Глава IX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ ОРБИТ

1. Введение. Методы, изложенные в гл. I и II, служат для вычисления на любой момент времени положения тела, движущегося по эллиптической орбите, элементы которой известны. Для тела солнечной системы данными наблюдений, из которых становится известным его местонахождение, являются

$$t,\ \alpha,\ \delta,$$

т. е. время наблюдения и геоцентрические сферические координаты — прямое восхождение и склонение. Кроме того, необходимо точно определить, к какому экватору и равноденствию относятся эти координаты.

Пусть x, y, z — гелиоцентрические координаты объекта, а X, Y, Z — геоцентрические координаты Солнца, отнесенные к среднему экватору и равноденствию эпохи 1950,0. Геоцентрические координаты этого объекта равны

$$x+X,\quad y+Y,\quad z+Z.$$

Пусть ϱ означает геоцентрическое расстояние. Геоцентрические прямое восхождение α и склонение δ связаны с геоцентрическими экваториальными координатами следующими формулами:

$$\begin{aligned} x+X &= \varrho\cos\alpha\cos\delta,\\ y+Y &= \varrho\sin\alpha\cos\delta,\\ z+Z &= \varrho\sin\delta. \end{aligned}$$

α, δ, наблюденные в момент времени t, не являются непосредственно сравнимыми с геоцентрическими α, δ, которые входят в эти формулы; к этим наблюдениям или к прямоугольным координатам должны быть прибавлены соответствующие поправки за геоцентрический параллакс, аберрацию и т. д. (см. гл. VI и VII).

Пусть Δx, Δy, Δz суть малые поправки к гелиоцентрическим координатам объекта, ΔX, ΔY, ΔZ — малые поправки к геоцентрическим координатам Солнца; тогда

$$\begin{aligned} \Delta x+\Delta X &= -\varrho\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha-\varrho\cos\alpha\sin\delta\Delta\delta+\cos\alpha\cos\delta\Delta\varrho,\\ \Delta y+\Delta Y &= +\varrho\cos\alpha\cos\delta\Delta\alpha-\varrho\sin\alpha\sin\delta\Delta\delta+\sin\alpha\cos\delta\Delta\varrho,\\ \Delta z+\Delta Z &= \qquad\qquad\qquad\qquad +\varrho\cos\delta\Delta\delta\qquad +\sin\delta\Delta\varrho, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\Delta\alpha=\frac{1}{\varrho\cos\delta}\left[-\sin\alpha(\Delta x+\Delta X)+\cos\alpha(\Delta y+\Delta Y)\right],$$

$$\Delta\delta=\frac{1}{\varrho}\left[-\cos\alpha\sin\delta(\Delta x+\Delta X)-\sin\alpha\sin\delta(\Delta y+\Delta Y)+\cos\delta(\Delta z+\Delta Z)\right].$$

Можно предположить, что X, Y, Z не требуют поправок; тогда соотношения между $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ и поправками Δc_j к любой системе шести эллиптических элементов имеют следующий вид:

$$\Delta\alpha = \sum \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j}\Delta c_j + \sum \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j}\Delta c_j,$$

$$\Delta\delta = \sum \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j}\Delta c_j + \sum \frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j}\Delta c_j + \sum \frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_j}\Delta c_j,$$

или

$$\frac{\partial\alpha}{\partial c_j} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial c_j} = \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_j}.$$

Чаще принято иметь дело с $\cos\delta\Delta\alpha$.

В матричной форме эти выражения принимают вид

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial z}{\partial c_1} \\ \frac{\partial x}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial z}{\partial c_2} \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \frac{\partial x}{\partial c_6} & \frac{\partial y}{\partial c_6} & \frac{\partial z}{\partial c_6} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial\delta}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial c_1}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial c_1} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial c_2}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial c_2} \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ \frac{\partial\alpha}{\partial c_6}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial c_6} \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Для численных расчетов эта схема напрашивается сама собой. В разделении вычислений на две части и получении искомых коэффициентов при помощи перемножения матриц имеется очевидная выгода. Частные производные $\partial x/\partial c_j$, $\partial y/\partial c_j$, $\partial z/\partial c_j$ зависят только от гелиоцентрических координат и компонентов скорости наблюденного объекта, тогда как элементы второй матрицы можно написать в следующем явном виде:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}\cos\delta & \frac{\partial\delta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial\delta}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\varrho^{-1}\sin\alpha & -\varrho^{-1}\cos\alpha\sin\delta \\ +\varrho^{-1}\cos\alpha & -\varrho^{-1}\sin\alpha\sin\delta \\ 0 & +\varrho^{-1}\cos\delta \end{Vmatrix}.$$

Их можно легко вычислить из приближенной геоцентрической эфемериды при условии, что приводится также геоцентрическое расстояние. Последнее требуется в любом случае для вычисления поправки за аберрацию и в некоторых методах — за параллакс.

2. Применение прямоугольных экваториальных координат. Одним из наиболее распространенных случаев является случай, когда в распоряжении имеется таблица гелиоцентрических прямоугольных экваториальных координат для равных интервалов времени. Из этой таблицы при помощи численных процессов, изложенных в гл. IV, можно получить значения x, y, z и их производных для любой даты. Пусть заданы также элементы a, e.

Пусть интервал времени таблицы для x, y, z равен w суток, и пусть производные от x, y, z для единицы времени, равной w суток, обозначены через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Далее, пусть n есть среднее движение, выраженное в радианах за w суток, а t — время, отсчитываемое в единицах w суток от некоторой произвольно выбранной эпохи. Теперь рассмотрим, каким образом изменения координат зависят от изменений элементов. Предполагается, что эти изменения малы, так что можно пренебречь их квадратами и произведениями.

а) *Изменение средней аномалии l_0 в начальную эпоху.* Это изменение равносильно предварению эфемериды, равному

$$\Delta t = \frac{\Delta l_0}{n}.$$

Следовательно,

$$\Delta x = \dot{x}\,\Delta t = \dot{x}\,\Delta l_0/n,$$

$$\Delta y = \dot{y}\,\Delta t = \dot{y}\,\Delta l_0/n,$$

$$\Delta z = \dot{z}\,\Delta t = \dot{z}\,\Delta l_0/n.$$

б) *Изменение ориентации орбиты.* Это изменение можно представить себе, как сумму следующих поворотов орбиты: $\Delta\psi_1$ вокруг оси x, $\Delta\psi_2$ вокруг оси y, $\Delta\psi_3$ вокруг оси z. Положительным поворотом считается поворот против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси, вокруг которой совершается этот поворот. В таком случае

$$\Delta x = z\,\Delta\psi_2 - y\,\Delta\psi_3,$$
$$\Delta y = x\,\Delta\psi_3 - z\,\Delta\psi_1,$$
$$\Delta z = y\,\Delta\psi_1 - x\,\Delta\psi_2.$$

в) *Изменение большой полуоси.* Влияние такого изменения проявляется двояким образом: в изменении масштаба и изменении средней аномалии, пропорциональном времени, протекшему от эпохи. Первое из этих изменений определяется из соотношений

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta a}{a}.$$

Второе следует из выражения $n^2a^3 = \text{const}$, которое можно преобразовать к виду

$$2\frac{\Delta n}{n} + 3\frac{\Delta a}{a} = 0.$$

Отсюда изменение средней аномалии равно

$$t\,\Delta n = -\frac{3}{2}\,tn\frac{\Delta a}{a}$$

и

$$\frac{\Delta x}{\dot{x}} = \frac{\Delta y}{\dot{y}} = \frac{\Delta z}{\dot{z}} = -\frac{3}{2}\,t\,\frac{\Delta a}{a}.$$

Объединяя обе эти части, находим изменения в координатах

$$\Delta x = \left(x - \frac{3}{2} t\dot{x}\right) \frac{\Delta a}{a},$$

$$\Delta y = \left(y - \frac{3}{2} t\dot{y}\right) \frac{\Delta a}{a},$$

$$\Delta z = \left(z - \frac{3}{2} t\dot{z}\right) \frac{\Delta a}{a}.$$

г) Изменение эксцентриситета. Для того чтобы получить эти дифференциальные коэффициенты наиболее удобным путем, положим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = Hx + K\dot{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial e} = Hy + K\dot{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = Hz + K\dot{z},$$

где H и K не зависят от направления осей координат.

Если $\bar{x}$, $\bar{y}$ суть координаты планеты в плоскости ее орбиты, причем ось $\bar{x}$ направлена в перигелий, то эти выражения дают

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial e} = H\bar{x} + K\dot{\bar{x}},$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial e} = H\bar{y} + K\dot{\bar{y}}.$$

Решая эти уравнения относительно H и K, получим

$$H = \frac{\dot{\bar{y}}\,(\partial \bar{x}/\partial e) - \dot{\bar{x}}\,(\partial \bar{y}/\partial e)}{\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}}},$$

$$K = \frac{\bar{x}\,(\partial \bar{y}/\partial e) - \bar{y}\,(\partial \bar{x}/\partial e)}{\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}}}.$$

Знаменатель в этих выражениях равен удвоенной секториальной скорости в плоскости орбиты, выраженной в единицах w суток, и может быть записан в виде

$$G = a^2 n \sqrt{1 - e^2} = a^2 n \cos\varphi,$$

если $e = \sin\varphi$. Для вычисления числителя полезны выражения через эксцентрическую аномалию. Поскольку

$$u - e\sin u = l, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\sin u}{1 - e\cos u}, \quad \dot{u} = \frac{n}{1 - e\cos u},$$

$$\bar{x} = a(\cos u - e), \quad \bar{y} = a\cos\varphi\sin u,$$

то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial e} = a\left(\frac{-\sin^2 u}{1 - e\cos u} - 1\right), \qquad \frac{\partial \bar{y}}{\partial e} = \frac{a\sin u}{\cos\varphi}\left[\frac{(1 - e^2)\cos u}{1 - e\cos u} - e\right],$$

$$\dot{\bar{x}} = \frac{-an\sin u}{1 - e\cos u}, \qquad \dot{\bar{y}} = an\cos\varphi\frac{\cos u}{1 - e\cos u}.$$

Перемножение соответствующих правых частей дает

$$\bar{\dot{y}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial e}-\bar{\dot{x}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial e}=\frac{a^2n}{\cos\varphi}\,\frac{-\cos u+e^2\cos u-e+e\cos^2 u}{1-e\cos u}=$$
$$=-\frac{a^2n}{\cos\varphi}(\cos u+e),$$
$$\bar{x}\frac{\partial\bar{\dot{y}}}{\partial e}-\bar{y}\frac{\partial\bar{\dot{x}}}{\partial e}=\frac{a^2\sin u}{\cos\varphi}(2-e^2-e\cos u).$$

Поэтому

$$H=-\frac{\cos u+e}{1-e^2},\quad K=\frac{\sin u\,(2-e^2-e\cos u)}{n\,(1-e^2)}.$$

Из этих выражений можно исключить u, используя

$$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\equiv r=a\,(1-e\cos u),$$
$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}\equiv r\dot{r}=a^2ne\sin u,$$

или

$$\cos u=\frac{a-r}{ae},\quad \sin u=\frac{r\dot{r}}{a^2ne}.$$

Поэтому

$$H=\frac{r-a\,(1+e^2)}{ae\,(1-e^2)},\quad K=\frac{r\dot{r}}{a^2n^2e}\left[1+\frac{r}{a\,(1-e^2)}\right].$$

Как H, так и K содержат e в качестве множителя в знаменателе. Поэтому если e мало, то происходит потеря точности при вычислениях. Это не является серьезной помехой. Необходимо только вычислять $r\dot{r}$ и $r/a\,(1-e^2)$ с большим числом значащих цифр, чем требуется в H и K. Вопрос о том, сколько лишних значащих цифр следует использовать, зависит от малости e. Координаты x, y, z и их производные могут быть, как правило, получены с необходимым числом значащих цифр, и требуемое дополнительно количество вычислений невелико.

Соединение этих результатов дает следующие выражения:

Система I

	Δl_0	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	$\Delta\psi_3$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta x=$	$\frac{\dot{x}}{n}$	0	$+z$	$-y$	$x-\frac{3}{2}t\dot{x}$	$Hx+K\dot{x}$
$\Delta y=$	$\frac{\dot{y}}{n}$	$-z$	0	$+x$	$y-\frac{3}{2}t\dot{y}$	$Hy+K\dot{y}$
$\Delta z=$	$\frac{\dot{z}}{n}$	$+y$	$-x$	0	$z-\frac{3}{2}t\dot{z}$	$Hz+K\dot{z}$

Эти выражения необходимо подставлять в левую матрицу матричного произведения (1).

Малые повороты $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$ можно считать тремя компонентами одного вектора поворота $\Delta\psi$ в экваториальной системе координат. Пусть $\Delta\bar{p}$, $\Delta\bar{q}$, $\Delta\bar{r}$ — компоненты этого вектора $\Delta\psi$ в системе координат $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, плоскость $\bar{x}\bar{y}$ которой совпадает с плоскостью орбиты, а ось

$\bar{x}$ направлена в перигелий. Соотношения между этими двумя системами компонент вектора поворота, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= P_x\Delta p + Q_x\Delta q + R_x\Delta r, \\ \Delta\psi_2 &= P_y\Delta p + Q_y\Delta q + R_y\Delta r, \\ \Delta\psi_3 &= P_z\Delta p + Q_z\Delta q + R_z\Delta r. \end{aligned} \tag{2}$$

Компоненты поворота Δp, Δq, Δr легко могут быть выражены через поправки к элементам I, Ω, ω. Пусть N есть восходящий узел орбиты на плоскости эклиптики, $NN' = 90°$, $N\bar{X} = \omega$ — угловому расстоя-

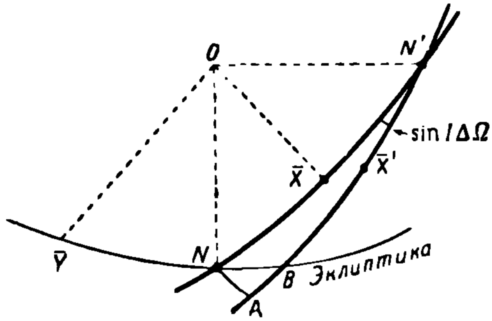

Рис. 7. Дифференциальное исправление элементов I, Ω и ω.

нию перигелия от узла (см. рис. 7). Повороты Δp, Δq вокруг соответственно $O\bar{X}$ и $O\bar{Y}$ эквивалентны поворотам

$$\Delta p \cos\omega - \Delta q \sin\omega \quad \text{вокруг } ON,$$
$$\Delta p \sin\omega + \Delta q \cos\omega \quad \text{вокруг } ON'.$$

Поворот вокруг ON равен ΔI, тогда как рис. 7 показывает, что поворот вокруг ON' равен $\sin I\Delta\Omega$. В результате поворота вокруг ON' новый узел будет в точке B. Поворот Δr вокруг оси z определяется разностью дуг $A\bar{X}'$ и $N\bar{X}$, если $O\bar{X}'$ является новой осью $\bar{x}$. Но $B\bar{X}' - N\bar{X} = \Delta\omega$, $AB = \cos I\Delta\Omega$. Поскольку $A\bar{X}' = AB + B\bar{X}'$, то $A\bar{X}' - N\bar{X} = B\bar{X}' - N\bar{X} + AB$ или $\Delta r = \Delta\omega + \cos I\,\Delta\Omega$. Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Delta I &= \Delta p \cos\omega - \Delta q \sin\omega, \\ \sin I\Delta\Omega &= \Delta p \sin\omega + \Delta q \cos\omega, \\ \Delta\omega + \cos I\Delta\Omega &= \Delta r. \end{aligned} \tag{3}$$

Необходимо заметить, что эти формулы не зависят от выбора плоскости отсчета. Поэтому, если I', Ω', ω' представляют экваториальные элементы, т. е. наклонность к плоскости экватора, долготу узла на экваторе и угловое расстояние от этого узла до перигелия соответственно, то эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta I' &= \Delta p \cos\omega' - \Delta q \sin\omega', \\ \sin I'\Delta\Omega' &= \Delta p \sin\omega' + \Delta q \cos\omega', \\ \Delta\omega' + \cos I'\Delta\Omega' &= \Delta r. \end{aligned}$$

Другие полезные соотношения можно получить при помощи разд. 23 и 24 гл. 1. Например,

$$\begin{aligned}
&\| \Delta I' \ \ \sin I' \Delta\Omega' \ \ \Delta\omega' + \cos I' \Delta\Omega' \| = \\
&= \| \Delta p \, \Delta q \, \Delta r \| \, \boldsymbol{r}(-\omega)' = \\
&= \| \Delta p \, \Delta q \, \Delta r \| \begin{Vmatrix} \cos\omega' & +\sin\omega' & 0 \\ -\sin\omega' & \cos\omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \\
&= \| \Delta p \cos\omega' - \Delta q \sin\omega' \quad \Delta p \sin\omega' + \Delta q \cos\omega' \quad \Delta r \|.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
&\| \Delta\psi_1 \, \Delta\psi_2 \, \Delta\psi_3 \| = \\
&= \| \Delta p \, \Delta q \, \Delta r \| \, \boldsymbol{r}(-\omega') \boldsymbol{p}(-I') \boldsymbol{r}(-\Omega') = \\
&= \| \Delta I' \ \ \sin I' \Delta\Omega' \ \ \Delta\omega' + \cos I' \Delta\Omega' \| \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I' & +\sin I' \\ 0 & -\sin I' & \cos I' \end{Vmatrix} \times \\
&\times \begin{Vmatrix} \cos\Omega' & +\sin\Omega' & 0 \\ -\sin\Omega' & \cos\Omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \\
&= \| \Delta I' \ \ -\sin I' \Delta\omega' \ \ \Delta\Omega' + \cos I' \Delta\omega' \| \begin{Vmatrix} \cos\Omega' & +\sin\Omega' & 0 \\ -\sin\Omega' & \cos\Omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \\
&= \begin{Vmatrix} \cos\Omega' \Delta I' + \sin\Omega' \sin I' \Delta\omega' \\ \sin\Omega' \Delta I' - \cos\Omega' \sin I' \Delta\omega' \\ \cos I' \Delta\omega' + \Delta\Omega' \end{Vmatrix}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\Delta I' &= \cos\Omega' \Delta\psi_1 + \sin\Omega' \Delta\psi_2, \\
\sin I' \Delta\omega' &= \sin\Omega' \Delta\psi_1 - \cos\Omega' \Delta\psi_2, \\
\cos I' \Delta\omega' + \Delta\Omega' &= \Delta\psi_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Если эксцентриситет мал, то положение перигелия определится плохо. Следовательно, некоторая неопределенность будет существовать как в Δl_0, так и в $\Delta\psi_3$. Это следует из коэффициентов при Δl_0 и $\Delta\psi_3$ в Δx и Δy. Для круговой орбиты, лежащей в экваториальной плоскости

$$\dot{x}/\dot{y} = -y/x,$$

тогда как $\dot{z} = 0$. Поэтому Δl_0 и $\Delta\psi_3$ нельзя определить по отдельности. Эту трудность можно устранить, используя в качестве неизвестных $\Delta l_0 + \Delta\psi_3$ и $\Delta\psi_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}}{n} \Delta l_0 - y \Delta\psi_3 &= \frac{\dot{x}}{n} (\Delta l_0 + \Delta\psi_3) + \left(-\frac{\dot{x}}{n} - y \right) \Delta\psi_3, \\
\frac{\dot{y}}{n} \Delta l_0 + x \Delta\psi_3 &= \frac{\dot{y}}{n} (\Delta l_0 + \Delta\psi_3) + \left(-\frac{\dot{y}}{n} + x \right) \Delta\psi_3, \\
\frac{\dot{z}}{n} \Delta l_0 + 0 \Delta\psi_3 &= \frac{\dot{z}}{n} (\Delta l_0 + \Delta\psi_3) + \left(-\frac{\dot{z}}{n} \right) \Delta\psi_3.
\end{aligned}$$

Теперь $-\dot{x}/n-y$ и $-\dot{y}/n+x$ будут малыми величинами порядка e. Поэтому неизвестное $\Delta\psi_3$ войдет с малыми коэффициентами, что представляет трудность при численных приложениях. Ее можно избежать, вводя $e\Delta\psi_3$ в качестве неизвестного, коэффициенты при котором получаются делением коэффициентов при $\Delta\psi_3$ на e. Следовательно, выражения принимают следующий вид:

Система II

	$\Delta l_0+\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	$e\Delta\psi_3$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta x=$	$\frac{\dot{x}}{n}$	0	$+z$	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{x}}{n}-y\right)$	$x-\frac{3}{2}t\dot{x}$	$Hx+K\dot{x}$
$\Delta y=$	$\frac{\dot{y}}{n}$	$-z$	0	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{y}}{n}+x\right)$	$y-\frac{3}{2}t\dot{y}$	$Hy+K\dot{y}$
$\Delta z=$	$\frac{\dot{z}}{n}$	$+y$	$-x$	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{z}}{n}\right)$	$z-\frac{3}{2}t\dot{z}$	$Hz+K\dot{z}$

В то время как этот выбор неизвестных пригоден для большинства случаев с умеренно малыми эксцентриситетами, можно увеличить надежность решения, выбирая в качестве неизвестных $\Delta\mathrm{p}$, $\Delta\mathrm{q}$, $\Delta\mathrm{r}$ вместо $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$. Подстановка соотношений (2) в члены, содержащие эти неизвестные, в системе I дает

$$+z\Delta\psi_2-y\Delta\psi_3=(P_yz-P_zy)\,\Delta\mathrm{p}+(Q_yz-Q_zy)\,\Delta\mathrm{q}+(R_yz-R_zy)\,\Delta\mathrm{r},$$
$$-z\Delta\psi_1+x\Delta\psi_3=(P_zx-P_xz)\,\Delta\mathrm{p}+(Q_zx-Q_xz)\,\Delta\mathrm{q}+(R_zx-R_xz)\,\Delta\mathrm{r},$$
$$+y\Delta\psi_1-x\Delta\psi_2=(P_xy-P_yx)\,\Delta\mathrm{p}+(Q_xy-Q_yx)\,\Delta\mathrm{q}+(R_xy-R_yx)\,\Delta\mathrm{r}.$$

Если затем ввести неизвестное $\Delta l_0+\Delta\mathrm{r}$ вместо Δl_0 и $e\Delta\mathrm{r}$ вместо $\Delta\mathrm{r}$, то окончательные выражения принимают вид:

Система III

	$\Delta l_0+\Delta\mathrm{r}$	$\Delta\mathrm{p}$	$\Delta\mathrm{q}$	$e\Delta\mathrm{r}$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta x=$	$\frac{\dot{x}}{n}$	P_yz-P_zy	Q_yz-Q_zy	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{x}}{n}+R_yz-R_zy\right)$	$x-\frac{3}{2}t\dot{x}$	$Hx+K\dot{x}$
$\Delta y=$	$\frac{\dot{y}}{n}$	P_zx-P_xz	Q_zx-Q_xz	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{y}}{n}+R_zx-R_xz\right)$	$y-\frac{3}{2}t\dot{y}$	$Hy+K\dot{y}$
$\Delta z=$	$\frac{\dot{z}}{n}$	P_xy-P_yx	Q_xy-Q_yx	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{z}}{n}+R_xy-R_yx\right)$	$z-\frac{3}{2}t\dot{z}$	$Hz+K\dot{z}$

Эта форма требует несколько больше вычислений, чем система II, однако она обладает преимуществом, давая определенное решение независимо от значений эксцентриситета или наклонности. Эта форма рекомендуется для повсеместного применения.

Кроме того, легко видеть, что все коэффициенты при неизвестных в условных уравнениях для $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ одного и того же порядка величины, за одним исключением. Этим исключением является коэффициент при $\Delta a/a$. Этот коэффициент зависит от промежутка времени, охваченного наблюдениями. Чем длиннее этот промежуток, тем более значительными становятся члены, имеющие t множителем.

Векторные орбитальные постоянные, которые входят в коэффициенты системы III, определяют ориентацию плоскости $\bar{x}\bar{y}$, которую необходимо выбрать так, чтобы она совпала сколь возможно точно с плоскостью оскулирующей орбиты планеты, причем ось $\bar{x}$ направлена в перигелий. Отсюда следует, что

$$\|\Delta x \Delta y \Delta z\| = \|\Delta\bar{x}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z}\| \begin{Vmatrix} P_x P_y P_z \\ Q_x Q_y Q_z \\ R_x R_y R_z \end{Vmatrix}.$$

Это соотношение дает следующую в высшей степени простую форму:

Система IV

	$\Delta l_0 + \Delta\mathrm{r}$	$\Delta\mathrm{p}$	$\Delta\mathrm{q}$	$e\Delta\mathrm{r}$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta\bar{x} =$	$\frac{\dot{\bar{x}}}{n}$	0	0	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{\bar{x}}}{n} - \bar{y}\right)$	$\bar{x} - \frac{3}{2}t\dot{\bar{x}}$	$H\bar{x} + K\dot{\bar{x}}$
$\Delta\bar{y} =$	$\frac{\dot{\bar{y}}}{n}$	0	0	$\frac{1}{e}\left(-\frac{\dot{\bar{y}}}{n} + \bar{x}\right)$	$\bar{y} - \frac{3}{2}t\dot{\bar{y}}$	$H\bar{y} + K\dot{\bar{y}}$
$\Delta\bar{z} =$	0	$+\bar{y}$	$-\bar{x}$	0	0	0

В некоторых приложениях окажется выгодным использовать эту форму. Коэффициенты можно выразить при помощи рядов по средней аномалии, и если число наблюдений очень велико, то может потребоваться табуляция этих коэффициентов как функций от средней аномалии. Коэффициент при $\Delta a/a$ требует специального рассмотрения из-за присутствия множителя t. Можно использовать эквивалентную форму, определяемую формулами

$$\bar{x} - \frac{3}{2}t\dot{\bar{x}} = \bar{x} - \frac{3}{2}(l - l_0)\frac{\dot{\bar{x}}}{n},$$

$$\bar{y} - \frac{3}{2}t\dot{\bar{y}} = \bar{y} - \frac{3}{2}(l - l_0)\frac{\dot{\bar{y}}}{n},$$

где $l - l_0$ выражено в радианах. Очевидно, что в разности $l - l_0$ необходимо сохранить целые обороты.

Таблица 1 дает разложения коэффициентов системы IV по средней аномалии. Общий множитель a опущен, для того чтобы упростить вид этой таблицы. Этот множитель следует ввести перед употреблением коэффициентов.

Обычно разложения в ряды даются в табл. 1 с точностью до третьей степени эксцентриситета, за исключением коэффициентов при $\Delta a/a$, имеющих множителем разность $l - l_0$, для которых разложение доведено до e^4.

Очевидно, ту же процедуру можно применить к координатам Солнца; ΔX, ΔY, ΔZ можно выразить через поправки к элементам орбиты Земли. В этом случае, однако, следует сделать несколько важных замечаний. Во-первых, следует отбросить неизвестное $\Delta a/a$. Астрономическая единица употребляется в качестве единицы расстояния для всех измерений в солнечной системе, и размеры орбиты Земли, выраженные в этой единице, настолько хорошо известны, что введение неизвестной поправки для исправления масштаба земной орбиты никакой пользы

Таблица 1

Коэффициенты для системы IV, разложенные по средней аномалии

Коэффициенты при $\Delta l_0+\Delta\text{r}$

в $\frac{\Delta\bar{x}}{a}$: $\left(-1+\frac{3}{8}e^2\right)\sin l+\left(-e+\frac{2}{3}e^3\right)\sin 2l-\frac{9}{8}e^2\sin 3l-\frac{4}{3}e^3\sin 4l$

в $\frac{\Delta\bar{y}}{a}$: $\left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\cos l+\left(e-\frac{5}{6}e^3\right)\cos 2l+\frac{9}{8}e^2\cos 3l+\frac{4}{3}e^3\cos 4l$

Коэффициенты при $e\Delta\text{r}$

в $\frac{\Delta\bar{x}}{a}$: $\left(\frac{1}{4}e-\frac{1}{12}e^3\right)\sin l+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^2\right)\sin 2l+\left(\frac{3}{4}e-\frac{21}{32}e^3\right)\sin 3l+e^2\sin 4l$

в $\frac{\Delta\bar{y}}{a}$: $-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}e+\frac{1}{12}e^3\right)\cos l+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^2\right)\cos 2l+$
$+\left(-\frac{3}{4}e+\frac{27}{32}e^3\right)\cos 3l-e^2\cos 4l$

Коэффициенты при $\Delta a/a$

в $\frac{\Delta\bar{x}}{a}$: $-\frac{3}{2}e+\left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos l+\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}e^3\right)\cos 2l+\frac{3}{8}e^2\cos 3l+$
$+\frac{1}{3}e^3\cos 4l+(l-l_0)\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{16}e^2+\frac{5}{128}e^4\right)\sin l+\right.$
$\left.+\left(\frac{3}{2}e-e^3\right)\sin 2l+\left(\frac{27}{16}e^2-\frac{405}{256}e^4\right)\sin 3l+2e^3\sin 4l+\frac{625}{256}e^4\sin 5l\right]$

в $\frac{\Delta\bar{y}}{a}$: $\left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin l+\left(\frac{1}{2}e-\frac{5}{12}e^3\right)\sin 2l+\frac{3}{8}e^2\sin 3l+\frac{1}{3}e^3\sin 4l+$
$+(l-l_0)\left[\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{16}e^2+\frac{11}{128}e^4\right)\cos l+\left(-\frac{3}{2}e+\frac{5}{4}e^3\right)\cos 2l+\right.$
$\left.+\left(-\frac{27}{16}e^2+\frac{459}{256}e^4\right)\cos 3l-2e^3\cos 4l-\frac{625}{256}e^4\cos 5l\right]$

Коэффициенты при Δe

в $\frac{\Delta\bar{x}}{a}$: $-\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{4}e+\frac{5}{48}e^3\right)\cos l+\left(\frac{1}{2}-e^2\right)\cos 2l+$
$+\left(\frac{3}{4}e-\frac{45}{32}e^3\right)\cos 3l+e^2\cos 4l+\frac{125}{96}e^3\cos 5l$

в $\frac{\Delta\bar{y}}{a}$: $\left(-\frac{5}{4}e-\frac{11}{48}e^3\right)\sin l+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}e^2\right)\sin 2l+\left(\frac{3}{4}e-\frac{51}{32}e^3\right)\sin 3l+$
$+e^2\sin 4l+\frac{125}{96}e^3\sin 5l$

Коэффициент при Δp

в $\frac{\Delta\bar{z}}{a}$: $\left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin l+\left(\frac{1}{2}e-\frac{5}{12}e^3\right)\sin 2l+\frac{3}{8}e^2\sin 3l+\frac{1}{3}e^3\sin 4l$

Коэффициент при Δq

в $\frac{\Delta\bar{z}}{a}$: $+\frac{3}{2}e+\left(-1+\frac{3}{8}e^2\right)\cos l+\left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{3}e^3\right)\cos 2l-$
$-\frac{3}{8}e^2\cos 3l-\frac{1}{3}e^3\cos 4l$

не принесет. Во-вторых, поправки $\Delta\psi$ тесно связаны с поправкой к наклонности эклиптики и с поправкой равноденствия. Пусть $\Delta\varepsilon$ есть поправка к наклонности эклиптики, используемой в вычислениях экваториальных прямоугольных координат Солнца, а ΔE — поправка равноденствия, т. е. общая поправка, которую необходимо прибавить ко всем прямым восхождениям. Из (4) при $\Omega'=0$ очевидно, что

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\varepsilon,\\ \Delta\psi_2 &= -\sin\varepsilon\Delta\omega',\\ \Delta\psi_3 &= -\Delta E+\cos\varepsilon\Delta\omega'.\end{aligned}$$

Вместо $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$ может оказаться выгодным применить

$$\|\Delta\psi_1\Delta\psi_2'\Delta\psi_3'\| = \|\Delta\psi_1\Delta\psi_2\Delta\psi_3\|\cdot p(\varepsilon) = \|\Delta\psi_1\Delta\psi_2\Delta\psi_3\|\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{Vmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\psi_1,\\ \Delta\psi_2' &= \cos\varepsilon\Delta\psi_2+\sin\varepsilon\Delta\psi_3,\\ \Delta\psi_3' &= -\sin\varepsilon\Delta\psi_2+\cos\varepsilon\Delta\psi_3,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\varepsilon,\\ \Delta\psi_2' &= -\sin\varepsilon\Delta E,\\ \Delta\psi_3' &= -\cos\varepsilon\Delta E+\Delta\tilde{\omega}'.\end{aligned}$$

Необходимо заметить, что поскольку $\Omega'=0$, то $\Delta\tilde{\omega}'$ совпадает с $\Delta\omega'$.

Эти соотношения описывают повороты вокруг осей, направленных соответственно в точку весеннего равноденствия, в точку летнего солнцестояния и в северный полюс эклиптики. Главное преимущество $\Delta\psi_2'$, $\Delta\psi_3'$ перед $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$ заключается в лучшем разделении поправок $\Delta\tilde{\omega}'$ и ΔE. В $\Delta\psi_2'$ поправка ΔE входит с множителем $-\sin\varepsilon$, тогда как в $\Delta\psi_3$ эта поправка входит в линейной комбинации с $\cos\varepsilon\Delta\tilde{\omega}'$.

Соотношения, которые необходимо применять в этом случае, очевидно, имеют вид:

Система V

	$\Delta l_0'+\Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	$e'\Delta\psi_3$	$\Delta e'$
$\Delta X=$	$\frac{\dot X}{n'}$	0	$+Z$	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot X}{n'}-Y\right)$	$H'X+K'\dot X$
$\Delta Y=$	$\frac{\dot Y}{n'}$	$-Z$	0	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot Y}{n'}+X\right)$	$H'Y+K'\dot Y$
$\Delta Z=$	$\frac{\dot Z}{n'}$	$+Y$	$-X$	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot Z}{n'}\right)$	$H'Z+K'\dot Z$

Если вводятся $\Delta\psi_2'$, $\Delta\psi_3'$, то мы получаем следующую систему:

Система VI

	$\Delta l_0' + \Delta\psi_3'\ \Delta\psi_1$		$\Delta\psi_2'$	$e'\Delta\psi_3'$	$\Delta e'$
$\Delta X =$	$\frac{\dot X}{n'}$	0	$-Y\sin\varepsilon + Z\cos\varepsilon$	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot X}{n'} - Y\cos\varepsilon - Z\sin\varepsilon\right)$	$H'X + K'\dot X$
$\Delta Y =$	$\frac{\dot Y}{n'}$	$-Z$	$+X\sin\varepsilon$	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot Y}{n'} + X\cos\varepsilon\right)$	$H'Y + K'\dot Y$
$\Delta Z =$	$\frac{\dot Z}{n'}$	$+Y$	$-X\cos\varepsilon$	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot Z}{n'} + X\sin\varepsilon\right)$	$H'Z + K'\dot Z$

Однако если введены эклиптические прямоугольные координаты посредством следующих соотношений:

$$X_e = X,$$

$$Y_e = Y\cos\varepsilon + Z\sin\varepsilon,$$

$$Z_e = -Y\sin\varepsilon + Z\cos\varepsilon,$$

и если $Z_e = 0$, то легко видеть, что выражение ΔX можно упростить (см. ΔX_e в системе VII, приведенной ниже). Если затем ввести ΔY_e, ΔZ_e, то получающиеся выражения имеют вид:

Система VII

	$\Delta l_0' + \Delta\psi_3'\ \Delta\psi_1$		$\Delta\psi_2'$	$e'\Delta\psi_3'$	Δe
$\Delta X_e =$	$\frac{\dot X_e}{n'}$	0	0	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot X_e}{n'} - Y_e\right)$	$\frac{\partial X_e}{\partial e}$
$\Delta Y_e =$	$\frac{\dot Y_e}{n'}$	0	0	$\frac{1}{e'}\left(-\frac{\dot Y_e}{n'} + X_e\right)$	$\frac{\partial Y_e}{\partial e}$
$\Delta Z_e =$	0	$+Y_e$	$-X_e$	0	0

В системе VII координаты X_e, Y_e суть координаты Солнца, отнесенные к плоскости эклиптики, при этом ось X_e направлена в точку весеннего равноденствия. С целью вычисления коэффициентов условных уравнений удобно было бы коэффициенты этой системы табулировать как функции дня года.

Следует уделить особое внимание осложнению, возникающему из-за движений точки весеннего равноденствия и перигея Солнца, в тех случаях, когда необходимо использовать наблюдения, перекрывающие длинный промежуток времени. В большинстве приложений требуется употребление стандартного равноденствия и экватора 1950,0. Если применяется система V или VI, а экваториальные координаты и компоненты скорости выводятся из координат Солнца, табулированных для этих стандартных равноденствия и экватора, то этому вопросу не нужно уделять никакого внимания. Система VII (при $Z_e = 0$) подразумевает употребление эклиптики даты. Тогда почти обязательно необходимо использовать также среднее равноденствие даты. Если восемь коэффициентов, входящих в эту систему, табулированы как функции дня года, например для 1950 г., то их легко применить к любому году двадцатого столетия или даже к более длительному промежутку времени, вычисляя годичные изменения. Переход к экватору и равноденствию 1950,0 может быть осуществлен, если векторным постоянным P'_x и т. д., необходимым при преобразовании вида

$$\| \Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z \| = \| \Delta X_e\ \Delta Y_e\ \Delta Z_e \| \begin{Vmatrix} P'_x P'_y P'_z \\ Q'_x Q'_y Q'_z \\ R'_x R'_y R'_z \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

будут даны значения, соответствующие году наблюдения. Очевидно, что постоянные R'_x, R'_y, R'_z не нужны.

Если X_e, Y_e, Z_e отнесены к эклиптике и равноденствию 1950,0, то это соотношение превращается просто в

$$\| \Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z \|_{1950,0} = \| \Delta X_e\ \Delta Y_e\ \Delta Z_e \|_{1950,0} \cdot p(-\varepsilon)_{1950,0} =$$

$$= \| \Delta X_e\ \Delta Y_e\ \Delta Z_e \| \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & +\sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix}_{1950,0}$$

Если же это условие не выполнено, то указанное соотношение принимает вид

$$\| \Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z \|_{1950,0} = \| \Delta X_e\ \Delta Y_e\ \Delta Z_e \|_t \cdot p(-\varepsilon_t) \begin{Vmatrix} +X_x - X_y - X_z \\ -Y_x + Y_y + Y_z \\ -Z_x + Z_y + Z_z \end{Vmatrix}_{t-1950,0}.$$

Третья матрица в правой части, в которой

$$Y_x = -X_y,\ Z_x = -X_z,\ Z_y = -Y_z,$$

представляет преобразование от экватора в эпоху t к экватору 1950,0, если интервал времени между эпохой t и стандартной датой не слишком велик. Элементы этой матрицы для текущего столетия приведены в «Planetary Coordinates».

Тогда матрицу, используемую в (5), можно выразить в виде

$$\begin{Vmatrix} P'_x P'_y P'_z \\ Q'_x Q'_y Q'_z \\ R'_x R'_y R'_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +X_x - Y_x - Z_x \\ -X_y + Y_y + Z_y \\ -X_z + Y_z + Z_z \end{Vmatrix} \cdot p(\varepsilon_t)$$

и

$$\| \Delta X \Delta Y \Delta Z \| = \| \Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e \| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} X_x & -X_y & -X_z \\ -Y_x\cos\varepsilon_t - Z_x\sin\varepsilon_t & +Y_y\cos\varepsilon_t + Z_y\sin\varepsilon_t & +Y_z\cos\varepsilon_t + Z_z\sin\varepsilon_t \\ +Y_x\sin\varepsilon_t - Z_x\cos\varepsilon_t & -Y_y\sin\varepsilon_t + Z_y\cos\varepsilon_t & -Y_z\sin\varepsilon_t + Z_z\cos\varepsilon_t \end{Vmatrix}.$$

Замечания. Литература

Когда методы этой главы применяются для составления условных уравнений, решаемых по методу наименьших квадратов относительно поправок к шести элементам орбиты малой планеты, не следует опасаться сильных корреляций между этими шестью неизвестными, если наблюдения достаточно хорошо распределены по гелиоцентрической орбите. Ситуация резко изменится, если в качестве дополнительных неизвестных ввести поправки к элементам орбиты Земли. В этом случае можно было бы избежать корреляций только при получении наблюдений, хорошо распределенных по орбите планеты, из ряда точек, хорошо распределенных по орбите Земли, что редко имеет место в действительности. На практике ограничиваются наблюдениями в окрестности оппозиции. Наблюденные направления в пространстве, соединяющие планету с Землей, не ориентированы случайным образом, как это необходимо для определенного решения; вместо этого все они проходят через небольшую часть пространства вблизи Солнца.

Определение элементов орбиты Земли представляет, таким образом, проблему особой трудности. Благоприятные геометрические условия можно получить при помощи непосредственного наблюдения Солнца, однако наблюдения Солнца отягощены большими систематическими и случайными ошибками из-за его большого видимого диска и влияния нагрева инструмента. Вероятно, хорошее решение когда-нибудь дадут радиолокационные методы, примененные к Венере и Марсу.