Глава XI

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

1. Основные принципы метода. Из рассмотрения задачи двух тел известно, что координаты и компоненты скорости для любого момента времени дают возможность определить единственную систему из шести элементов орбиты. В задаче двух тел эти элементы не меняются с временем. Следовательно, в какой бы момент времени мы ни выбрали координаты и компоненты скорости, элементы, полученные по ним, всегда будут одни и те же с числом значащих цифр, определяемым числом значащих цифр в основных данных.

Большинство задач, встречающихся при изучении движений тел в солнечной системе, обладает общим характерным свойством, которое заключается в том, что ускорение, вызываемое притяжением одного тела, гораздо больше «возмущающих» ускорений, сообщаемых ему остальными телами солнечной системы. В случае планетных орбит главным притяжением является притяжение, обусловленное Солнцем; в случае движения спутника — притяжение, производимое центральной планетой. Поэтому представляется логичным рассмотреть в качестве первого приближения к реальному движению относительную эллиптическую орбиту, описанную вокруг Солнца или центральной планеты. Когда движение происходит под влиянием различных притягивающих тел, можно использовать координаты и компоненты скорости для определения системы шести элементов орбиты. Они в точности представляют собой элементы эллипса, по которому двигалось бы тело, если бы начиная с определенного момента времени, перестали существовать ускорения, вызванные всеми «возмущающими» телами.

При реальном движении элементы орбиты, которые соответствуют этим координатам и компонентам скорости, должны неизбежно меняться с течением времени. Вместо определения «возмущенных» координат непосредственно решением дифференциальных уравнений с одинаковым успехом можно сначала получить элементы орбиты в виде функций времени. Тогда координаты можно найти по этим элементам при помощи стандартных формул эллиптического движения. В этом состоит принцип метода вариации произвольных постоянных — метода, широко известного в теории дифференциальных уравнений. В Небесной механике он применяется к системе дифференциальных уравнений шестого порядка.

Уравнения движения частицы можно привести к следующему виду:

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = X, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = Y, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = Z, \tag{1}$$

в котором вторые члены в левой части, взятые с обратным знаком, представляют собой компоненты относительного ускорения, производимого центральной массой, помещенной в начало координатной системы. Правые части являются «возмущающими» ускорениями, вызываемыми всеми остальными силами, влияющими на это движение.

В последующем решении предполагается, что возмущающие ускорения могут быть написаны в виде частных производных от возмущающей функции R. Следовательно,

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если приравнять правые части уравнений (1) нулю, то получится решение вида

$$\begin{aligned} x &= f_1(c_1, c_2, \ldots, c_6, t), & \dot{x} &= g_1(c_1, c_2, \ldots, c_6, t), \\ y &= f_2(c_1, c_2, \ldots, c_6, t), & \dot{y} &= g_2(c_1, c_2, \ldots, c_6, t), \\ z &= f_3(c_1, c_2, \ldots, c_6, t), & \dot{z} &= g_3(c_1, c_2, \ldots, c_6, t). \end{aligned} \tag{2}$$

Эти соотношения представляют собой выражения прямоугольных координат эллиптического движения через время и шесть постоянных интегрирования. Поскольку в эллиптическом движении элементы постоянны, то очевидно, что

$$g_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

В методе вариации произвольных постоянных задача состоит в том, чтобы удовлетворить уравнениям (1) формулами (2), относящимися к эллиптическому движению. Очевидно, $c_1, \ldots, c_6$ больше не могут быть постоянными; вместо этого они превращаются в функции времени. Поэтому первоочередной целью является вывод дифференциальных уравнений для этих переменных элементов.

Исходя из зависимости

$$x = f_1(c_1, c_2, \ldots, c_6, t),$$

получаем, что в возмущенном движении

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}. \tag{4}$$

Если это выражение, а также выражения для dy/dt, dz/dt продифференцировать снова и результаты подставить в уравнения (1), то получатся три уравнения, содержащие dc_j/dt, d^2c_j/dt^2. Этим трем уравнениям относительно шести переменных c_j можно удовлетворить бесконечным числом способов. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо ввести еще три дополнительных условия. Такими условиями выгодно выбрать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \\ \sum \frac{\partial f_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \\ \sum \frac{\partial f_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

так что при помощи уравнений (4) получаем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial t}=g_1, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial f_2}{\partial t}=g_2, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial f_3}{\partial t}=g_3. \tag{6}$$

Поэтому в возмущенном движении как координаты, так и компоненты скорости в момент времени t определяются формулами эллиптического движения и выражаются через время и мгновенные значения элементов для момента t, причем компоненты скорости получаются дифференцированием выражений координат для эллиптического движения, как если бы орбитальные элементы были постоянными. Эта процедура является обязательной, если координаты и компоненты скорости должны дать мгновенные элементы по формулам эллиптического движения. С другой стороны, можно было бы ввести три условия, отличные от уравнений (5), и прийти к результатам, имеющим ту же силу. Однако координаты и компоненты скорости дают мгновенные элементы при помощи формул эллиптического движения только при условиях (5). Такие мгновенные элементы называются также оскулирующими элементами.

Мы переходим теперь к дифференцированию уравнений (6). Это дает

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}+\sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}+\sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}+\sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}. \end{aligned} \tag{7}$$

Подстановка (7) в уравнения (1) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}+\frac{\mu f_1}{r^3}+\sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} &= X = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}+\frac{\mu f_2}{r^3}+\sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} &= Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}+\frac{\mu f_3}{r^3}+\sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} &= Z = \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$r^3=(f_2^2+f_1^2+f_3^2)^{3/2}.$$

Поскольку f_1, f_2, f_3 представляют собой выражения для координат через время и оскулирующие элементы для эпохи t, то они удовлетворяют формулам эллиптического движения. Следовательно, первые два члена в левых частях уравнений (8) взаимно уничтожаются. Результаты операций, выполненных до сих пор, полностью выражены тремя уравнениями (5) и тремя упрощенными уравнениями (8).

До сих пор символы f и g использовались для обозначения координат и компонент скорости, выраженных через время и оскулирующие элементы. В последующих разделах f и g будут заменены символами x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, которые также необходимо считать функциями времени и оскулирующих элементов. Тогда уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0,\\
&\frac{\partial y}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0,\\
&\frac{\partial z}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c_6}\frac{dc_6}{dt}=0,\\
&\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6}\frac{dc_6}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial x},\\
&\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{y}}{dc_6}\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial y},\\
&\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3}\frac{dc_3}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4}\frac{dc_4}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5}\frac{dc_5}{dt}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6}\frac{\partial c_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Эти шесть уравнений, каждое из которых является уравнением первого порядка, в точности эквивалентны исходным трем уравнениям, каждое из которых — второго порядка. Все предыдущее представляет собой преобразование от старых переменных x, y, z к переменным c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6.

Форма уравнений (9) не совсем удобна. Для приложений было бы более полезным, если бы производные dc_j/dt получались явно, а не в виде шести линейных уравнений с шестью неизвестными. Эта задача была решена Лагранжем характерным для него изящным способом.

2. Скобки Лагранжа. Путем умножения шести уравнений (9) последовательно на $-\partial\dot{x}/\partial c_j$, $-\partial\dot{y}/\partial c_j$, $-\partial\dot{z}/\partial c_j$, $+\partial x/\partial c_j$, $+\partial y/\partial c_j$, $+\partial z/\partial c_j$ и сложения произведений получаются шесть новых уравнений. Правые части этих новых уравнений имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_j}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c_j}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c_j}=\frac{\partial R}{\partial c_j},$$

так как в задачах, в которых существует возмущающая функция, компоненты скорости не входят в выражение для этой возмущающей функции.

Эти уравнения можно написать в сокращенном виде путем введения скобок Лагранжа, определяемых формулой

$$[c_j, c_k]=\frac{\partial x}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k}-\frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}+\frac{\partial y}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_k}-\frac{\partial y}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j}+\frac{\partial z}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_k}-\frac{\partial z}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j}.$$

Эта формула часто будет записываться таким образом:

$$
\begin{aligned}
[c_j, c_k] &= \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k}-\frac{\partial x}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}\right)=\\
&=\mathrm{S}\,\frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (c_j, c_k)},
\end{aligned}
$$

где символ S означает суммирование выражения, записанного только для координаты x, по трем координатам.

При помощи скобок Лагранжа уравнения (9) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&[c_1, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_1, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_1, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_1, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_1, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_1, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_1},\\
&[c_2, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_2, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_2, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_2, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_2, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_2, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_2},\\
&[c_3, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_3, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_3, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_3, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_3, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_3, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_3},\\
&[c_4, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_4, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_4, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_4, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_4, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_4, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_4},\\
&[c_5, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_5, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_5, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_5, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_5, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_5, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_5},\\
&[c_6, c_1]\frac{dc_1}{dt}+[c_6, c_2]\frac{dc_2}{dt}+[c_6, c_3]\frac{dc_3}{dt}+[c_6, c_4]\frac{dc_4}{dt}+\\
&\qquad+[c_6, c_5]\frac{dc_5}{dt}+[c_6, c_6]\frac{dc_6}{dt}=\frac{\partial R}{\partial c_6}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В этих уравнениях имеется тридцать шесть скобок Лагранжа. Однако из определения этих скобок ясно, что

$$[c_j, c_j]=0,\quad [c_j, c_k]=-[c_k, c_j].$$

Следовательно, определитель, составленный из скобок Лагранжа как коэффициентов уравнений (10), является антисимметричным; элементы по главной диагонали равны нулю, а элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку соответствующим элементам, расположенным симметрично выше главной диагонали. Поэтому число различных скобок Лагранжа, которые необходимо вычислить, равно пятнадцати.

Вычисление любой скобки Лагранжа зависит только от формул эллиптического движения. Прежде чем пойти дальше, выведем одно важное свойство скобок Лагранжа.

3. Независимость скобок Лагранжа от времени. Напишем соотношение

$$[p, q]=\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}\right),$$

в котором p и q — любая пара эллиптических элементов. В таком случае

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q]=\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}+\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial q\,\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial p\,\partial t}\right).$$

Правую часть можно написать в следующем виде:

$$S\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t}\right)\right],$$

что легко проверить. Теперь x и $\dot{x}$ в этом выражении означают функции эллиптического движения с $c_1, \ldots, c_6$, рассматриваемыми как постоянные. Далее, $\partial x/\partial t=\dot{x}$, $\partial\dot{x}/\partial t=\ddot{x}$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q]=S\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}-\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q}\right)-\frac{\partial}{\partial q}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}-\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right)\right]=$$

$$=S\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{x}^2)}{\partial q}-\frac{\partial F_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}\right)-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{x}^2)}{\partial p}-\frac{\partial F_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}\right)\right].$$

Здесь использованы уравнения

$$\ddot{x}=\frac{\partial F_0}{\partial x},\quad \ddot{y}=\frac{\partial F_0}{\partial y},\quad \ddot{z}=\frac{\partial F_0}{\partial z},\quad \text{где } F_0=\frac{\mu}{r}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q]=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^2}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial^2 F_0}{\partial p\,\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^2}{\partial q\,\partial p}+\frac{\partial^2 F_0}{\partial q\,\partial p}=0.$$

Предполагается, что скобки Лагранжа выражены как функции постоянных интегрирования и времени t. Однако, если частные производные от скобок Лагранжа по t равны нулю, то t не может входить в них явным образом, и потому скобки Лагранжа должны быть функциями только от постоянных интегрирования. Следовательно, скобки Лагранжа можно вычислять для любой удобным образом выбранной точки орбиты. Прежде чем идти дальше, удобно выразить скобки Лагранжа в другой форме, впервые введенной Уиттекером в 1897 г.

4. Метод Уиттекера вычисления скобок Лагранжа. В качестве эллиптических элементов мы используем кеплеровы элементы a, e, I, ε, $\tilde{\omega}$, Ω, из которых первые три имеют свой обычный смысл; ε — средняя долгота в эпоху, так что средняя долгота λ выражается суммой $nt+\varepsilon$, $\tilde{\omega}$ — долгота перигелия и Ω — долгота восходящего узла, причем $\tilde{\omega}=\omega+\Omega$. Угол ω равен угловому расстоянию от восходящего узла до перигелия и иногда называется аргументом перигелия.

Метод Уиттекера вычисления скобок Лагранжа по существу зависит от решения вопроса, каким образом изменится значение одной из скобок Лагранжа $[p, q]$ при повороте системы координат xyz вокруг оси z. Запишем с этой целью

$$[p, q]=\frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(p, q)}+\frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(p, q)}+\frac{\partial(z, \dot{z})}{\partial(p, q)}.$$

Поворот системы координат вокруг оси z на угол $+\Omega$ переносит восходящий узел на ось x'. Связь между старыми и новыми координатами имеет вид

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\Omega-y'\sin\Omega,\\ y&=x'\sin\Omega+y'\sin\Omega,\\ z&=z'. \end{aligned}\tag{11}$$

Частные производные по p можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=A_1\cos\Omega-B_1\sin\Omega,\quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial p}=C_1\cos\Omega-D_1\sin\Omega,$$

$$\frac{\partial y}{\partial p}=B_1\cos\Omega+A_1\sin\Omega,\quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial p}=D_1\cos\Omega+C_1\sin\Omega,$$

где

$$A_1=\frac{\partial x'}{\partial p}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial p},\quad B_1=\frac{\partial y'}{\partial p}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial p},$$

$$C_1=\frac{\partial \dot{x}'}{\partial p}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial p},\quad D_1=\frac{\partial \dot{y}'}{\partial p}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial p}.$$

Пусть, далее, A_2, B_2, C_2, D_2 получаются заменой p на q в этих выражениях. Тогда находим, что

$$\frac{\partial(x,\dot{x})}{\partial(p,q)}=(A_1C_2-A_2C_1)\cos^2\Omega+(B_1D_2-B_2D_1)\sin^2\Omega+$$
$$+(-A_1D_2-B_1C_2+A_2D_1+B_2C_1)\sin\Omega\cos\Omega,$$

$$\frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(p,q)}=(B_1D_2-B_2D_1)\cos^2\Omega+(A_1C_2-A_2C_1)\sin^2\Omega+$$
$$+(A_1D_2+B_1C_2-A_2D_1-B_2C_1)\sin\Omega\cos\Omega.$$

Таким образом,

$$[p,q]=A_1C_2-A_2C_1+B_1D_2-B_2D_1+\frac{\partial(z,\dot{z})}{\partial(p,q)}.$$

Теперь

$$A_1C_2-A_2C_1=\left(\frac{\partial x'}{\partial p}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial q}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial x'}{\partial q}-y'\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial p}-\dot{y}'\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)=$$
$$=\frac{\partial(x',\dot{x}')}{\partial(p,q)}+\left(-y'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial q}+\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial q}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial p}+\left(-\dot{y}'\frac{\partial x'}{\partial p}+y'\frac{\partial \dot{x}'}{\partial p}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial q}.$$

Произведения $\partial\Omega/\partial p$ и $\partial\Omega/\partial q$ обращаются в нуль. Аналогично

$$B_1D_2-B_2D_1=\left(\frac{\partial y'}{\partial p}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial q}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial y'}{\partial q}+x'\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial p}+\dot{x}'\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)=$$
$$=\frac{\partial(y',\dot{y}')}{\partial(p,q)}+\left(x'\frac{\partial \dot{y}'}{\partial q}-\dot{x}'\frac{\partial y'}{\partial q}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial p}+\left(\dot{x}'\frac{\partial y'}{\partial p}-x'\frac{\partial \dot{y}'}{\partial p}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial q}.$$

Пусть

$$[p,q]'=\frac{\partial(x',\dot{x}')}{\partial(p,q)}+\frac{\partial(y',\dot{y}')}{\partial(p,q)}+\frac{\partial(z',\dot{z}')}{\partial(p,q)}.$$

Поскольку $z = z'$, $\dot{z} = \dot{z}'$, то

$$[p, q] = [p, q]' + \left(x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial q} + \dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial q} - y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial q} - \dot{x}' \frac{\partial y'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} -$$
$$- \left(x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial p} + \dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial p} - \dot{x}' \frac{\partial y'}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q} =$$
$$= [p, q]' + \frac{\partial (\Omega, x'\dot{y}' - y'\dot{x}')}{\partial (p, q)} .$$

Выражение интеграла площадей в плоскости xy может быть записано через орбитальные элементы в виде

$$[\mu a (1 - e^2)]^{1/2} \cos I = H. \tag{12}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$[p, q] = [p, q]' + \frac{\partial (\Omega, H)}{\partial (p, q)} . \tag{13}$$

Затем совершается переход к системе координат x'', y'', z'' при помощи поворота вокруг оси x' на угол $+I$. Соотношения между старыми и новыми координатами имеют вид

$$x' = x'',$$
$$y' = y'' \cos I - z'' \sin I,$$
$$z' = y'' \sin I + z'' \cos I.$$

Отсюда следует, что

$$[p, q]' = [p, q]'' + \frac{\partial (I, y''\dot{z}'' - z''\dot{y}'')}{\partial (p, q)} .$$

Но z и $\dot{z}''$ равны нулю, так как плоскость $x''y''$ совпадает с плоскостью орбиты. Следовательно,

$$[p, q]' = [p, q]''. \tag{14}$$

Наконец, совершается поворот относительно оси z'' на угол $+\omega = \tilde{\omega} - \Omega$. Пусть новые координаты обозначены через X, Y. Плоскость XY совпадает с плоскостью орбиты, а ось X направлена в перигелий. Применение формулы (13) дает

$$[p, q]'' = [p, q]''' + \frac{\partial (\tilde{\omega} - \Omega, X\dot{Y} - Y\dot{X})}{\partial (p, q)} =$$
$$= [p, q]''' + \frac{\partial (\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial (p, q)} , \tag{15}$$

если

$$G = [\mu a (1 - e^2)]^{1/2}. \tag{16}$$

Складывая (13), (14) и (15), получаем

$$[p, q] = [p, q]''' + \frac{\partial (\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial (p, q)} + \frac{\partial (\Omega, H)}{\partial (p, q)} . \tag{17}$$

Поэтому остается вычислить

$$[p, q]''' = \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial \dot{X}}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial \dot{X}}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial p} .$$

Координаты X и Y — функции от a, e и средней аномалии l, причем

$$l = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}.$$

Поскольку скобки Лагранжа не зависят от времени, то достаточно вычислить их в точке $l = 0$, т. е. в перигелии. В этой точке разложения X и Y по степеням l имеют вид

$$X = a(1-e) - \frac{al^2}{2(1-e)^2} + \ldots, \qquad \dot{X} = -\frac{anl}{(1-e)^2} + \ldots,$$
$$Y = al\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} + \ldots, \qquad \dot{Y} = +an\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} + \ldots$$

и легко получаются из следующих разложений в ряды Тэйлора:

$$X = X_0 + \dot{X}_0(t-T) + \frac{1}{2}\ddot{X}_0(t-T)^2 + \ldots,$$
$$Y = Y_0 + \dot{Y}_0(t-T) + \frac{1}{2}\ddot{Y}_0(t-T)^2 + \ldots,$$

где T — время прохождения через перигелий. Из этих разложений находим, что в перигелии

$$\frac{\partial X}{\partial a} = 1-e, \qquad \frac{\partial X}{\partial e} = -a, \qquad \frac{\partial X}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial e} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = a\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2},$$
$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \dot{X}}{\partial e} = 0, \qquad \frac{\partial \dot{X}}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = -\frac{an}{(1-e)^2},$$
$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial a} = -\frac{1}{2}n\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}, \qquad \frac{\partial \dot{Y}}{\partial e} = +an(1+e)^{-1/2}(1-e)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})} = 0.$$

Легко проверить, что

$$[p, q]^* = \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)}\left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(a, e)}\right] +$$
$$+ \frac{\partial(e, \varepsilon+\tilde{\omega})}{\partial(p, q)}\left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e, \varepsilon-\tilde{\omega})} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e, \varepsilon-\tilde{\omega})}\right] +$$
$$+ \frac{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega}, a)}{\partial(p, q)}\left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega}, a)}\right].$$

Подстановка значений производных в перигелии дает

$$\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(a, e)} = 0,$$
$$\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e, \varepsilon-\tilde{\omega})} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e, \varepsilon-\tilde{\omega})} = 0,$$
$$\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega}, a)} = \frac{an}{2} = \frac{1}{2}\mu^{1/2}a^{-1/2}.$$

Поэтому

$$[p, q]''' = \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \cdot \frac{1}{2}\mu^{1/2}a^{-1/2} = \\ = \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, L)}{\partial(p, q)}, \tag{18}$$

если

$$L = (\mu a)^{1/2}. \tag{19}$$

Комбинация (17) и (18) дает окончательно

$$[p, q] = \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, L)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)}. \tag{20}$$

5. Производные от кеплеровых элементов. Из последнего выражения легко получается требуемая система скобок Лагранжа. Поскольку

$$L = (\mu a)^{1/2}, \qquad G = L(1-e^2)^{1/2}, \qquad H = G\cos I,$$

то, обозначая частные производные нижними индексами и полагая na^2 вместо $(\mu a)^{1/2}$ и na вместо $\mu^{1/2}a^{-1/2}$, находим, что

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{1}{a}na, & G_a &= \frac{1}{2}na(1-e^2)^{1/2}, & H_a &= \frac{1}{2}na(1-e^2)^{1/2}\cos I, \\ L_e &= 0, & G_e &= -na^2e(1-e^2)^{-1/2}, & H_e &= -na^2e(1-e^2)^{-1/2}\cos I, \\ L_I &= 0, & G_I &= 0, & H_I &= -na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I. \end{aligned}$$

Это дает

$$\begin{aligned} [\varepsilon, a] &= -[a, \varepsilon] = +\frac{1}{2}na, \\ [\tilde{\omega}, a] &= -[a, \tilde{\omega}] = -\frac{1}{2}na[1-(1-e^2)^{1/2}], \\ [\Omega, a] &= -[a, \Omega] = -\frac{1}{2}na(1-e^2)^{1/2}(1-\cos I), \\ [\tilde{\omega}, e] &= -[e, \tilde{\omega}] = -na^2e(1-e^2)^{-1/2}, \\ [\Omega, e] &= -[e, \Omega] = +na^2e(1-e^2)^{-1/2}(1-\cos I), \\ [\Omega, I] &= -[I, \Omega] = -na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I. \end{aligned}$$

Все остальные скобки равны нулю.

Подстановка этих выражений в уравнения (10) дает следующие две системы уравнений:

$$\begin{aligned} &[\varepsilon, a]\frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ &[\tilde{\omega}, a]\frac{da}{dt} + [\tilde{\omega}, e]\frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}, \\ &[\Omega, a]\frac{da}{dt} + [\Omega, e]\frac{de}{dt} + [\Omega, I]\frac{dI}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}; \\ &[a, \varepsilon]\frac{d\varepsilon}{dt} + [a, \tilde{\omega}]\frac{d\tilde{\omega}}{dt} + [a, \Omega]\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a}, \\ &[e, \tilde{\omega}]\frac{d\tilde{\omega}}{dt} + [e, \Omega]\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial e}, \\ &[I, \Omega]\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial I}. \end{aligned}$$

Выражения для da/dt, de/dt и т. д., которые получаются из этих уравнений, имеют вид

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$
$$\frac{de}{dt}=-\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}[1-(1-e^2)^{1/2}]\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}-\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}},$$
$$\frac{dI}{dt}=-\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right)-\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial \Omega},$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{(1-e^2)^{1/2}[1-(1-e^2)^{1/2}]}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I}, \tag{21}$$
$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I},$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial I}.$$

6. Модификация уравнений для устранения t вне тригонометрических аргументов. Уравнения (21) обладают в этом виде одним серьезным недостатком. Возмущающую функцию необходимо разложить в ряд с периодическими членами. Элементы a, e, I входят в коэффициенты, элементы ε, $\tilde{\omega}$, Ω — в аргументы. Однако ε всегда входит в линейной комбинации с nt в виде суммы $nt+\varepsilon$, а n является функцией от a в силу соотношения $n^2a^3=\mu$. Следовательно, элемент a присутствует явным образом в коэффициентах разложения и через посредство n — в аргументах.

Производная $\partial R/\partial a$ встречается только в $d\varepsilon/dt$. Этот член можно написать в следующем виде:

$$-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}t\frac{dn}{da},$$

в котором скобки означают ту часть $\partial R/\partial a$, которая возникает из-за присутствия в явном виде a в коэффициентах периодических членов.

Легко видеть, что вследствие присутствия n в аргументах время входит множителем в коэффициенты периодических членов. Последнее выражение можно написать в более простом виде:

$$-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)-t\frac{dn}{da}\frac{da}{dt}=$$
$$=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)-t\frac{\partial n}{\partial t}.$$

Если это выражение подставить в уравнение для $d\varepsilon/dt$, то получится

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)-t\frac{dn}{dt}+\frac{(1-e^2)^{1/2}[1-(1-e^2)^{1/2}]}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+$$
$$+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I}.$$

Присутствия t вне тригонометрических аргументов можно избежать, определяя ε^I так, чтобы

$$\frac{d\varepsilon^I}{dt}=\frac{d\varepsilon}{dt}+t\,\frac{dn}{dt}. \tag{22}$$

Смысл этой замены виден при дифференцировании средней долготы

$$\lambda=nt+\varepsilon,$$
$$\frac{d\lambda}{dt}=n+t\,\frac{dn}{dt}+\frac{d\varepsilon}{dt}=$$
$$=n+\frac{d\varepsilon^I}{dt}$$

с учетом определения ε^I. Интегрирование выражения в последней строке дает

$$\lambda=\int n\,dt+\varepsilon^I.$$

Это выражение часто записывается в виде

$$\lambda=\varrho+\varepsilon^I,$$

так что

$$\frac{d\varrho}{dt}=n,\quad \frac{d^2\varrho}{dt^2}=\frac{dn}{dt}=-\frac{3}{2}\,\frac{n}{a}\,\frac{da}{dt},$$

или

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=-\frac{3}{a^2}\,\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}.$$

Самый простой путь получения требуемого вида уравнений — это рассматривать R как функцию от a, e, I, λ, $\tilde{\omega}$, Ω. Тогда a присутствует только в коэффициентах, и скобки с $\partial R/\partial a$ не нужны. Уравнения (21) можно оставить в том виде, как они есть, при условии, что ε подразумевается имеющим смысл ε^I, т. е. что соотношение между λ и ε имеет вид

$$\lambda=\int n\,dt+\varepsilon.$$

Частную производную $\partial R/\partial\varepsilon$ можно заменить на $\partial R/\partial\lambda$ или подразумевать под ней указанную частную производную, и тогда необходимо добавить следующие уравнения:

$$\lambda=\varrho+\varepsilon,$$
$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=-\frac{3}{a^2}\,\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}=-\frac{3}{a^2}\,\frac{\partial R}{\partial\lambda}. \tag{23}$$

Исключение времени из коэффициентов тригонометрических членов достигается за счет введения двойного интегрирования, необходимого для получения средней долготы. За этим исключением все уравнения для вариаций элементов являются уравнениями первого порядка.

С первого взгляда может показаться, что были введены лишние постоянные интегрирования. То, что это не так, вытекает из следующего. Во-первых, поскольку ϱ и ε встречаются вместе в виде $\varrho+\varepsilon$, то аддитивные постоянные в ϱ и ε объединяются в одну постоянную. Затем

$$\frac{d\varrho}{dt}=n,$$

что представляет собой оскулирующее среднее движение, связанное с a посредством соотношения $n^2a^3=\mu$. Поэтому вторая постоянная интегрирования при интегрировании уравнения (23) не находится в полном нашем распоряжении, а должна согласоваться с постоянной, вводимой при интегрировании уравнения для da/dt.

7. Альтернативные виды уравнений (21) в случаях малого эксцентриситета или малой наклонности. Уравнения (21) обладают некоторыми характерными особенностями, которые делают их неудобными для приложения к орбитам с малыми эксцентриситетами или малыми наклонностями: в знаменатель первой части выражения для $d\tilde{\omega}/dt$ входит эксцентриситет, а $\sin I$ появляется в знаменателе выражения для $d\Omega/dt$. Если эксцентриситет или наклонность не могут стать исчезающе малыми, это неудобство фактически оказывается больше кажущимся, чем реальным. При вычислении положения в пространстве долгота перигелия присутствует только в членах, умноженных на эксцентриситет; аналогично долгота узла входит только в члены, умноженные на $\sin I$. Следовательно, достаточно получить $e\,d\tilde{\omega}/dt$ и $\sin I\,d\Omega/dt$ с той же степенью точности, что и $d\varepsilon/dt$.

Появление e и $\sin I$ в знаменателе в членах выражений для de/dt и dI/dt имеет даже еще меньшее значение. Член в возмущающей функции, содержащий $\tilde{\omega}$ в своем аргументе, всегда имеет в своем коэффициенте множителем по меньшей мере первую степень e, а член, содержащий в своем аргументе Ω, содержит в своем коэффициенте множителем по крайней мере квадрат $\sin I$.

Уравнения (21) были фактически применены с замечательным успехом Леверрье в теориях движения больших планет. В силу указанных причин малость некоторых эксцентриситетов и наклонностей не внесла серьезных осложнений.

Тем не менее для некоторых задач требуется использовать видоизмененную форму этих уравнений. Положим

$$e\sin\tilde{\omega}=\mathrm{h},\qquad e\cos\tilde{\omega}=\mathrm{k};$$

тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{h}}{dt}&=\frac{de}{dt}\sin\tilde{\omega}+e\cos\tilde{\omega}\frac{d\tilde{\omega}}{dt},\\
\frac{d\mathrm{k}}{dt}&=\frac{de}{dt}\cos\tilde{\omega}-e\sin\tilde{\omega}\frac{d\tilde{\omega}}{dt},\\
\frac{\partial R}{\partial\mathrm{h}}&=\frac{\partial R}{\partial e}\sin\tilde{\omega}+\frac{1}{e}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\cos\tilde{\omega},\\
\frac{\partial R}{\partial\mathrm{k}}&=\frac{\partial R}{\partial e}\cos\tilde{\omega}-\frac{1}{e}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}.
\end{aligned}$$

Преобразование уравнений для de/dt и $d\Omega/dt$ дает

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{h}}{dt}&=+\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\mathrm{k}}-\frac{\mathrm{h}(1-e^2)^{1/2}}{na^2[1+(1-e^2)^{1/2}]}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}+\frac{\mathrm{k}\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I},\\
\frac{d\mathrm{k}}{dt}&=-\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\mathrm{h}}-\frac{\mathrm{k}(1-e^2)^{1/2}}{na^2[1+(1-e^2)^{1/2}]}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}-\frac{\mathrm{h}\operatorname{tg}\frac{1}{2}I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I},
\end{aligned}\tag{24}$$

где ради краткости было использовано выражение $1-e^2$ вместо $1-\mathrm{h}^2-\mathrm{k}^2$.

Эти уравнения, конечно, в равной степени справедливы для орбиты с большим эксцентриситетом и для орбиты с малым эксцентриситетом, но в последнем случае уравнения в этой форме обладают исключительными достоинствами.

Аналогичным образом положим

$$p = \operatorname{tg} I \sin\Omega, \quad q = \operatorname{tg} I \cos\Omega.$$

В таком случае

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\sin\Omega}{\cos^2 I}\frac{dI}{dt} + \operatorname{tg} I \cos\Omega \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\cos\Omega}{\cos^2 I}\frac{dI}{dt} - \operatorname{tg} I \sin\Omega \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\frac{\partial R}{\partial p}\operatorname{tg} I = \frac{\partial R}{\partial\Omega}\cos\Omega + \frac{\partial R}{\partial I}\sin I\cos I\sin\Omega,$$

$$\frac{\partial R}{\partial q}\operatorname{tg} I = -\frac{\partial R}{\partial\Omega}\sin\Omega + \frac{\partial R}{\partial I}\sin I\cos I\cos\Omega,$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= +\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\cos^3 I}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2(1-e^2)^{1/2}\cos I\cos^2\frac{1}{2}I}\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right),\\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\cos^3 I}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2(1-e^2)^{1/2}\cos I\cos^2\frac{1}{2}I}\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Функции $\cos I$ и $\cos\frac{1}{2}I$ сохранены в знаменателях для сокращения записи. Они могут быть разложены по степеням p^2+q^2:

$$\frac{1}{\cos I} = (1+p^2+q^2)^{1/2},$$

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}I} = \frac{1}{1+(1+p^2+q^2)^{-1/2}}$$

при условии, что I достаточно мало. Это имеет место именно в тех случаях, когда уравнения в такой форме особенно полезны.

8. Система a, e, I, σ, ω, Ω. Общее выражение (20) для $[p, q]$ становится еще проще, если ввести σ вместо $\varepsilon - \tilde{\omega}$ и ω вместо $\tilde{\omega} - \Omega$. Угол ω есть аргумент перигелия, или угловое расстояние от восходящего узла до перигелия. Угол σ является лишь постоянной, связанной со средней аномалией, так что

$$l = nt + \sigma.$$

Вывод уравнений для этих переменных несколько проще, чем для системы с ε, $\tilde{\omega}$, Ω. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\sigma},\\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\sigma} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\omega},\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial\omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial\Omega},\\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\operatorname{ctg} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial I},$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I}\frac{\partial R}{\partial I}.$$

Коэффициенты в этих выражениях в некоторой степени проще, чем коэффициенты в системе (21). Однако необходимо заметить, что для малых наклонностей коэффициенты как при $\partial R/\partial\omega$, так и при $\partial R/\partial\Omega$ в выражении для dI/dt велики и в выражении для $d\omega/dt$ эксцентриситет появляется в знаменателе первого члена, а $\operatorname{ctg} I$ входит множителем во второй член. Этого и следовало ожидать, так как ω является неопределенным как для нулевого эксцентриситета, так и для нулевой наклонности.

Время будет входить в коэффициенты периодических членов по той же причине, что и в системе (21), пока не будет введена модификация, аналогичная изложенной в разд. 6 этой главы. Эта модификация требует определения средней аномалии посредством соотношения

$$l=\int n\,dt+\sigma.$$

Полагая

$$=\int n\,dt,$$

имеем

$$l=\varrho+\sigma,$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial\sigma}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial l}.$$

Легко видеть, что ϱ имеет в точности тот же смысл, что и в разд. 6, и производная $\partial R/\partial l$ в этих элементах та же, что $\partial R/\partial\lambda$ в предыдущей системе элементов.

9. Каноническая система элементов. Крайне простая система уравнений для вариации элементов получается в том случае, если мы выберем в качестве переменных c_j функции от кеплеровых элементов, которые встречаются в выражении (20) для $[p, q]$. Этими переменными являются σ, ω, Ω, L, G, H. Скобки Лагранжа для этих элементов имеют следующие значения:

$$[\sigma, L]=+1,\quad [\omega, G]=+1,\quad [\Omega, H]=+1,$$
$$[L, \sigma]=-1,\quad [G, \omega]=-1,\quad [H, \Omega]=-1.$$

Все остальные скобки равны нулю.

Вследствие этого уравнения (10) приводятся к следующей чрезвычайно простой форме:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial\sigma}, & \frac{d\sigma}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial L},\\ \frac{dG}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial\omega}, & \frac{d\omega}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial G},\\ \frac{dH}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial\Omega}, & \frac{d\Omega}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial H}.\end{aligned}\tag{27}$$

Эта система называется канонической системой уравнений. Уравнения (27) обладают, конечно, тем же недостатком, что и рассмотренные выше неканонические системы, они содержат время вне тригонометрических аргументов. Это неудобство можно устранить, полагая

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right) - \frac{\partial R}{\partial \sigma} t \frac{dn}{dL} =$$
$$= -\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right) - t \frac{dn}{dt}.$$

Это сводится опять к введению σ^I посредством формулы

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt}$$

или определению l формулой вида

$$l = \int n\,dt + \sigma.$$

Наиболее удобный путь введения этой величины в уравнения — рассмотреть функцию R, выраженную через L, G, H, l, ω, Ω и записать уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H}, \end{aligned} \tag{28}$$

где ω заменено на g и Ω на h. Поскольку

$$n = \mu^2 L^{-3} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\mu^2}{2L^2}\right),$$

то другой формой канонических уравнений является следующая

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R. \tag{30}$$

Это — канонические уравнения в переменных Делонэ, которые использовались им в его теории Луны. Канонические уравнения рассматриваются дальше в гл. XVII.

10. Возмущение первого порядка. Вековые и периодические члены. Уравнения, полученные в этой главе, являются точными эквивалентами исходных уравнений движения. Они представляют собой различные формы уравнений, получающиеся при преобразовании от координат и компонент скорости к новым переменным, определяемым уравнениями преобразования (2).

Поскольку возмущающая масса (или массы), присутствующая как множитель (или присутствующие в виде множителей) в выражениях для производных от элементов, является малой величиной в задачах небесной механики для солнечной системы, то эти уравнения прекрасно подходят для методики интегрирования последовательными приближениями.

Для того чтобы сделать рассуждения более определенными, предположим, что задача связана с движением малой планеты под воздействием гравитационного притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера мы считаем неподвижным эллипсом с эксцентриситетом e' и долготой перигелия $\tilde{\omega}'$. Неподвижная плоскость орбиты Юпитера принимается за плоскость отсчета. Далее предполагается, что используются угловые переменные λ, $\tilde{\omega}$, Ω и что возмущающая функция R разложена в ряд по косинусоидальным членам вида

$$R = \sum C_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} \cos (j_1\lambda + j_2\tilde{\omega} + j_3\Omega + j_4\lambda' + j_5\tilde{\omega}'),$$

в котором коэффициенты C являются функциями от a, e, I, a', e' и имеют m' общим множителем. В дальнейшем нижние индексы у C будут опущены.

Поскольку функция R не изменяется при повороте системы координат вокруг оси z и так как углы, входящие в аргументы косинусов, отсчитываются от общего начала, то отсюда следует, что

$$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 = 0.$$

Возмущения первого порядка получаются при помощи подстановки в правые части уравнений (21) и (23) постоянных значений a_0, e_0, I_0, $\tilde{\omega}_0$, Ω_0 вместо переменных a, e, I, $\tilde{\omega}$, Ω, а λ и λ' принимают вид

$$\lambda_0 = n_0 t + \varepsilon_0, \quad \lambda' = n' t + \varepsilon',$$

при

$$n_0^2 a_0^3 = \mu.$$

Поэтому среднее движение любого аргумента равно

$$j_1 n_0 + j_4 n'.$$

После этих подстановок правые части уравнений (21) становятся известными функциями времени, и эти уравнения могут быть проинтегрированы в квадратурах. Легко видеть, что da/dt, de/dt, dI/dt получаются в виде рядов по синусам, а $d\varepsilon/dt$, $d\tilde{\omega}/dt$, $d\Omega/dt$ — в виде рядов по косинусам с теми же аргументами, которые входили в R. Интегрирование даст в a, e, I косинусоидальные члены и синусоидальные члены в ε, $\tilde{\omega}$, Ω. Уравнение (23) показывает, что интегрирование ϱ даст ряд по синусам.

Рассмотрим те члены в R, для которых $j_1 = 0$, $j_4 = 0$. Эти члены имеют нулевые средние движения аргументов, так как вместо $\tilde{\omega}$, Ω подставлены постоянные $\tilde{\omega}_0$, Ω_0. Следовательно, члены с $j_1 = j_4 = 0$ необходимо рассматривать как постоянные, и интегрирование даст члены, пропорциональные времени t. Такого рода члены называются вековыми возмущениями, а члены в R с $j_1 = j_4 = 0$ составляют вековую часть возмущающей функции.

Уравнение для da/dt показывает, что возмущения первого порядка в a не содержат никаких вековых членов, так как $\partial R/\partial\varepsilon$ содержит только члены, имеющие в аргументе λ. Однако остальные пять элементов будут иметь вековые возмущения.

Вековые возмущения в e получаются из уравнения

$$\frac{de}{dt} = +\frac{(1-e_0^2)^{1/2}}{n_0 a_0^2 e_0} \sum C j_2 \sin(j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_5\tilde{\omega}').$$

Если выражение в правой части этого уравнения обозначить через e_1, то результат интегрирования при ограничении вековыми членами имеет вид

$$e = e_0 + e_1 t.$$

Для элемента ε получается

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum \left(-\frac{2}{n_0 a_0}\frac{\partial C}{\partial a} + \frac{(1-e_0^2)^{1/2}[1-(1-e_0^2)^{1/2}]}{n_0 a_0^2 e_0}\frac{\partial C}{\partial e} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}I_0}{n_0 a_0^2 (1-e_0^2)^{1/2}}\frac{\partial C}{\partial I}\right) \cos(j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_5\tilde{\omega}') =$$

$$= \sum Q \cos(j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_5\tilde{\omega}'); \qquad (31)$$

правую часть мы обозначим через ε_1.

Тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t.$$

Но

$$\lambda = n_0 t + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t = $$

$$= (n_0 + \varepsilon_1)\, t + \varepsilon_0.$$

Теперь мы возвращаемся к периодическим возмущениям первого порядка. Эти возмущения в элементе a получаются из уравнения

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n_0 a_0} \sum C j_1 \sin[j_1(n_0 t + \varepsilon_0) + j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_4(n't + \varepsilon') + j_5\tilde{\omega}'].$$

После интегрирования это выражение дает

$$\delta_1 a = +\frac{2}{n_0 a_0} \sum C \frac{j_1}{j_1 n_0 + j_4 n'} \cos[j_1(n_0 t + \varepsilon_0) + j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_4(n't + \varepsilon') + j_5\tilde{\omega}'],$$

$$a = a_0 + \delta_1 a.$$

Выражения того же вида получаются и в остальных элементах, причем все они имеют $j_1 n_0 + j_4 n'$ в качестве делителей.

Уравнение для ϱ дает

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = +\frac{3}{a_0^2} \sum C j_1 \sin[j_1(n_0 t + \varepsilon_0) + j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_4(n't + \varepsilon') + j_5\tilde{\omega}'],$$

откуда при помощи двойного интегрирования получается

$$\delta_1\varrho = -\frac{3}{a_0^2} \sum C \frac{j_1}{(j_1 n_0 + j_4 n')^2} \sin[j_1(n_0 t + \varepsilon_0) + j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_4(n't + \varepsilon') + j_5\tilde{\omega}'].$$

Если использовать обозначение Q в смысле (31), то периодические члены в ε дают

$$\delta_1\varepsilon = \sum \frac{Q}{j_1 n_0 + j_4 n'} \sin[j_1(n_0 t + \varepsilon_0) + j_2\tilde{\omega}_0 + j_3\Omega_0 + j_4(n't + \varepsilon') + j_5\tilde{\omega}'].$$

Сводка полученных результатов для всех шести элементов имеет вид:

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 + \delta_1 a, & \lambda &= (n_0 + \varepsilon_1)\, t + \varepsilon_0 + \delta_1 \rho + \delta_1 \varepsilon,\\
e &= e_0 + e_1 t + \delta_1 e, & \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 t + \delta_1 \tilde{\omega},\\
I &= I_0 + I_1 t + \delta_1 I, & \Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 t + \delta_1 \Omega,
\end{aligned}
$$

где обозначение δ_1 использовано для периодических членов; элементы a, e, I выразятся рядами по косинусам, ε, $\tilde{\omega}$ и Ω — рядами по синусам.

Оскулирующее среднее движение следовало бы по-прежнему определять формулой

$$
n_0 + \delta_1 n = \mu^{1/2} (a_0 + \delta_1 a)^{-3/2} = \mu^{1/2} a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a}{a_0}\right).
$$

Однако из выражения для λ видно, что коэффициент при t в λ равен $n_0 + \varepsilon_1$. Этот множитель получится из эмпирического анализа наблюдений без какого бы то ни было допущения относительно возмущений при условии, что наблюдения охватывают многие обращения соответствующих планет. Его можно считать наблюденным «средним» средним движением. Очевидно, что если допустимо рассматривать только возмущения первого порядка, то это наблюденное «среднее» среднее движение может быть точно определено. Однако если a_0 и n_0 могут быть приняты такими, чтобы выполнялось соотношение $a_0^3 n_0^2 = \mu$, а соотношение $a^3 n^2 = \mu$ необходимо имеет место для оскулирующей большой полуоси и оскулирующего среднего движения, не существует простого соотношения такого же рода, которое связывало бы наблюденное «среднее» среднее движение и постоянную часть большой полуоси.

11. Возмущение второго порядка. Результаты, полученные интегрированием производных от элементов при подстановке в правые части уравнений (21) и (23) постоянных значений этих элементов, неизбежно являются приближенными. В большинстве случаев этого приближения недостаточно, чтобы получить значения элементов, которые дали бы возможность вычислить координаты с точностью, соответствующей точности наблюдений. Однако в принципе представляется чрезвычайно простым продолжить указанный процесс как угодно далеко и рассмотреть возмущения второго порядка, третьего и т. д.

Обозначим возмущения первого порядка, включая как вековые, так и периодические члены, символом Δ_1. Следовательно, для первого порядка получим

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + \delta_1 a = a_0 + \Delta_1 a,\\
e &= e_0 + e_1 t + \delta_1 e = e_0 + \Delta_1 e,\\
\lambda &= n_0 t + \varepsilon_0 + \Delta_1 \lambda.
\end{aligned}
$$

Возмущающая функция, если в разложении в ряд Тэйлора ограничиться членами первого порядка, принимает вид

$$
R = R(a_0, e_0, I_0, n_0 t + \varepsilon_0, \tilde{\omega}_0, \Omega_0) + \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)_0 \Delta_1 a + \left(\frac{\partial R}{\partial e}\right)_0 \Delta_1 e + \dots .
$$

Частные производные второго порядка появляются при вычислении частных производных по элементам от этого выражения. После того как частные производные (их будет 21) получены, можно вычислить дополнительные члены к правым частям уравнений (21) и (23), выполняя необходимые перемножения с результатами первого порядка. Очевидно, что множители, входящие в правые части, должны быть также разложены в ряды.

Чтобы сделать обсуждаемый вопрос более определенным, рассмотрим самое простое уравнение — уравнение для da/dt. Множитель $2/na$ можно написать в виде $2\mu^{-1/2}a^{1/2}$. Поэтому

$$2\mu^{-1/2}a^{1/2}=2\mu^{-1/2}a_0^{1/2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta_1 a}{a_0}\right)=$$
$$=\frac{2}{n_0a_0}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta_1 a}{a_0}\right)$$

и

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{n_0a_0}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta_1 a}{a_0}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)_0+\frac{2}{n_0a_0}\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial a}\right)_0\Delta_1 a+\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial e}\right)_0\Delta_1 e+\ldots\right].$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\Delta_2 a=\left[\frac{1}{n_0a_0^2}\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)_0+\frac{2}{n_0a_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial a}\right)_0\right]\Delta_1 a+$$
$$+\frac{2}{n_0a_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial e}\right)_0\Delta_1 e+\frac{2}{n_0a_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\varepsilon\,\partial I}\right)_0\Delta_1 I+$$
$$+\ldots\Delta_1\lambda+\ldots\Delta_1\tilde{\omega}+\ldots\Delta_1\Omega.$$

Аналогичные результаты можно было бы получить и для производных от остальных элементов.

Все правые части получающихся выражений имеют множителем вторую степень возмущающей массы. Из вида разложения для функции R и возмущений первого порядка ясно, что правые части новых уравнений будут иметь вид A_0+A_1t+ ряды периодических членов; некоторые из этих членов содержат t множителем при коэффициентах, а A_0 и A_1 получаются из вековой части возмущающей функции. Интегрирование даст члены второго порядка вида $A_0t+\frac{1}{2}A_1t^2+$ ряды периодических членов, часть которых умножается на t. Появление t в коэффициентах периодических членов составляет новую характерную особенность в возмущениях второго порядка. Такие члены называются смешанными вековыми членами.

Выражение для $d(\Delta_2 a)/dt$ можно использовать для того, чтобы показать, что возмущения второго порядка большой полуоси не содержат чисто векового члена. Это знаменитая теорема Пуассона. Доказательство этой теоремы было дано Тиссераном[1]).

12. Малые делители. При рассмотрении периодических членов было отмечено, что при их интегрировании появляются делители вида $j_1n_0+j_4n'$, а в возмущениях первого порядка в средней долготе — квадраты этих делителей. Периодические члены в возмущающей функции можно расположить таким образом, чтобы j_1 было всегда положительным, тогда как j_4 может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

[1]) F. Tisserand, Mécanique céleste, t. 1, chap. XXV, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

Особый интерес представляют члены с такими значениями j_1 и j_4, при которых делители $j_1 n_0 + j_4 n'$ являются малыми по сравнению с n_0 или n'. Следует помнить, что n_0 и n' представляют собой величины, полученные из наблюдений; следовательно, их точность ограничена точностью наблюдений, на которых основано определение их числовых значений. Несмотря на это разложение отношения n'/n_0 (или n_0/n') в непрерывную дробь даст приближения вида p/q, где p и q целые числа, которые могут быть сколь угодно близкими к значению n'/n_0. Поэтому если разложение возмущающей функции выполнено до достаточно высоких кратностей величин в аргументах периодических членов, то найдутся такие целые числа j_1 и j_4, при которых делитель $j_1 n_0 + j_4 n'$ будет меньше любой наперед заданной величины.

В возмущениях первого порядка квадраты таких малых делителей появляются только в средней долготе. В остальных элементах встречаются только первые степени этих делителей. В возмущениях второго порядка в средней долготе будут присутствовать третьи и четвертые степени малых делителей, в остальных элементах — их вторые и третьи степени.

С теоретической точки зрения присутствие малых делителей, для которых нельзя указать никакого нижнего предела, является серьезным затруднением, так как ставит под угрозу сходимость процесса вычисления возмущений.

Полезно указать на задачу, основанную на возмущениях первого порядка, которые получаются из уравнения (21). Беря в качестве примера элемент e и полагая j вместо j_1 и k вместо j_4, запишем соответствующее уравнение в виде

$$\frac{de}{dt} = \sum A_{j,k} \sin [(jn_0 + kn')\,t + \beta_{j,k}], \tag{A}$$

где $\beta_{j,k}$ — постоянные, если долготы перигелия и узла считаются постоянными.

Если n'/n_0 не является рациональным числом, то в результате интегрирования получим

$$\delta e = Bt - \sum{}' \frac{A_{j,k}}{jn_0 + kn'} \cos [(jn_0 + kn')\,t + \beta_{j,k}], \quad (j,\ k \neq 0,\ 0), \tag{Б}$$

но если $n'/n_0 = p/q$ (где p и q — два положительных целых числа), то члены с аргументом $(pn_0 - qn')\,t + \beta_{p,-q}$ и кратными этого аргумента станут постоянными. После интегрирования они войдут в вековой член, и тогда

$$\delta e = Ct - \sum{}'' \frac{A_{j,k}}{jn_0 + kn'} \cos [(jn_0 + kn')\,t + \beta_{j,k}],$$
$$(j,\ k \neq 0,\ 0), \quad (j/k \neq -p/q). \tag{В}$$

Брунс нашел, что когда ряд (А) сходится, то ряд (Б) не всегда сходится: в конечных, хотя и малых пределах, имеется бесконечное число иррациональных значений n'/n_0, для которых ряд (Б) сходится, и в том же интервале имеется бесконечное число иррациональных значений n'/n_0, для которых ряд (Б) расходится. Однако ряд (В) сходится, так как $jn_0 + kn'$ имеет нижний предел, отличный от нуля, если n'/n_0 является рациональным числом.

Второе важное свойство состоит в том, что δe, полученное при помощи рядов (Б) и (В), не является непрерывным по n'/n_0. Это очевидно из того, что вековой член в δe принимает различную форму в (Б) и (В), хотя иррациональное число можно апроксимировать рациональным числом с неограниченной степенью точности. Кроме того, для двух различных рациональных дробей, которые могут быть выбраны сколь угодно близко друг к другу, будут существовать различные коэффициенты C векового члена, так как эти дроби связаны с различными членами в ряде (А). Отсюда мы заключаем, что если применяются кеплеровы переменные, то ряды, представляющие возмущения, не сходятся равномерно.

Можно заметить, что не обязательно рассматривать элементы $\tilde{\omega}$ и Ω в аргументах как постоянные. Их можно заменить на

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 t, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 t,$$

и делители примут следующий вид:

$$j_1 n_0 + j_2 \tilde{\omega}_1 + j_3 \Omega_1 + j_4 n'.$$

Характер ряда, получаемого после интегрирования, больше не определяется отношением n'/n_0, однако замечания, касающиеся расходимости и сходимости, остаются в силе без существенных изменений.

Эти пояснения, а также дальнейшие замечания относительно указанной задачи и аналогичных задач, сделанные в гл. XVII, имеют целью подчеркнуть, что проблема малых делителей представляет собой основную проблему первостепенной значимости среди всех задач небесной механики. Математический характер этой проблемы до сих пор полностью не выяснен.

С практической точки зрения малые делители в большинстве случаев не представляют серьезных затруднений. В качестве примера мы можем рассмотреть случай системы Юпитер — Сатурн, для которой $n'/n = 0{,}40268677$. Представляя это отношение в виде непрерывной дроби, находим следующие подходящие дроби и связанные с ними периоды:

$1/2 = 0{,}5000\,0000$	61	год
$2/5 = 0{,}4000\,0000$	880	лет
$29/72 = 0{,}4027\,7778$	1810	»
$60/149 = 0{,}4026\,8456$	36000	»

В теориях Юпитера и Сатурна члены с аргументами, содержащими линейную комбинацию $2\lambda - 5\lambda'$, а также ее кратности $4\lambda - 10\lambda'$ и т. д., связаны с малыми делителями, которые представляют существенную трудность при разработке точных теорий для этих планет.

Разложение возмущающей функции показывает, что член с линейной комбинацией $2\lambda - 5\lambda'$ в аргументе имеет по крайней мере третий порядок относительно эксцентриситетов и наклонностей. Численное значение коэффициентов при членах такого рода в возмущающей функции создает впечатление их незначительности, однако квадрат малого делителя превращает их в существенные члены в возмущениях средней долготы. Это связано с хорошо известным долгопериодическим неравенством в движениях этих планет. Период его равен приблизительно 900 годам; для Юпитера коэффициент в средней долготе около 20′, для Сатурна — около 48′.

Благодаря тому что отношение средних движений весьма близко к отношению двух малых чисел, следующая подходящая дробь оказывается отношением двух больших чисел, как, например, 29/72. Члены, порождающие малые делители, связанные с линейной комбинацией $29\lambda - 72\lambda'$, имеют коэффициенты по крайней мере 43-го порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей. Кроме того, легко видеть, что период, связанный с таким аргументом, примерно только в два раза больше периода главного долгопериодического неравенства. Такие члены совершенно незначительны: коэффициенты уменьшены сороковыми степенями эксцентриситетов и наклонностей по сравнению с членами с аргументом, содержащим комбинацию $2\lambda - 5\lambda'$, тогда как делитель равен лишь половине делителя членов с комбинацией $2\lambda - 5\lambda'$. Следующая подходящая дробь 60/149 относится к членам по крайней мере 89-й степени относительно эксцентриситетов и наклонностей, причем период настолько велик, и поэтому делитель настолько мал, что относительное значение членов с комбинацией $60\lambda - 149\lambda'$ в средних долготах, возможно, могло бы явиться причиной некоторого беспокойства. Однако этот период, равный около 36 000 лет, настолько велик в сравнении с приемлемым периодом пригодности планетной теории, что члены эти не играют практически никакой роли. Этими членами можно пренебречь, а их влияние включить в постоянные интегрирования.

Основной вывод из нашего рассмотрения проблемы малых делителей можно сформулировать следующим образом: если главный малый делитель порядка квадратного корня из возмущающей массы или больше, то построение точной планетной теории при помощи метода вариации произвольных постоянных является, вообще говоря, выполнимым. Из-за присутствия вековых и смешанных вековых членов срок пригодности такой теории неизбежно ограничен. Можно увеличить этот срок путем включения возмущений второго и высших порядков, однако ни одна теория рассмотренного типа не может сохранять пригодность в течение бесконечного промежутка времени.

Это условие, по-видимому, удовлетворяется для всех больших планет, за исключением, быть может, Плутона, орбита которого до сих пор известна с небольшой точностью. Среди малых планет имеется много примеров отношений n'/n среднего движения малой планеты к среднему движению Юпитера, которые настолько близки к точной соизмеримости, что метод последовательных приближений, указанный в этой главе, не принес бы успеха. В этих случаях необходимо использовать другие методы. Изложение метода, пригодного для задач такого рода, содержится в гл. XVII.

13. Гауссова форма уравнений. Производные от элементов орбиты, которые были выведены, выражаются через частные производные от возмущающей функции по элементам. В этом виде уравнения удобны для применения в тех случаях, когда имеется буквенное разложение возмущающей функции. Выдающимся примером применения метода вариации произвольных постоянных в такой форме является работа Леверрье по теории движения больших планет.

Альтернативная методика заключается в построении общей теории, в которой коэффициенты периодических членов получаются в численном виде. Такая методика требуется в случаях достаточно больших эксцентриситетов, когда в буквенном разложении понадобились бы высокие степени e, для того чтобы достигнуть необходимого соответствия теории с точностью наблюдений. В этом случае, а также в случае применения метода численного интегрирования к уравнениям (21) необходимо выразить производные от элементов в такой форме, которая лучше годится для численных расчетов. Самой распространенной формой является та, в которой используются три взаимно перпендикулярных компоненты возмущающего ускорения: R — компонента в направлении радиуса-вектора (положительна в направлении возрастания радиуса-вектора), S — компонента, перпендикулярная к R в плоскости орбиты (положительна в направлении возрастания долготы в орбите), W — компонента, перпендикулярная к плоскости орбиты (положительна в направлении, в котором орбитальное движение кажется происходящим против часовой стрелки). Таким образом, положительные направления R, S, W образуют правую систему осей координат.

Пусть r есть радиус-вектор, ψ — долгота в орбите, отсчитываемая от некоторой начальной точки, Z — координата, перпендикулярная к плоскости орбиты, положительная в положительном направлении W. Тогда

$$\mathrm{R}=\frac{\partial R}{\partial r},\quad \mathrm{S}=\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \psi},\quad \mathrm{W}=\frac{\partial R}{\partial Z}.$$

Пусть c — любой из шести элементов орбиты; в таком случае

$$\frac{\partial R}{\partial c}=\frac{\partial R}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial c}+\frac{\partial R}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial c}+\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial c}.$$

Чтобы получить выражения для $\partial R/\partial c$ через R, S, W, необходимо найти выражения для частных производных от r, ψ, Z по элементам.

Необходимо условиться, что смысл $\partial R/\partial a$ совпадает со смыслом, указанным в разд. 5 этой главы, и что ε имеет смысл ε^I, так что

$$\lambda=\varrho+\varepsilon^I,$$
$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}.$$

Отношение r/a и истинная аномалия f являются функциями от e и $l=nt+\varepsilon-\tilde{\omega}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial l}=\frac{1}{n}\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\dot{r}}{n}.$$

Угол ψ необходимо отсчитывать от начальной точки; следовательно, $d\psi$ представляет собой то же, что и $\Delta\Gamma$ в уравнениях (3) гл. IX, и потому

$$d\psi=df+d\omega+\cos I\,d\Omega=$$
$$=df+d\tilde{\omega}-(1-\cos I)\,d\Omega.$$

Частные производные от r и ψ по e и $\tilde{\omega}$ выводятся в гл. XIII, уравнения (82) — (87). Необходимые результаты имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}, && \frac{\partial \psi}{\partial e}=\frac{2+e\cos f}{1-e^2}\sin f,\\
&\frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos f, && \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}=\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^{1/2}=\frac{(1+e\cos f)^2}{(1-e^2)^{3/2}},\\
&\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}=\frac{ae}{(1-e^2)^{1/2}}\sin f, && \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}}=1-\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}}=-\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}, && \frac{\partial \psi}{\partial \Omega}=-1+\cos I.
\end{aligned}
$$

Из второго и третьего уравнений (3) в гл. IX легко получить

$$dZ=r\sin(\omega+f)\,dI-r\cos(\omega+f)\sin I\,d\Omega.$$

Этих соотношений достаточно, чтобы вывести следующие выражения для производных:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{r}{a}\frac{\partial R}{\partial r},\\
&\frac{\partial R}{\partial e}=-a\cos f\frac{\partial R}{\partial r}+\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin f\frac{\partial R}{\partial \psi},\\
&\frac{\partial R}{\partial I}=r\sin(\omega+f)\frac{\partial R}{\partial Z},\\
&\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\frac{ae\sin f}{(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^{1/2}\frac{\partial R}{\partial \psi},\\
&\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}=-\frac{ae\sin f}{(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\left[1-\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^{1/2}\right]\frac{\partial R}{\partial \psi},\\
&\frac{\partial R}{\partial \Omega}=-r\sin I\cos(\omega+f)\frac{\partial R}{\partial Z}-2\sin^2\frac{1}{2}I\frac{\partial R}{\partial \psi}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Если эти выражения подставить в уравнения (21), то получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=\frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}}\left(\mathrm{R}\,e\sin f+\mathrm{S}\frac{p}{r}\right),\\
&\frac{de}{dt}=\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na}[\mathrm{R}\sin f+\mathrm{S}(\cos u+\cos f)],\\
&\frac{dI}{dt}=\frac{1}{na(1-e^2)^{1/2}}\mathrm{W}\frac{r}{a}\cos(\omega+f),\\
\sin I\,&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na(1-e^2)^{1/2}}\mathrm{W}\frac{r}{a}\sin(\omega+f),\\
&\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae}\left[-\mathrm{R}\cos f+\mathrm{S}\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin f\right]+2\sin^2\frac{1}{2}I\frac{d\Omega}{dt},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2r}{na^2}\mathrm{R}+\frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}}\frac{d\tilde{\omega}}{dt}+2(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{1}{2}I\frac{d\Omega}{dt},\\
&\frac{d^2\varrho}{dt^2}=-\frac{3}{a(1-e^2)^{1/2}}\left(\mathrm{R}\,e\sin f+\mathrm{S}\frac{p}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

В уравнении для de/dt использовано следующее соотношение:

$$\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)=\cos u+\cos f.$$

Уравнения в этой форме впервые были выведены Гауссом и применены к вычислению возмущений первого порядка, испытываемых Палладой от Юпитера. Гаусс использовал эти уравнения также для вывода вековых возмущений в элементах. Наконец, эти уравнения широко использовались для вычисления возмущений в элементах комет и малых планет при помощи численного интегрирования. В некоторых случаях оказывается достаточным вычислить только приближенные возмущения. Для таких случаев можно с успехом применить упрощенную форму этих уравнений, введенную Стремгреном.

14. Прямой вывод уравнений Гаусса. Метод, использованный для вывода гауссовой формы выражений для производных от элементов, является простым, если уже имеются выражения частных производных по элементам. Прямой вывод может быть основан на следующем принципе. Пусть

$$\varphi(c_1,\ c_2,\ \ldots)=f(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \tag{34}$$

есть некоторый интеграл дифференциальных уравнений задачи двух тел:

$$\ddot{x}=-\mu x r^{-3},\quad \ddot{y}=-\mu y r^{-3},\quad \ddot{z}=-\mu z r^{-3}.$$

Функция φ может зависеть от любых из шести орбитальных элементов Дифференцирование соотношения (34) дает

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=\mathrm{S}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}\right).$$

В возмущенном движении правую часть можно написать в виде

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

Но

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\mu x}{r^3}\right)=0,$$

так как если координаты и компоненты скорости в этом соотношении выражены через время и элементы орбиты, то оно будет выражением $d\varphi/dt$, которое в эллиптическом движении обращается в нуль. Следовательно, производная от φ в возмущенном движении запишется так:

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\dot{y}}\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\dot{z}}\frac{\partial R}{\partial z}.$$

В координатах r, ψ, Z это выражение приобретает следующий вид:

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\dot{r}}\mathrm{R}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\dot{\psi}}\mathrm{S}+\frac{\partial f}{\partial\dot{Z}}\mathrm{W}. \tag{35}$$

В нашем распоряжении имеются следующие интегралы:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mu}{2a} &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\psi}^2 - \frac{\mu}{r}, \\
(\mu p)^{1/2} &= [\mu a(1-e^2)]^{1/2} = r^2\dot{\psi}, \\
[\mu a(1-e^2)]^{1/2}\sin I \sin\Omega &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\
-[\mu a(1-e^2)]^{1/2}\sin I\cos\Omega &= z\dot{x} - x\dot{z}.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Применение формулы (35) дает последовательно

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{2a^2}\frac{da}{dt} &= \dot{r}\mathrm{R} + r\dot{\psi}\mathrm{S}, \\
\frac{d}{dt}(\mu p)^{1/2} &= r\mathrm{S},
\end{aligned} \tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
r\mathrm{S}\sin I\sin\Omega + (\mu p)^{1/2}\cos I\sin\Omega\frac{dI}{dt} + (\mu p)^{1/2}\sin I\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt} &= \\
= y\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial y}&, \\
-r\mathrm{S}\sin I\cos\Omega - (\mu p)^{1/2}\cos I\cos\Omega\frac{dI}{dt} + (\mu p)^{1/2}\sin I\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt} &= \\
= z\frac{\partial R}{\partial x} - x\frac{\partial R}{\partial z}&.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Первое из этих уравнений дает

$$
\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}}\left[\mathrm{R}\, e\sin f + \mathrm{S}\frac{p}{r}\right]; \tag{39}
$$

второе после простого преобразования принимает вид

$$
\frac{da}{dt} - \frac{2ae}{1-e^2}\frac{de}{dt} = \frac{2}{an(1-e^2)^{1/2}}\, r\,\mathrm{S}.
$$

Полуразность этих результатов после умножения на $(1-e^2)(ae)^{-1}$ дает

$$
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae}\left[\mathrm{R}\, e\sin f + \mathrm{S}\left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a}\right)\right] = \\
&= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na}[\mathrm{R}\sin f + \mathrm{S}(\cos u + \cos f)].
\end{aligned} \tag{40}
$$

Эти результаты согласуются с первыми двумя из уравнений (33).

Правые части уравнений (38) представляют собой моменты возмущающего ускорения относительно осей x и y. Если обозначить их соответственно через (A) и (B), то момент (N) относительно направления ON на восходящий узел и момент (N') относительно направления $ON+90^\circ$ в плоскости XY равны

$$
\begin{aligned}
(N) &= (A)\cos\Omega + (B)\sin\Omega, \\
(N') &= -(A)\sin\Omega + (B)\cos\Omega.
\end{aligned}
$$

Таким образом, из уравнений (38) получаем

$$
\begin{aligned}
(N) &= (\mu p)^{1/2}\sin I\frac{d\Omega}{dt}, \\
(N') &= -r\,\mathrm{S}\sin I - (\mu p)^{1/2}\cos I\frac{dI}{dt}.
\end{aligned}
$$

Пусть (N'') — момент относительно направления ON'', отличающегося на $+90°$ от направления на восходящий узел в плоскости орбиты, (Z) — момент относительно нормали к орбитальной плоскости. Тогда

$$(N') = (N'') \cos I - (Z) \sin I.$$

Но

$$(Z) = r\mathrm{S};$$

поэтому

$$(N'') = -(\mu p)^{1/2} \frac{dI}{dt}.$$

Моменты возмущающего ускорения относительно ON и ON'' равны

$$(N) = \mathrm{W} r \sin(\omega + f),$$
$$(N'') = -\mathrm{W} r \cos(\omega + f);$$

в таком случае

$$\begin{aligned} \sin I \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \mathrm{W} r \sin(\omega + f), \\ \frac{\partial I}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \mathrm{W} r \cos(\omega + f). \end{aligned} \tag{41}$$

Чтобы получить производные от ε и $\tilde{\omega}$, можно использовать другой принцип. Пусть $F(x, y, z)$ — любая функция от координат. Тогда, если функцию F считать выраженной через t и эллиптические элементы, то

$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

но так как

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

то отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial F}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0. \tag{42}$$

Применим это соотношение к радиусу-вектору, который является функцией от a, e и $l = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$, что дает

$$\frac{\partial r}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial r}{\partial l} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) = 0.$$

Это соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{ae}{(1-e^2)^{1/2}} \sin f \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) &= -\frac{r}{a} \frac{da}{dt} + a \cos f \frac{de}{dt} = \\ &= -\frac{2r}{na(1-e^2)^{1/2}} \mathrm{R} e \sin f - \frac{2p}{na(1-e^2)^{1/2}} \mathrm{S} + \\ &+ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} \mathrm{R} \sin f \cos f + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{ne} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) \mathrm{S} \cos f = \\ &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} \left(\frac{-2e}{1+e\cos f} + \cos f \right) \mathrm{R} \sin f - \\ &- \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} \left(\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f} \right) \mathrm{S} \sin^2 f. \end{aligned}$$

или

$$e\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)=\frac{1-e^2}{na}\left[\mathrm{R}\left(\frac{-2e}{1+e\cos f}+\cos f\right)-\mathrm{S}\,\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\sin f\right]. \quad (43)$$

Далее, тот же принцип можно применить к углу ψ, для которого

$$d\psi=df+d\tilde{\omega}-(1-\cos I)\,d\Omega,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial e}\frac{de}{dt}+\frac{\partial f}{\partial l}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)+\frac{d\tilde{\omega}}{dt}-2\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt}=0.$$

Это соотношение принимает следующий вид:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin f\,\frac{de}{dt}-\frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^{1/2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)+2\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{\partial\Omega}{dt}=$$

$$=\frac{2+e\cos f}{nae\,(1-e^2)^{1/2}}\left[-\mathrm{R}\,e\sin^2 f-\mathrm{S}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)\sin f\right]+$$

$$+\frac{(1-e^2)^{3/2}}{nae}\frac{a^2}{r^2}\left[\mathrm{R}\left(\frac{2e}{1+e\cos f}-\cos f\right)+\mathrm{S}\,\frac{2+e\cos f}{1+e\cos f}\sin f\right]+$$

$$+2\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt},$$

или после некоторых преобразований

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae}\left[-\mathrm{R}\cos f+\mathrm{S}\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin f\right]+2\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt}. \quad (44)$$

Необходимо заметить, что если уравнение (44) умножить на $e(1-e^2)^{1/2}$ и сложить с уравнением (43), то правая часть этой суммы значительно упростится. В результате получается

$$e\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)+e\,(1-e^2)^{1/2}\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{2e\,(1-e^2)}{na}\frac{\mathrm{R}}{1+e\cos f}+$$

$$+2e\,(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt},$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{dt}-[1-(1-e^2)^{1/2}]\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{2r}{na^2}\mathrm{R}+2\,(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt},$$

или окончательно

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2r}{na^2}\mathrm{R}+\frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}}\frac{d\tilde{\omega}}{dt}+2\,(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{1}{2}I\,\frac{d\Omega}{dt}. \quad (45)$$

Замечания. Литература

Первое аналитическое развитие метода вариации произвольных постоянных было дано Эйлером в работах по изучению взаимных возмущений Юпитера и Сатурна, удостоенных премий Французской Академии наук в 1748 и 1752 гг. Разработка этого метода была продолжена Лагранжем в 1766 г. и завершена им в 1782 г.

Вплоть до середины XIX столетия этот метод был почти единственным методом, применявшимся для вычисления возмущений. И в настоящее время он сохраняет свое значение. Однако в течение последнего столетия стало более распространенным вычисление возмущений в координатах, так как в этом случае получаемые результаты олее непосредственным образом применимы к вычислению эфемерид.

Метод, использованный в этой главе для вывода дифференциальных уравнений для элементов эллиптической орбиты, был предложен Уиттекером в журнале The Messenger of Mathematics (январь 1897 г.). Здесь он упрощен путем замены

$$\frac{\partial\left(\frac{\varepsilon-\tilde{\omega}}{n},\,-\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial(p,\,q)}$$

эквивалентным выражением

$$\frac{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega},\,\sqrt{\mu a})}{\partial(p,\,q)}.$$

Настояния столь многих авторов на использовании в качестве канонических переменных $C=-\mu/2a$, $(\varepsilon-\tilde{\omega})/n$ вместо переменных $L=\sqrt{a\mu}$, $\sigma=\varepsilon-\tilde{\omega}$ вызывают ненужные усложнения.

В статье Гарфинкеля о матрицах возмущений небесной механики (Astron. J., 51, 44, 1944) в качестве отправного пункта используются уравнения Делонэ, а затем изящным и доходчивым способом получаются матрицы уравнений для кеплеровых элементов как в форме Лагранжа, так и в форме Гаусса.