120
040	—310	—306	—132	+156	+468
060	—723	—686	—291	+341	+1023
080	—1332	—1230	—515	+590	+1770
100	—2143	—1962	—812	+897	+2691

6. Уравнения движения относительно центра масс. Уравнения (9) гл. I можно распространить на любое число возмущающих материальных точек, записывая их просто в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{\varrho_j^3}, \\ \ddot{y} &= \sum_j k^2 m_j \frac{y_j - y}{\varrho_j^3}, \\ \ddot{z} &= \sum_j k^2 m_j \frac{z_j - z}{\varrho_j^3}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\varrho_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2$, а начало координат лежит в центре масс всей системы в целом. Эти уравнения проще по форме, чем уравнения (5), благодаря отсутствию членов, выражающих действие возмущающих планет на Солнце, и они были бы удобнее уравнений (5) для применения, если бы было возможным легко и быстро получить координаты Солнца и планет, отнесенные к центру масс солнечной системы, а этого нет на самом деле. Все общие теории, дающие координаты больших планет как функции времени, принимают за начало системы координат Солнце. Небольшое усложнение этих теорий и уравнений движения для еще одного тела, возникающее при таком выборе начала координат, более чем компенсируется тем достоинством, что становится ненужной отдельная теория движения Солнца.

Несмотря на неудобство для вычислителя, состоящее в необходимости рассчитывать координаты Солнца и планет, отнесенные к центру масс, иногда выгодно использовать это начало координат — в случае, когда нужно интегрировать уравнения движения кометы или астероида. Если центральным телом является Солнце, а комета или астероид весьма удалены от него, то член x_j/r_j^3 уравнений (5) и (11) может стать гораздо больше, чем $(x_j-x)/\varrho_j^3$. Например, в случае действия Юпитера на Плутон отношение этих двух членов колеблется около $40^2/5^2$, или 64. Следовательно, первый из этих двух членов порождает дополнительную значащую цифру в возмущениях, что влечет за собой уменьшение табличного интервала, необходимого для хорошей сходимости разностей. Использование центра масс в качестве начала координат устраняет эту трудность и допускает применение большего табличного интервала.

Отделяя солнечный член от остальных, как это было сделано в уравнениях (5), и обозначая барицентрические (отнесенные к центру масс) координаты Солнца через x_s, y_s, z_s, приводим уравнение (12) для $\ddot{x}$ к следующему виду:

$$\ddot{x}=k^2\frac{x_s-x}{\varrho_s^3}+\sum_j k^2 m_j\frac{x_j-x}{\varrho_j^3}, \tag{13}$$

с аналогичными уравнениями для $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$. Мы получили уравнения метода Коуэлла, отнесенные к барицентру. Применяя эти уравнения, необходимо вычислять барицентрические координаты x_s, y_s, z_s, x_j, y_j, z_j по гелиоцентрическим координатам планет. Если гелиоцентрические координаты обозначить через $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$, $\mathbf{z}_j$, то получим

$$\begin{aligned} x_j&=\frac{1}{1+m_j}\mathbf{x}_j,\\ x_s&=-\sum_j\frac{m_j}{1+m_j}\mathbf{x}_j \end{aligned} \tag{14}$$

и аналогичные уравнения для остальных координат.

Координаты и компоненты скорости в эпоху оскуляции отличаются от координат и компонент скорости, отнесенных к Солнцу. Если они получены по гелиоцентрическим элементам, то прежде чем вычислять начальные значения для интегрирования, необходимо выполнить следующие преобразования. Координаты вычисляются по формуле

$$x=\frac{1}{1+m}\mathbf{x}-\sum_j\frac{m_j}{1+m_j}\mathbf{x}_j \tag{15}$$

и аналогичным формулам для y и z. Компоненты скорости, отнесенные к барицентру, можно определить по формуле

$$\dot{x}=\frac{1}{1+m}\dot{\mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\sum_j\frac{m_j}{1+m_j}\mathbf{x}_j \tag{16}$$

и аналогичным формулам для $\dot{y}$ и $\dot{z}$, в которых второй член правой части можно легко получить численным дифференцированием второго члена правой части формул (15), вычисленного для ряда моментов.

После завершения интегрирования часто требуется снова отнести координаты к Солнцу, что можно выполнить посредством уравнения

$$\frac{1}{1+m}x = x + \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} x_j$$

и аналогичных уравнений для y и z.

Уравнения метода Энке, отнесенные к барицентру, имеют вид

$$\ddot{\xi} = k^2 \frac{1}{r_0^3}[fq(x - x_s) - \xi] + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{\varrho_j^3} \tag{17}$$

и аналогичные уравнения для $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$, где q и r_0^3 получаются из

$$x_0 = \frac{1}{1+m} x_0 - \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} x_j,$$

а координаты x_j и x_s вычисляются при помощи (14).

7. Интегрирование с увеличенным значением массы Солнца. Когда возмущаемое тело настолько далеко от Солнца, что в уравнениях (12) одно или несколько значений ϱ_j почти равно ϱ_s, то, обозначая такое значение ϱ_j через ϱ_p и соответствующую возмущающую массу через m_p, мы можем написать, если m_p достаточно мало,

$$k^2 \frac{x_s - x}{\varrho_s^3} + k^2 m_p \frac{x_p - x}{\varrho_p^3} = k^2 (1 + m_p) \frac{x_s - x}{\varrho_s^3} \tag{18}$$

с тем же числом значащих цифр, которое необходимо в значениях возмущений. Такой случай обычно имеет место, когда вычисляются возмущения астероида от Меркурия или возмущения Плутона от четырех внутренних планет. В этих случаях мы можем вместо уравнений (13) написать следующее:

$$\ddot{x} = k^2 (1 + m_p) \frac{x_s - x}{\varrho_s^3} + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{\varrho_j^3}. \tag{19}$$

Это равносильно предположению, что астероид или комета движется по эллиптической орбите относительно центра масс Солнца и m_p. Применяя уравнения (14) и (15), можно ввести координаты массы m_p, однако часто бывает так, что даже это не обязательно и при решении задачи можно всюду увеличить массу Солнца на m_p и больше не уделять возмущающему телу m_p никакого внимания. Например, центр масс Меркурия и Солнца находится на расстоянии приблизительно 0,0000 0007 а. е. от центра Солнца, и для большинства орбит астероидов такой малой поправкой к координатам возмущаемого тела можно пренебречь.

Увеличенное значение массы Солнца можно с равным успехом применить в уравнениях (5) или (11), как и в уравнениях (13). В таких случаях член $-x_p/r_p^3$ при интегрировании отбрасывается и включается, если необходимо, после интегрирования посредством уравнений (14) и (15).

Всякий раз, когда при интегрировании употребляется увеличенная масса Солнца, то же увеличенное значение этой массы необходимо применять при вычислении начальных значений для этого интегрирования. Способ, которым надлежит ввести увеличенную массу Солнца, зависит от элементов, выбираемых в соответствии с постоянными интегрирования. При любом методе — Коуэлла или Энке — фактические значения постоянных интегрирования получаются из координат и компонент скорости в эпоху оскуляции, и эти постоянные для увеличенной массы Солнца будут иными, чем для неувеличенного ее значения. Из способа вычисления координат и скоростей по элементам, изложенного в гл. I, очевидно, что единственный путь устранения такого несоответствия состоит в изменении соотношения между средним движением n и большой полуосью a; применяя третий закон Кеплера, необходимо вместо $k^2(1+m)$ подставить $k^2(1+m+m_p)$.

Безразлично, будет ли в начале операций n выведено из a или a из n, однако, как только принято определенное решение, все последующие операции должны быть согласованы с ним. Если в конце интегрирования необходимо использовать уравнения из разд. 27 гл. I, то удобнее в качестве основного элемента рассматривать a. Тогда процедура будет определяться имеющимися начальными данными. Если задано только a, то порядок действий очевиден. Если же заданы как a, так и n, то следует отбросить n и использовать его значение, даваемое формулой

$$k^2(1+m+m_p)=n^2a^3. \tag{20}$$

Если дано только n, то следует предположить (при отсутствии противоположных утверждений), что оно отнесено исключительно к Солнцу. Поэтому выводим значение a из формулы

$$k^2(1+m)=n^2a^3, \tag{21}$$

а затем, используя это значение a, получаем исправленное значение n по формуле (20).

При использовании уравнений из разд. 27 гл. I в конце интегрирования не следует применять увеличенную массу Солнца, если элементы, как обычно, должны быть отнесены к Солнцу.

8. Относительные преимущества методов Коуэлла и Энке. Вообще можно сказать, что ни один из упомянутых методов не обладает несомненным превосходством в тех случаях, когда вычислительная работа выполняется при помощи настольной счетной машины. Метод Энке допускает использование большего табличного интервала, но каждый шаг требует здесь больше времени, чем в методе Коуэлла. Для комет часто рекомендуется применять метод Энке, когда комета находится вблизи Солнца, и метод Коуэлла, когда она далеко от Солнца. Когда происходят тесные сближения, то возмущения, вычисляемые по методу Энке, очень быстро растут по величине, делая необходимым выбор малого табличного интервала, и в таком случае этот метод теряет все свои преимущества. Переход от какого-нибудь из этих методов к другому можно совершить без труда, вычисляя координаты и компоненты скорости для новой эпохи оскуляции и начиная интегрирование заново в эту новую эпоху.

При наличии современной вычислительной техники, обладающей широкими возможностями, когда процесс интегрирования может быть выполнен операторами, мало знакомыми с искусством вычислений, или даже совершенно автоматически, метод Коуэлла безусловно превосходит метод Энке. В последнем требуется умение правильно разбираться в том, какую формулу для функции q следует применить, и необходимо периодическое исправление орбиты, по мере того как возрастает величина возмущений. С этими осложнениями в методе Энке вычислитель легко справляется по мере их появления, но их трудно предусмотреть заранее, как это требуется при использовании автоматических вычислительных средств.

Замечания. Литература

Метод Коуэлла впервые был применен для предсказания возвращения кометы Галлея в 1910 г. в работе Коуэлла и Кроммелина «Investigation of the motion of the Halley's Comet from 1759—1910», опубликованной в приложении к «Greenwich Observations 1909» (Neill, Bellevue, England, 1910). В этой работе авторы вычисляют вторые разности координат, которые затем непосредственно получаются при помощи двойных сумм вместо суммирования вторых производных и применения формулы интегрирования к этим суммам, как было сделано в этой главе. Однако они рекомендуют применять последнюю процедуру, которая связана с меньшим накоплением ошибок округления.

Метод Энке описан им самим в «Berliner Jahrbuch» (1857).

Ватсон в своем руководстве «Теоретическая астрономия» (Lippincott, 1900) в гл. VIII описывает несколько методов вычисления частных возмущений с численными примерами. Примеры для ряда методов приводятся в таблицах «Planetary Coordinates for the years 1960—1980» (London, H. M. Stationery Office).

Накопление ошибок при численном интегрировании для случая, когда возникают только ошибки из-за округления последних знаков, впервые рассмотрено Браузром (Astron. J., 46, 149, 1937).

Появление автоматических быстродействующих вычислительных машин пробудило широкий интерес к методам численного интегрирования. В употребление было введено много новых формул, и метод Коуэлла повторно открывался несколько раз и теперь известен под различными названиями. Однако ни один метод, по-видимому, не превосходит методов Коуэлла и Энке, если речь идет о главном применении их к численному интегрированию уравнений движения небесных тел. Накопление ошибок можно уменьшить до некоторого абсолютного минимума при помощи автоматического изменения интервала шага интегрирования в зависимости от величины разностей наивысшего удерживаемого порядка.