Глава X

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ. РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ

1. Интегралы центра масс. Пусть три материальные точки m_j, ($j=0,\ 1,\ 2$) имеют координаты ξ_j, η_j, ζ_j в некоторой инерциальной системе координат. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= k^2 m_1 \frac{\xi_1-\xi_0}{r_{01}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2-\xi_0}{r_{02}^3}, \\
\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= k^2 m_0 \frac{\xi_0-\xi_1}{r_{01}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2-\xi_1}{r_{12}^3}, \\
\frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= k^2 m_0 \frac{\xi_0-\xi_2}{r_{02}^3} + k^2 m_1 \frac{\xi_1-\xi_2}{r_{12}^3}
\end{aligned} \tag{1}$$

и аналогичные уравнения для η и ζ. В этих уравнениях

$$r_{jk}^2 = (\xi_j-\xi_k)^2 + (\eta_j-\eta_k)^2 + (\zeta_j-\zeta_k)^2, \qquad j \neq k.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r_{jk}} = -\frac{\xi_k-\xi_j}{r_{jk}^3},$$

то уравнения (1) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
m_j \frac{d^2\xi_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial\xi_j}, \\
m_j \frac{d^2\eta_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial\eta_j}, \qquad j=0,\ 1,\ 2, \\
m_j \frac{d^2\zeta_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial\zeta_j}
\end{aligned} \tag{2}$$

при

$$F = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right],$$

где F — силовая функция. Система уравнений содержит девять дифференциальных уравнений второго порядка; поэтому порядок системы равен 18.

Функция F является функцией от разностей координат трех тел. Если начало системы координат переносится вдоль оси ξ так, что ξ_0 переходит в ξ_0+a, ξ_1 переходит в ξ_1+a, ξ_2 — в ξ_2+a, то функция F не изменяется. Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_0} + \frac{\partial F}{\partial\xi_1} + \frac{\partial F}{\partial\xi_2} = 0.$$

Уравнения (2) показывают, что это уравнение равносильно следующему:

$$\sum m_j \frac{d^2\xi_j}{dt^2} = 0, \qquad j = 0,\ 1,\ 2,$$

которое можно проинтегрировать дважды и получить

$$\sum m_j \xi_j = A_1 t + B_1.$$

Применяя то же рассуждение к координатам η и ζ, получаем также

$$\sum m_j \eta_j = A_2 t + B_2,$$
$$\sum m_j \zeta_j = A_3 t + B_3,$$

где величины A и B — постоянные интегрирования.

Знание этих интегралов дает возможность понизить порядок системы с 18 единиц до 12. Это можно выполнить, принимая центр масс трех тел за начало координат и исключая всюду ξ_0, η_0, ζ_0 при помощи соотношений

$$\begin{aligned} m_0\xi_0 &= -m_1\xi_1 - m_2\xi_2, \\ m_0\eta_0 &= -m_1\eta_1 - m_2\eta_2, \\ m_0\zeta_0 &= -m_1\zeta_1 - m_2\zeta_2. \end{aligned} \tag{3}$$

В результате этого исчезает первое уравнение в каждой из трех систем уравнений (1). Допустим, что оставшиеся шесть уравнений второго порядка решены, т. е. ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 определены как функции времени и двенадцати произвольных постоянных интегрирования. Подстановка этих результатов в (3) даст тогда также значения ξ_0, η_0, ζ_0 в виде функций от времени и тех же постоянных интегрирования.

Постоянные A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 служат для описания движения центра масс в исходной произвольной инерциальной системе координат. Они не играют никакой роли в движении тел относительно центра масс.

Необходимо отметить соответствие между этими интегралами задачи трех тел и интегралами задачи двух тел. Этот вывод можно распространить также на систему n тел, где n произвольно. В этом случае понижение порядка происходит от $6n$ до $6(n-1)$.

Для большинства задач представляется более удобным поместить начало координат в одно из тел, например в m_0, и ввести относительные координаты тела m_1

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0,\ \ y_1 = \eta_1 - \eta_0,\ \ z_1 = \zeta_1 - \zeta_0$$

и тела m_2

$$x_2 = \xi_2 - \xi_0,\ \ y_2 = \eta_2 - \eta_0,\ \ z_2 = \zeta_2 - \zeta_0.$$

Эта система координат больше не является инерциальной системой, а уравнения приобретают несколько более сложный характер, чем исходные уравнения (1). Чтобы получить эти уравнения, положим r_1 вместо r_{01}, r_2 вместо r_{02}, Δ вместо r_{12}. Вычитанием первого уравнения системы (1) из второго и третьего получаем соответственно

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k^2(m_0+m_1)\frac{x_1}{r_1^3} + k^2 m_2\left(\frac{x_2-x_1}{\Delta^3} - \frac{x_2}{r_2^3}\right),$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k^2(m_0+m_2)\frac{x_2}{r_2^3} + k^2 m_1\left(\frac{x_1-x_2}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right).$$

Аналогичные уравнения можно написать для координат y и z. Правые части этих уравнений можно записать в видѐ частных производных от силовой функции

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{\partial F_1}{\partial y_1},\quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2}=\frac{\partial F_1}{\partial z_1},$$

$$F_1=\frac{k^2(m_0+m_1)}{r_1}+k^2m_2\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right), \tag{4а}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_2},\quad \frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{\partial F_2}{\partial y_2},\quad \frac{d^2z_2}{dt^2}=\frac{\partial F_2}{\partial z_2},$$

$$F_2=\frac{k^2(m_0+m_2)}{r_2}+k^2m_1\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1^3}\right). \tag{4б}$$

Понижение порядка системы уравнений дало систему с различными силовыми функциями для уравнений движения двух масс. Для большинства приложений это не является неудобством.

Легко видеть, что те же преобразования можно применить к любому числу материальных точек. Если система состоит из m_0 и еще n материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то силовая функция для точки m_1 принимает следующий вид:

$$F_1=\frac{k^2(m_0+m_1)}{r_1}+\sum_{j=2}^{n}k^2m_j\left(\frac{1}{\Delta_{1j}}-\frac{x_1x_j+y_1y_j+z_1z_j}{r_j^3}\right). \tag{5}$$

2. Интегралы площадей и интеграл энергии. Возвращаясь к системе уравнений (2), рассмотрим изменение координат, происходящее от поворота вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Поворот на угол φ вокруг оси ζ дает

$$\begin{aligned}\xi_j&=\xi_j'\cos\varphi-\eta_j'\sin\varphi,\\ \eta_j&=\xi_j'\sin\varphi+\eta_j'\cos\varphi,\\ \zeta_j&=\zeta_j'.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\varphi}&=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial\varphi}+\frac{\partial F}{\partial\eta_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial\varphi}\right)=\\ &=\sum\frac{\partial F}{\partial\xi_j}(-\xi_j'\sin\varphi-\eta_j'\cos\varphi)+\sum\frac{\partial F}{\partial\eta_j}(\xi_j'\cos\varphi-\eta_j'\sin\varphi)=\\ &=-\sum\eta_j\frac{\partial F}{\partial\xi_j}+\sum\xi_j\frac{\partial F}{\partial\eta_j}.\end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0,$$

так как F не изменяется при повороте. Если этот результат внести в уравнения (2), умножая первое на $-\eta_j$, второе на $+\xi_j$ и складывая, то мы найдем, что

$$\sum m_j\xi_j\frac{d^2\eta_j}{dt^2}-\sum m_j\eta_j\frac{d^2\xi_j}{dt^2}=0.$$

Два аналогичных уравнения получаются круговой заменой переменных. Эти три уравнения можно проинтегрировать и получить

$$\begin{aligned}
&\sum m_j\left(\eta_j \frac{d\zeta_j}{dt} - \zeta_j \frac{d\eta_j}{dt}\right) = c_1,\\
&\sum m_j\left(\zeta_j \frac{d\xi_j}{dt} - \xi_j \frac{d\zeta_j}{dt}\right) = c_2,\\
&\sum m_j\left(\xi_j \frac{d\eta_j}{dt} - \eta_j \frac{d\xi_j}{dt}\right) = c_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Это интегралы площадей. Они выражают закон сохранения момента количества движения этой системы.

Наконец, можно получить интеграл живых сил этой системы, умножая уравнения (2) последовательно на $\dot\xi_j$, $\dot\eta_j$, $\dot\zeta_j$ и складывая. В результате получается

$$\sum m_j\,[\dot\xi_j\ddot\xi_j + \dot\eta_j\ddot\eta_j + \dot\zeta_j\ddot\zeta_j] = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\dot\xi_j + \frac{\partial F}{\partial \eta_j}\dot\eta_j + \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}\dot\zeta_j\right) = \frac{\partial F}{\partial t},$$

так как F является функцией только от координат. Это уравнение может быть проинтегрировано и дает

$$\frac{1}{2}\sum m_j\,[\dot\xi_j^2 + \dot\eta_j^2 + \dot\zeta_j^2] = F + C, \tag{7}$$

где C — постоянная интегрирования. Левая часть представляет собой кинетическую энергию T системы; $-F$ является ее потенциальной энергией. Следовательно, интеграл (7) в форме

$$T - F = C$$

выражает сохранение энергии.

При помощи трех интегралов площадей и интеграла энергии систему уравнений задачи трех тел можно привести к порядку $18-6-3-1=8$. Наш вывод в равной степени относится к задаче n тел. Порядок можно понизить от $6n$ до $6n-6-3-1=6n-10$.

Эти понижения порядков были выполнены фактически для задачи трех тел. Еще одно понижение на два порядка возможно путем исключения времени (т. е. использования одной из зависимых переменных в качестве независимой переменной) и так называемого исключения узлов. Поэтому задача трех тел окончательно приводится к шестому порядку, а задача n тел — к порядку $6n-12$.

В солнечной системе орбиты больших планет, за исключением Плутона, имеют малые наклонности относительно общей плоскости, за которую можно выбрать такую плоскость, в которой момент количества движения системы достигает максимума. Это так называемая неизменяемая плоскость Лапласа. Если пренебречь координатами, перпендикулярными к этой плоскости, то уравнения движения относятся к задаче n тел, движущихся в общей плоскости. Такая система имеет порядок $4n$. Число общих интегралов теперь равно $4+1+1=6$, и порядок может быть понижен до $4n-6$. Для задачи трех тел в плоскости понижением порядка приходим к системе шестого порядка. Как и в трехмерной задаче, возможно еще одно понижение порядка этой системы на две единицы. Следовательно, для задачи трех тел в плоскости окончательное понижение порядка приводит к системе четвертого порядка, для задачи n тел в плоскости — к системе порядка $4n-8$.

3. Ограниченная задача трех тел. Рассмотрим, наконец, задачу трех тел с массами m_0, m_1, m_2, в которой масса m_2 является пренебрежимо малой по сравнению с m_0 и m_1. В этом случае движения m_0 и m_1 не подвергаются заметному влиянию возмущений со стороны m_2; но тогда они представляют собой движения в задаче двух тел, и их можно считать полностью известными.

Примем общую орбитальную плоскость масс m_0 и m_1 за плоскость $\xi\eta$, так что $\zeta_0=\zeta_1=0$; и пусть начало системы координат помещено в центр масс тел m_0 и m_1. Если координаты тела m_2 обозначены через ξ, η, ζ, а расстояния от тел m_0 и m_1 через ϱ_0, ϱ_1 соответственно, то уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \zeta}, \tag{8}$$

$$F=\frac{k^2m_0}{\varrho_0}+\frac{k^2m_1}{\varrho_1}.$$

Предположим теперь, что оба конечных тела обращаются по кругам относительно их центра масс; пусть среднее движение по этим орбитам равно n', и пусть a' означает постоянное расстояние между телами m_0 и m_1. Тогда

$$n'^2a'^3=k^2(m_0+m_1)$$

и

$$\xi_0=-\frac{m_1}{m_0+m_1}a'\cos\varphi, \qquad \eta_0=-\frac{m_1}{m_0+m_1}a'\sin\varphi,$$

$$\xi_1=+\frac{m_0}{m_0+m_1}a'\cos\varphi, \qquad \eta_1=+\frac{m_0}{m_0+m_1}a'\sin\varphi,$$

$$\varphi=n't+\text{const}.$$

Теперь введем систему координат, вращающуюся вокруг оси ζ с постоянной угловой скоростью n', и пусть координаты в этой вращающейся системе X, Y, Z. В таком случае

$$\begin{aligned}\xi&=X\cos\varphi-Y\sin\varphi,\\ \eta&=X\sin\varphi+Y\cos\varphi,\\ \zeta&=Z.\end{aligned}$$

Как было показано в разд. 10 гл. I, уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2}-2n'\frac{dY}{dt}&=\frac{\partial\Omega}{\partial X},\\ \frac{d^2Y}{dt^2}+2n'\frac{dX}{dt}&=\frac{\partial\Omega}{\partial Y},\\ \frac{d^2Z}{dt^2}\qquad\qquad&=\frac{\partial\Omega}{\partial Z},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\Omega=\frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2)+F.$$

Направление оси X можно выбрать так, чтобы массы m_0 и m_1 постоянно находились на этой оси; следовательно,

$$X_0=-\frac{m_1}{m_0+m_1}a', \qquad X_1=+\frac{m_0}{m_0+m_1}a'.$$

$$Y_0=0, \qquad Y_1=0,$$

и

$$\varrho_0^2 = \left(X + \frac{m_1}{m_0+m_1}\, a'\right)^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$\varrho_1^2 = \left(X - \frac{m_0}{m_0+m_1}\, a'\right)^2 + Y^2 + Z^2.$$

Следовательно, Ω не зависит явно от времени, а является функцией только от X, Y, Z. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial\Omega}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial\Omega}{\partial Z}\dot{Z} = \frac{d\Omega}{dt}.$$

Умножая три уравнения (9) соответственно на $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$ и складывая произведения, получим

$$\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} + \dot{Z}\ddot{Z} = \frac{d\Omega}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \Omega - C, \tag{10}$$

где C — постоянная интегрирования. Этот интеграл известен как интеграл Якоби ограниченной задачи трех тел.

Интеграл Якоби можно выразить через координаты и компоненты скорости в невращающейся системе координат. Простое преобразование дает

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 - 2n'(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + n'^2(X^2 + Y^2).$$

Следовательно, в невращающейся системе координат интеграл Якоби может быть записан так:

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - n'(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = F - C. \tag{11}$$

Прямой вывод этого интеграла из уравнений движения в невращающейся системе координат предоставляется в качестве упражнения читателю. При этом выводе необходимо помнить о том, что в невращающейся системе координат силовую функцию F можно считать функцией от $\xi - \xi_0$, $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_0$, $\eta - \eta_1$, ζ. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_0} - \frac{\partial F}{\partial \xi_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = -\frac{\partial F}{\partial \eta_0} - \frac{\partial F}{\partial \eta_1}.$$

4. Критерий Тиссерана. Важным приложением интеграла Якоби ограниченной задачи трех тел является критерий Тиссерана для отождествления кометы путем сравнения элементов ее орбиты в различных появлениях.

Пусть m_0 и m_1 представляют соответственно Солнце и Юпитер. Уравнения (8) можно применить к системе координат x, y, z с началом координат в m_0 при помощи перехода к следующей силовой функции:

$$F = \frac{k^2 m_0}{r} + k^2 m_1 \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{xx' + yy'}{a'^3}\right] =$$

$$= \frac{k^2 m_0}{r} + R,$$

в которой x, y, z — гелиоцентрические координаты кометы, x', y' — гелиоцентрические координаты Юпитера, а r и ϱ — расстояния этой кометы соответственно от Солнца и Юпитера.

Интеграл (11) можно написать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-n'(x\dot{y}-y\dot{x})-\frac{k^2m_0}{r}=R-C. \tag{12}$$

Мгновенные элементы гелиоцентрической орбиты кометы удовлетворяют интегралам задачи двух тел

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=k^2m_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right),$$
$$x\dot{y}-y\dot{x}=[k^2m_0a(1-e^2)]^{1/2}\cos I, \tag{13}$$

в которых I — наклонность плоскости орбиты кометы относительно плоскости орбиты Юпитера. Подстановка (13) в (12) при использовании формулы

$$n'=k(m_0+m_1)^{1/2}(a')^{-3/2}$$

дает

$$-\frac{1}{2a}-\left(1-\frac{m_1}{m_0}\right)^{1/2}\left[\frac{a(1-e^2)}{a'^3}\right]^{1/2}\cos I=\frac{R-C}{k^2m_0}. \tag{14}$$

Элементы орбиты периодической кометы могут настолько значительно измениться при тесном сближении с Юпитером между двумя появлениями, что может возникнуть вопрос о тождественности кометы в этих двух появлениях.

Теперь допустим, что две системы элементов кометной орбиты, полученные в двух появлениях, подставлены в уравнение (14). Далее можно предположить, что в обоих появлениях комета достаточно далека от Юпитера, что R/k^2m_0 порядка m_1/m_0, несмотря на крайнюю близость к Юпитеру между двумя появлениями. Если пренебречь величинами порядка m_1/m_0, то уравнение (14) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2a}+\left[\frac{a(1-e^2)}{a'^3}\right]^{1/2}\cos I=\text{const}. \tag{15}$$

Это уравнение известно как критерий Тиссерана. Как показывает его вывод, он основан на интеграле Якоби ограниченной задачи. Поэтому, строго говоря, критерий Тиссерана был бы справедлив только в том случае, если бы орбита Юпитера была круговой. Эксцентричность орбиты Юпитера приведет к тому, что критерий Тиссерана в точности не удовлетворяется. Возмущения со стороны остальных планет, особенно если имело место тесное сближение с еще одной планетой между появлениями, могут вызвать дополнительное расхождение. Принять во внимание эксцентриситет орбиты Юпитера можно, но это нарушит простоту критерия. Обычная процедура в приложениях состоит в том, что, если критерий Тиссерана выполняется приближенно, допускают вероятность тождественности кометы в двух появлениях. Затем предпринимается точное численное интегрирование орбиты между двумя появлениями. Это покажет, было ли гипотетическое заключение правильным или нет. Если критерий Тиссерана не удовлетворяется, т. е. если подстановка обеих систем элементов в уравнение (15) дает заметно различные результаты, то можно сделать вывод о том, что эти две системы элементов не принадлежат одной периодической комете. Следовательно, мы избавляемся от труда установления этого же факта при помощи длинной процедуры вычисления возмущений.

5. Поверхности и кривые нулевой скорости. Интеграл Якоби для ограниченной задачи во вращающейся системе координат с началом в центре масс двух конечных тел может быть записан в следующем виде:

$$\frac{k^2m_0}{\varrho_0}+\frac{k^2m_1}{\varrho_1}+\frac{1}{2}n'^2(X^2+Y^2)=C+\frac{1}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2).$$

Поскольку

$$k^2(m_0+m_1)=n'^2a'^3,$$

где a' есть постоянное расстояние между двумя конечными массами, то это выражение можно упростить, вводя

$$\nu=\frac{m_1}{m_0+m_1},$$

откуда

$$k^2m_0=(1-\nu)\,n'^2a'^3,\quad k^2m_1=\nu n'^2a'^3.$$

Отсюда следует, что

$$(1-\nu)\frac{a'}{\varrho_0}+\nu\frac{a'}{\varrho_1}+\frac{1}{2}\frac{X^2+Y^2}{a'^2}=\frac{C}{n'^2a'^2}+\frac{1}{2}\frac{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}{n'^2a'^2}.$$

Это выражение можно еще более упростить таким выбором единиц длины и времени, чтобы $a'=1$, $n'=1$, что дает

$$\frac{1-\nu}{\varrho_0}+\frac{\nu}{\varrho_1}+\frac{X^2+Y^2}{2}=C+\frac{1}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2). \tag{16}$$

Если левую часть обозначить символом Ω, а вместо $\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2$ написать V^2, то интеграл Якоби принимает следующий вид:

$$\Omega=C+\frac{1}{2}V^2, \tag{17}$$

в котором Ω является суммой трех величин: ϱ_0^{-1}, ϱ_1^{-1} и X^2+Y^2, каждая из которых умножена на соответствующий положительный числовой множитель. Некоторые интересные результаты, связанные с ограниченной задачей, можно получить, рассматривая поверхности вида

$$\Omega=C,$$

которые называются поверхностями нулевой скорости. Функция Ω имеет полюсы при $\varrho_0=0$, $\varrho_1=0$ и на бесконечности $(X^2+Y^2\to\infty)$. Если $|Z|$ возрастает, то уравнение $\Omega=C$ стремится к

$$X^2+Y^2=2C$$

как к пределу. Это — уравнение цилиндра, осью которого является ось Z, а квадрат радиуса равен $2C$.

Можно узнать многие свойства этих поверхностей, изучая кривые, полученные пересечением поверхностей с плоскостью XY. Эти кривые являются кривыми нулевой скорости для двумерной ограниченной задачи.

Для дальнейшего рассмотрения удобна другая форма функции Ω. Поскольку

$$\varrho_0^2=(X+\nu a')^2+Y^2,$$
$$\varrho_1^2=[X-(1-\nu)\,a']^2+Y^2,$$

то отсюда следует, что

$$(1-\nu)\varrho_0^2+\nu\varrho_1^2=X^2+Y^2+\nu(1-\nu),$$

если положить a' равным единице. Следовательно,

$$\Omega=(1-\nu)\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{\varrho_0^2}{2}\right)+\nu\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\varrho_1^2}{2}\right), \tag{18}$$

где постоянный член $-\frac{1}{2}\nu(1-\nu)$ отброшен.

График линий уровня функции Ω в плоскости XY (рис. 8) показывает: а) два ряда замкнутых кривых, окружающих каждую из двух масс в отдельности и соответствующих значениям Ω, уменьшающимся наружу, и б) ряд замкнутых кривых, охватывающих обе массы вместе и соответствующих значениям Ω, возрастающим наружу. Область,

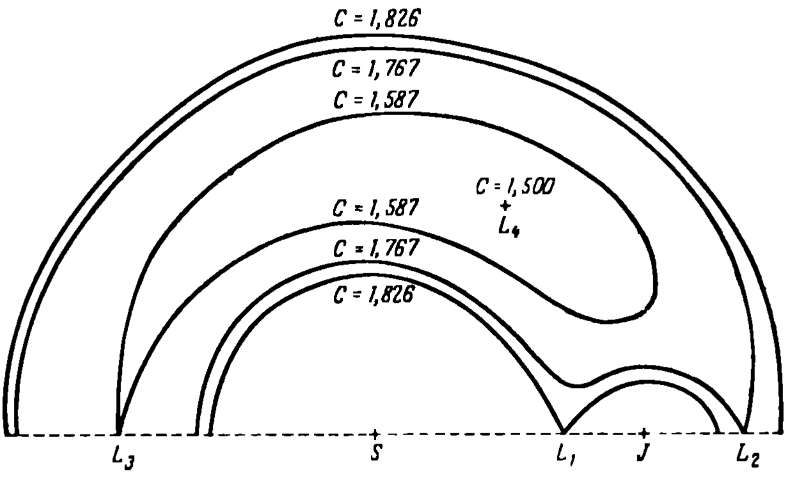

Рис. 8. Кривые нулевой скорости для $\nu/(1-\nu)=1/10$ (по Дж. Дарвину).

$$\Omega\equiv\frac{10}{11}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{\varrho_0^2}{2}\right)+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\varrho_1^2}{2}\right)=C.$$

отделяющая кривые типа (а) от кривых типа (б), заполнена кривыми более сложного типа, которые оканчиваются в двух так называемых равносторонних точках, в которых функция Ω достигает равных абсолютных минимумов. В этих точках $\varrho_0=\varrho_1=1$, и выражение (18) дает для абсолютного минимума значение

$$\Omega_{\min}=\frac{3}{2}.$$

Допустим, что орбита частицы имеет значение интеграла Якоби, равное C_1, и координаты X, Y, находящиеся в любой момент времени внутри замкнутой кривой, окружающей одну из масс и соответствующей $\Omega=C_1$. Тогда в силу того, что согласно (17)

$$\Omega=C_1+\frac{1}{2}V^2,$$

скорость не может быть действительной в областях, где $\Omega<C_1$. Поэтому эта частица никогда не может пересечь замкнутую кривую нулевой скорости $\Omega=C_1$.

Это замечательный результат, касающийся характера движения по орбитам определенных типов в ограниченной задаче. Он впервые был получен Хиллом и применен специально к движению Луны. Если, пренебрегая эксцентриситетом орбиты Земли, считать, что движение Луны удовлетворяет уравнениям ограниченной задачи, то ему соответствует значение интеграла Якоби, принадлежащее замкнутой кривой с максимальным расстоянием от центра Земли, равным 109,695 экваториального радиуса. Хилл сделал следующий вывод: «Таким образом, если пренебречь эксцентриситетом земной орбиты, мы имеем строгое доказательство существования верхнего предела радиуса-вектора Луны».

6. Частные решения Лагранжа. Уравнения движения для двумерной задачи удовлетворяются постоянными значениями $X = X_1$, $Y = Y_1$, если правые части первых двух из уравнений (9) равны нулю. Если использовать выражение (18) для Ω, то эти два уравнения можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_0}\frac{\partial\varrho_0}{\partial X} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial Y} = \frac{\partial\Omega}{a\varrho_0}\frac{\partial\varrho_0}{\partial Y} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial Y} = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются следующим тривиальным решением:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_0} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1} = 0,$$

которое дает $\varrho_0 = \varrho_1 = 1$ — равносторонние решения L_4 и L_5. Остальные решения получаются из уравнения

$$\frac{\partial(\varrho_0, \varrho_1)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{\varrho_0\varrho_1}\begin{vmatrix} X+\nu & X-1+\nu \\ Y & Y \end{vmatrix} = 0.$$

Для этих решений $Y = 0$. Поэтому они лежат на оси X, и соответствующие значения X должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_0}\frac{\partial\varrho_0}{\partial X} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial X} = 0.$$

Как график, так и подробный алгебраический анализ показывают, что имеются три решения.

Решение L_1 расположено между двумя конечными массами. Здесь

$$\varrho_0 + \varrho_1 = 1, \quad X + \nu = \varrho_0, \quad X - 1 + \nu = -\varrho_1$$

и

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial X} = -\frac{\partial\varrho_1}{\partial X} = +1.$$

Из (18) вытекает, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_0} = (1-\nu)(-\varrho_0^{-2} + \varrho_0),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1} = \nu(-\varrho_1^{-2} + \varrho_1).$$

Уравнение для $\partial\Omega/\partial X$ в выражении через ϱ_1 принимает вид

$$(1-\nu)[-(1-\varrho_1)^{-2} + 1 - \varrho_1] - \nu(-\varrho_1^{-2} + \varrho_1) = 0,$$

или

$$\frac{\nu}{1-\nu} = \frac{(3\varrho_1 - 3\varrho_1^2 + \varrho_1^3)\varrho_1^2}{(1-\varrho_1)^2(1-\varrho_1^3)}.$$

Если отноше ие $\nu/(1-\nu)$ мало́, то это уравнение имеет корень в окрестности

$$\alpha=\left[\frac{\nu}{3(1-\nu)}\right]^{1/3}.$$

Разлагая по степеням ϱ_1, получаем

$$3\alpha^3=3\varrho_1^3\left(1+\varrho_1+\frac{4}{3}\varrho_1^2+\ldots\right),$$

$$\alpha=\varrho_1\left(1+\frac{1}{3}\varrho_1+\frac{1}{3}\varrho_1^2+\ldots\right),$$

$$\varrho_1=\alpha\left(1-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2+\ldots\right).$$

Решение L_2 располагается за меньшей массой. Здесь

$$\varrho_0-\varrho_1=1,\quad X+\nu=\varrho_0,\quad X-1+\nu=\varrho_1$$

и

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial X}=\frac{\partial\varrho_1}{\partial X}=+1.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$(1-\nu)\left[-(1+\varrho_1)^{-2}+1+\varrho_1\right]+\nu\left(-\varrho_1^{-2}+\varrho_1\right)=0,$$

или

$$\frac{\nu}{1-\nu}=\frac{\varrho_1^2\left(3\varrho_1+3\varrho_1^2+\varrho_1^3\right)}{(1+\varrho_1)^2\left(1-\varrho_1^3\right)}.$$

При этом, если отношение $\nu/(1-\nu)$ мало́, то это уравнение имеет корень в окрестности $\varrho_1=\alpha$. Разлагая по степеням ϱ_1, получаем

$$3\alpha^3=3\varrho_1^3\left(1-\varrho_1+\frac{4}{3}\varrho_1^2+\ldots\right),$$

$$\alpha=\varrho_1\left(1-\frac{1}{3}\varrho_1+\frac{1}{3}\varrho_1^2+\ldots\right),$$

$$\varrho_1=\alpha\left(1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2+\ldots\right).$$

Решение L_3 расположено позади большей массы. Здесь

$$\varrho_1-\varrho_0=1,\quad X+\nu=-\varrho_0,\quad X-1+\nu=-\varrho_1$$

и

$$\frac{\partial\varrho_0}{\partial X}=\frac{\partial\varrho_1}{\partial X}=-1.$$

Уравнение принимает вид

$$(1-\nu)\left(-\varrho_0^{-2}+\varrho_0\right)+\nu\left(-\varrho_1^{-2}+\varrho_1\right)=0,$$

$$\frac{\nu}{1-\nu}=-\frac{\varrho_0^{-2}-\varrho_0}{\varrho_1^{-2}-\varrho_1}.$$

Положим

$$\varrho_0=1+\beta,\quad \varrho_1=2+\beta.$$

Выражая через β, получаем

$$\frac{\nu}{1-\nu}=-\frac{(2+\beta)^2(3\beta+3\beta^2+\beta^3)}{(1+\beta)^2(7+12\beta+6\beta^2+\beta^3)}=$$
$$=-\frac{12\beta+24\beta^2+19\beta^3+7\beta^4+\dots}{7+26\beta+37\beta^2+25\beta^3+\dots},$$
$$\nu=-\frac{12\beta+24\beta^2+19\beta^3+7\beta^4+\dots}{7+14\beta+13\beta^2+6\beta^3+\dots}.$$

Последовательные приближения к решению имеют вид

$$\beta=-\frac{7}{12}\nu, \quad \beta=-\frac{7}{12}\nu\left[1+\frac{23}{84}\left(\frac{7}{12}\nu\right)^2\right].$$

7. Малые колебания относительно равновесных решений. Частные решения могут быть получены с любой требуемой степенью точности. Следующим вопросом является изучение орбит в окрестности этих частных решений. Пусть X_0, Y_0 — координаты, соответствующие какому-нибудь одному из частных решений. Они удовлетворяют уравнениям (9)

$$\frac{d^2X_0}{dt^2}-2\frac{dY_0}{dt}=\left(\frac{d\Omega}{dX}\right)_0,$$
$$\frac{d^2Y_0}{dt^2}+2\frac{dX_0}{dt}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right)_0,$$

в которых индекс 0 означает, что частные производные от Ω должны быть вычислены для $X=X_0$, $Y=Y_0$. Если теперь

$$X=X_0+\xi, \quad Y=Y_0+\eta, \quad Z=\zeta$$

подставить в эти уравнения, то получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\frac{d\eta}{dt}&=\Omega_{xx}\xi+\Omega_{xy}\eta+\Omega_{xz}\zeta+\dots,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}+2\frac{d\xi}{dt}&=\Omega_{yx}\xi+\Omega_{yy}\eta+\Omega_{yz}\zeta+\dots,\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\Omega_{zx}\xi+\Omega_{zy}\eta+\Omega_{zz}\zeta+\dots.\end{aligned} \tag{19}$$

Правые части уравнений (19) получены при помощи разложения правых частей уравнений (9) в ряд Тэйлора. Коэффициенты представляют собой частные производные $\partial^2\Omega/\partial x^2$ и т. д., которые необходимо вычислить при $X=X_0$, $Y=Y_0$, $Z=0$, и поэтому они являются постоянными. Для любого частного решения можно получить определенные числовые значения.

Следовательно, уравнения (19) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами при условии, что в разложениях в ряды Тэйлора удерживаются члены только первого порядка. В этом заключается стандартный метод рассмотрения малых колебаний в механических задачах.

Проиллюстрируем это для случая двух измерений. Пусть имеем решение задачи

$$\xi=A\exp\sigma t, \quad \eta=B\exp\sigma t,$$

где A, B и σ — постоянные. Тогда

$$\dot\xi = A\sigma \exp \sigma t, \qquad \dot\eta = B\sigma \exp \sigma t,$$
$$\ddot\xi = A\sigma^2 \exp \sigma t, \qquad \ddot\eta = B\sigma^2 \exp \sigma t.$$

Подстановка в (19), если не рассматривать ζ, дает следующие уравнения относительно коэффициентов A и B:

$$(\sigma^2 - \Omega_{xx}) A - (2\sigma + \Omega_{xy}) B = 0,$$
$$(2\sigma - \Omega_{xy}) A + (\sigma^2 - \Omega_{yy}) B = 0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю, что дает

$$(\sigma^2 - \Omega_{xx})(\sigma^2 - \Omega_{yy}) + 4\sigma^2 - \Omega_{xy}^2 = 0,$$

или

$$\sigma^4 + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\sigma^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0. \tag{20}$$

Характер решения дифференциальных уравнений зависит от характера решения этого квадратного уравнения относительно σ^2. Решение будет устойчивым только в том случае, если квадратное уравнение имеет два неравных отрицательных корня σ^2.

Пусть в данном случае этими двумя решениями будут

$$\sigma_1^2 = -|\sigma_1|^2, \quad \sigma_2^2 = -|\sigma_2|^2.$$

Тогда решение дифференциальных уравнений запишется так:

$$\xi = A_1 \exp(+|\sigma_1| it) + A_{-1} \exp(-|\sigma_1| it) +$$
$$+ A_2 \exp(+|\sigma_2| it) + A_{-2} \exp(-|\sigma_2| it),$$
$$\eta = B_1 \exp(+|\sigma_1| it) + B_{-1} \exp(-|\sigma_1| it) +$$
$$+ B_2 \exp(+|\sigma_2| it) + B_{-2} \exp(-|\sigma_2| it).$$

Однородные уравнения дают отношения A/B для соответствующих коэффициентов; в качестве постоянных интегрирования можно выбрать либо все A, либо все B. Выражая показательные функции через синусы и косинусы, можно так выбрать эти коэффициенты, чтобы выражения для ξ и η были действительными.

С другой стороны, корни σ^2 уравнения (20) могут быть действительными, но противоположных знаков, например $\sigma_1^2 = |\sigma_1|^2$ и $\sigma_2^2 = -|\sigma_2|^2$. Решение принимает вид

$$\xi = A_1 \exp \sigma_1 t + A_{-1} \exp(-\sigma_1 t) +$$
$$+ A_2 \exp(+|\sigma_2| it) + A_{-2} \exp(-|\sigma_2| it),$$
$$\eta = B_1 \exp \sigma_1 t + B_{-1} \exp(-\sigma_1 t) +$$
$$+ B_2 \exp(+|\sigma_2| it) + B_{-2} \exp(-|\sigma_2| it).$$

В общем решении этого типа присутствие показательных членов вызовет неограниченное возрастание ξ и η с временем. Однако, если A_1, A_{-1}, B_1, B_{-1} равны нулю, решение содержит только периодические члены. Это — семейство неустойчивых периодических орбит.

Наконец, корни уравнения (20) могут быть комплексными. т. е.

$$\sigma_{1,2} = p \pm iq, \qquad \sigma_{3,4} = -p \pm iq.$$

Поэтому решение будет иметь следующий вид:

$$\xi = A_1 \exp(p+iq)t + A_{-1}\exp(p-iq)t + \\ + A_2\exp(-p+iq)t + A_{-2}\exp(-p-iq)t,$$

$$\eta = B_1 \exp(p+iq)t + B_{-1}\exp(p-iq)t + \\ + B_2\exp(-p+iq)t + B_{-2}\exp(-p-iq)t$$

и будет неустойчивым.

Частное семейство орбит получается во втором случае при рассмотрении орбит, для которых $A_1 = B_1 = 0$. При $t \to \infty$ эти орбиты асимптотически приближаются к периодическим колебаниям относительно положения равновесия. В третьем случае существует частное семейство орбит, для которых $A_1 = A_{-1} = B_1 = B_{-1} = 0$. Такие орбиты при $t \to \infty$ стремятся к положению равновесия. Различие между этими семействами орбит во втором и третьем случаях заключается в том, что во втором случае периодическое колебание сохраняет свою амплитуду, тогда как в последнем случае амплитуда периодического колебания уменьшается экспоненциально с возрастанием t.

Слова «устойчивое» и «неустойчивое» применяются здесь в связи с существованием или несуществованием малых колебаний относительно положения равновесия или периодических орбит Этот тип устойчивости иногда называют устойчивостью по Пуанкаре, чтобы отличить его от таких задач устойчивости, как, например, задача Пуассона, связанная с вековой неизменностью больших полуосей планетных орбит.

Теперь рассмотрим приложение этих общих результатов к частным решениям Лагранжа ограниченной задачи.

В коллинеарных решениях $Y = 0$; следовательно, $\Omega_{xy} = 0$, и уравнения для малых колебаний принимают следующий вид:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \Omega_{xx}\xi,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} = \Omega_{yy}\eta,$$

где

$$\Omega_{xx} = 1 + \frac{2(1-\nu)}{\varrho_0^3} + \frac{2\nu}{\varrho_1^3},$$

$$\Omega_{yy} = 1 - \frac{1-\nu}{\varrho_0^3} - \frac{\nu}{\varrho_1^3}.$$

Если эти выражения разложить по степеням α, используя выражения, найденные для ϱ_0, ϱ_1 в коллинеарных решениях, то мы найдем, что эти частные решения содержат следующие члены:

	Ω_{xx}	Ω_{yy}	$-\Omega_{xx}-\Omega_{yy}+4$	$\Omega_{xx}\Omega_{yy}$
L_1	$9+12\alpha$	$-3-6\alpha$	$-2-6\alpha$	$-27-90\alpha$
L_2	$9-12\alpha$	$-3+6\alpha$	$-2+6\alpha$	$-27+90\alpha$
L_3	$3+\frac{21}{4}\alpha^3$	$-\frac{21}{8}\alpha^3$	$+1-\frac{21}{8}\alpha^3$	$-\frac{63}{8}\alpha^3$

Теперь, если $\xi = A\exp\sigma t$, $\eta = B\exp\sigma t$ является некоторым решением уравнений, то уравнение (20) относительно σ принимает вид

$$\sigma^4 - (\Omega_{xx} + \Omega_{yy} - 4)\sigma^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} = 0.$$

Для малых значений α (а поэтому и ν) произведение $\Omega_{xx}\Omega_{yy}$ отрицательно. Уравнение относительно σ^2 имеет действительные корни противоположных знаков. Поэтому четыре корня σ состоят из пары действительных корней и пары чисто мнимых корней; корни каждой пары равны по абсолютной величине, но обратны по знаку. Замечания, связанные со вторым случаем, относятся к этим орбитам. Пламмер[1]) в 1901 г. показал, что вывод относительно характера корней справедлив независимо от значения ν.

Для равносторонних решений находим, что

$$\Omega_{xx} = +\frac{3}{4}, \qquad \Omega_{yy} = +\frac{9}{4},$$

$$\Omega_{xy} = \pm\frac{3}{4}(1-2\nu)\sqrt{3},$$

где верхний знак соответствует решению L_4, для которого Y положительно, нижний знак — решению L_5. Уравнение для σ получается в виде

$$\sigma^4 + \sigma^2 + \frac{27}{4}\nu(1-\nu) = 0$$

для обоих равновесных решений. Следовательно,

$$\sigma^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}[1-27\nu(1-\nu)]^{1/2}.$$

Четыре корня являются чисто мнимыми при условии, что

$$27\nu(1-\nu) < 1,$$

$$\nu < 0{,}03852.$$

В зависимости от значения ν имеют место условия первого или третьего случая. Для системы Солнце — Юпитер $\nu = 0{,}00095388$; поэтому

$$\nu(1-\nu) = 0{,}00095297$$

$$1 - 27\nu(1-\nu) = 0{,}974270$$

$$[1-27\nu(1-\nu)]^{1/2} = 0{,}987051$$

$$\sigma^2 = -0{,}006474 \qquad \sigma^2 = -0{,}993526$$

$$\sigma_{1,2} = \pm 0{,}08046\,i \qquad \sigma_{3,4} = \pm 0{,}996758\,i$$

Период:

$$12{,}43\,P_{♃} = 147{,}4 \text{ года} \qquad 1{,}003253\,P_{♃} = 11{,}90 \text{ года}.$$

Для астероида Троянской группы в плоскости орбиты Юпитера движение относительно положения равновесия состоит из колебания с периодом, приблизительно равным 150 годам, называемого либрацией, и колебания с периодом, немного бо́льшим периода обращения самого Юпитера. Амплитуда и фаза либрации играют роль a и ε. Амплитуда и фаза короткопериодического колебания соответствуют e и $\tilde{\omega}$. Тот факт, что период этого колебания несколько длиннее, чем период обращения Юпитера, свидетельствует о движении перигелия.

Орбиты астероидов Троянской группы представляют пример орбит в окрестности равносторонних треугольных решений. Однако эти орбиты едва ли можно рассматривать как малые колебания относительно точек

[1]) H. C. Plummer, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 62, 6 (1901).

равновесия. Развитие эффективных методов для получения общих теорий этих орбит было предметом многочисленных исследований. В частности, см. книгу Брауна и Шука[1]).

Равновесные решения существуют не только для ограниченной задачи трех тел, но также и для общей задачи трех тел, в которой масса третьего тела не является пренебрежимо малой.

Другими частными решениями задачи трех тел, существование которых доказано строго, являются периодические орбиты. Работа Пуанкаре[2]) представляет обширную теорию этого класса орбит. В гл. XII настоящей книги пример такого рода периодических орбит приводится при рассмотрении теории Хилла — Брауна движения Луны. Метод, примененный для изучения орбит в окрестности периодической орбиты, выбранной в качестве первого приближения в теории Луны, применим в большинстве случаев и к периодическим орбитам в ограниченной задаче. Однако в этом случае уравнения в вариациях больше не являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, как это было для частных решений Лагранжа. Коэффициенты этих линейных уравнений представляют собой периодические функции времени.

8. Различные формы уравнений движения. Отсутствие решения задачи трех или более тел сделало необходимым развитие методов для получения решений при помощи процесса последовательных приближений. Эти методы различны для различных конфигураций.

Система Земля — Луна с Солнцем в качестве главного возмущающего тела представляет типичный пример спутниковой конфигурации. Пусть три этих тела рассматриваются как материальные точки m_j с координатами ξ_j, η_j, ζ_j $(j=0,\ 1,\ 2)$ в системе координат, начало которой лежит в центре масс. Пусть m_0 представляет Землю, m_1 — Луну, m_2 — Солнце. Уравнения движения можно написать в следующем виде:

$$m_j\frac{d^2\xi_j}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \xi_j},\quad m_j\frac{d^2\eta_j}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \eta_j},\quad m_j\frac{d^2\zeta_j}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial \zeta_j},\qquad j=0,\ 1,\ 2,$$

$$F=k^2\left[\frac{m_0m_1}{r_{01}}+\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}\right],$$

где

$$r_{jk}^2=(\xi_j-\xi_k)^2+(\eta_j-\eta_k)^2+(\zeta_j-\zeta_k)^2.$$

Это — система восемнадцатого порядка, у которой интегралы центра масс при особом выборе системы координат имеют вид

$$\Sigma m_j\xi_j=0,\quad \Sigma m_j\eta_j=0,\quad \Sigma m_j\zeta_j=0.$$

При помощи этих соотношений можно понизить порядок системы до 12.

Выбор надлежащего преобразования координат, посредством которого можно совершить это понижение порядка системы, определяется специфическими чертами спутниковой системы: расстояние r_{01} мало по сравнению с r_{02} или r_{12}, тогда как m_2 велико по сравнению с m_0+m_1.

[1]) E. W. Brown and C. A. Shook, Planetary Theory, Cambridge Univ. Press, 1933.

[2]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892—1899.

(В аналогичной звездной конфигурации имеет место первое из этих свойств, но все массы одного и того же порядка.)

Если расстояние r_{01} очень мало в сравнении с r_{02}, то движение центра масс тел m_0 и m_1 относительно m_2 будет близким к невозмущенному движению. Это тем ближе к истине, чем меньше отношение r_{01}/r_{02}. Это рассуждение подсказывает, что выгодно ввести координаты Луны относительно Земли и координаты Солнца относительно центра масс Земли и Луны. Поэтому пусть

$$x = \xi_1 - \xi_0, \qquad y = \eta_1 - \eta_0, \qquad z = \zeta_1 - \zeta_0,$$

$$x' = \xi_2 - \frac{m_0\xi_0 + m_1\xi_1}{m_0 + m_1}, \quad y' = \eta_2 - \frac{m_0\eta_0 + m_1\eta_1}{m_0 + m_1}, \quad z' = \zeta_2 - \frac{m_0\zeta_0 + m_1\zeta_1}{m_0 + m_1}.$$

Тогда получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{m_0}\frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{1}{m_1}\frac{\partial F}{\partial \xi_1},$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{1}{m_0 + m_1}\left[\frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right] + \frac{1}{m_2}\frac{\partial F}{\partial \xi_2}$$

и аналогичные уравнения для y, y', z, z'.

Теперь необходимо выразить частные производные от F через частные производные по новым координатам. Из соотношений

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi_j} + \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \xi_j}$$

вытекает, что

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_0} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{m_0}{m_0 + m_1}\frac{\partial F}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = +\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{m_1}{m_0 + m_1}\frac{\partial F}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_2} = +\frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1)\, m_2}\frac{\partial F}{\partial x'}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Чтобы выразить r_{01}^2, r_{02}^2, r_{12}^2 через новые координаты, необходимо выразить разности $\xi_1 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_1$ через x, x'. Аналогичные соотношения будут иметь место для координат η и ζ. Мы имеем

$$-\xi_0 + \xi_1 = x,$$

$$-m_0\xi_0 - m_1\xi_1 + (m_0 + m_1)\,\xi_2 = (m_0 + m_1)\,x',$$

$$m_0\xi_0 + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0.$$

Решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$\xi_0 = -\frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}x' - \frac{m_1}{m_0 + m_1}x,$$

$$\xi_1 = -\frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}x' + \frac{m_0}{m_0 + m_1}x,$$

$$\xi_2 = \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2}x',$$

и поэтому

$$\xi_1 - \xi_0 = x,$$
$$\xi_2 - \xi_0 = x' + \frac{m_1}{m_0 + m_1} x,$$
$$\xi_2 - \xi_1 = x' - \frac{m_0}{m_0 + m_1} x,$$

что также может быть легко получено из геометрических соображений.

Если теперь

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$
$$xx' + yy' + zz' = rr' \cos S,$$

то

$$r_{01}^2 = r^2,$$
$$r_{02}^2 = r'^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} rr' \cos S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 r^2 =$$
$$= r'^2 \left[1 + 2 \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1}\right)^2 \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right],$$
$$r_{12}^2 = r'^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} rr' \cos S + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2 r^2 =$$
$$= r'^2 \left[1 - 2 \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos S + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^2 \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right].$$

Известное разложение при помощи полиномов Лежандра даст

$$\frac{1}{r_{02}} = \frac{1}{r'} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'^2} P_1(\cos S) + \frac{m_1^2}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) -$$
$$- \frac{m_1^3}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + \ldots,$$
$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r'} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'^2} P_1(\cos S) + \frac{m_0^2}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) +$$
$$+ \frac{m_0^3}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + \ldots$$

и, наконец,

$$F = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r} + \frac{(m_0 + m_1) m_2}{r'} + \frac{m_0 m_1 m_2}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) + \right.$$
$$+ \frac{m_0 m_1 m_2 (m_0 - m_1)}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) +$$
$$\left. + \frac{m_0 m_1 m_2 (m_0^2 - m_0 m_1 + m_1^2)}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^4}{r'^5} P_4(\cos S) + \ldots\right]. \quad (22)$$

Член с $P_1(\cos S)$ обратился в нуль.

Если теперь положим

$$\frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} F = F_☾,$$
$$\frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} F = F_\odot,$$

то уравнения (21) принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=k^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{m_0+m_1}{r}+m_2\frac{r^2}{r'^3}P_2(\cos S)+m_2\frac{m_0-m_1}{m_0+m_1}\frac{r^3}{r'^4}P_3(\cos S)+\right.$$
$$\left.+m_2\frac{m_0^2-m_0m_1+m_1^2}{(m_0+m_1)^2}\frac{r^4}{r'^5}P_4(\cos S)+\ldots\right],$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2}=k^2\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{m_0+m_1+m_2}{r'}+\frac{(m_0+m_1+m_2)\,m_0m_1}{(m_0+m_1)^2}\frac{r^2}{r'^3}P_2(\cos S)+\ldots\right]$$

и аналогичные уравнения для y, y', z, z'.

В выражении для $F_☾$ отброшен член с r', так как он не зависит от x, y, z; в выражении для $F_\odot$ отброшен член с r, так как он соответственно не зависит от x', y', z'. Если $F_☾$ и $F_\odot$ ограничить их основными членами, то уравнения сведутся к уравнениям относительного движения в задаче двух тел. Легко видеть, что в $F_\odot$ для системы Земля — Луна — Солнце отношение второго члена к первому приблизительно равно

$$\frac{m_1}{m_0+m_1}\frac{r^2}{r'^2}\sim\frac{1}{80}\times\frac{1}{400^2}\sim\frac{1}{13\,000\,000}.$$

Это свидетельствует о том, насколько близким является движение центра масс системы Земля — Луна относительно Солнца к движению по кеплерову эллипсу. Главное влияние возмущающего члена проявляется в движении перигелия этой орбиты на 7″,7 в столетие. Эта величина включена в таблицы Ньюкома для Солнца.

Обычная форма уравнений движения в прямоугольных координатах для планетного случая трех тел дается уравнениями (4а), (4б) этой главы. В этой форме для каждой планеты использовались ее гелиоцентрические координаты, и силовые функции для обеих планет были различны.

Если m_0 означает массу Солнца, m_1, m_2 — массы двух планет, то для планетного случая справедливы уравнения (21) с функцией F, определяемой формулой (22). В этих координатах силовые функции для обеих планет одинаковы с точностью до множителей, зависящих от масс. Это форма, применявшаяся Якоби; она дает возможность привести уравнения к канонической форме с единым гамильтонианом для всей системы.

В планетном случае сходимость ряда из членов, входящих в F, в большинстве случаев не улучшается существенно благодаря присутствию членов вида $r^k r'^{-k-1}$ — множителей полинома Лежандра порядка k. По этой причине разложение по полиномам Лежандра не является, как правило, пригодным для планетного случая. Вместо него применяется другая форма разложения для величины, обратной r_{12}.

Замечания. Литература

Первые общие теоремы, относящиеся к задаче n тел, были открыты и изложены Ньютоном в его «Началах»; они относятся к движению центра масс. Эйлер, по-видимому, первым развил небесную механику значительно дальше того состояния, в котором ее оставил Ньютон; десять общих интегралов были ему известны. В 1784 г. Лаплас вывел свойства неизменяемой плоскости. Примерно в 1842 г. Якоби доказал, что если бы были известны все интегралы, кроме двух, то всегда можно было бы найти и эти последние. Он также показал, что эту задачу можно свести к решению некоторого дифференциального уравнения в частных производных, порядок которого равен половине порядка исходной системы уравнений.