Глава XII

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

1. Постановка задачи. Проблема небесной механики, известная под названием теории Луны, строго говоря, должна была бы включать в себя все стороны аналитической теории движения Луны. Однако часто под теорией Луны подразумевают задачу определения движения Луны под действием гравитационного притяжения Земли и Солнца, причем все эти три тела рассматриваются как материальные точки. Эта задача была названа Брауном основной задачей теории Луны. Полное рассмотрение движения Луны требует включения эффектов, вызванных притяжениями Земли и Луны со стороны планет, а также влияния отклонений Земли и Луны от сферической формы. В этой главе будет рассмотрена только основная задача.

2. Уравнения движения. Если пренебречь массой Луны, рассматривая Землю и Солнце как материальные точки, то можно немедленно написать уравнения движения Луны. Пусть x, y, z означают координаты Луны, а x', y', z' — координаты Солнца в прямоугольной системе координат, начало которой помещено в центр Земли. Тогда уравнения движения Луны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k^2Ex}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial x},\\
\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k^2Ey}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial y},\\
\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{k^2Ez}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial z},
\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

и

$$R=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),\tag{1a}$$

а E, m' — массы Земли и Солнца.

Орбита Земли относительно Солнца будет неподвижным эллипсом, лежащим в неподвижной плоскости. Выберем эту плоскость за плоскость xy, так что $z'=0$. Тогда, если расстояние Солнца от Луны обозначено через Δ, то

$$\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + r^2 = \\ = r'^2 + r^2 - 2(xx' + yy') = \\ = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos S, \tag{2}$$

где S — угол при Земле между направлениями на Луну и Солнце.

Одно из существенных различий между лунным и планетным случаями проблемы трех тел состоит в том, что в первом случае отношение r/r' достаточно мало, что позволяет разложить Δ^{-1} по степеням этого отношения, тогда как в типичной планетной теории такое разложение сходилось бы очень медленно. Из формулы (2) вытекает, что

$$\frac{r'}{\Delta} = \left[1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'}\cos S\right]^{-1/2}. \tag{3}$$

Чтобы получить разложение по степеням $\varrho = r/r'$, положим

$$2\cos S = \sigma + \sigma^{-1}$$

и запишем

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = (1-\varrho\sigma)(1-\varrho\sigma^{-1}).$$

Тогда

$$\frac{r'}{\Delta} = (1-\varrho\sigma)^{-1/2}(1-\varrho\sigma^{-1})^{-1/2} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\varrho\sigma + \frac{3}{8}\varrho^2\sigma^2 + \frac{5}{16}\varrho^3\sigma^3 + \ldots\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2}\varrho\sigma^{-1} + \frac{3}{8}\varrho^2\sigma^{-2} + \frac{5}{16}\varrho^3\sigma^{-3} + \ldots\right) = \tag{4а}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\varrho(\sigma + \sigma^{-1}) + \varrho^2\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(\sigma^2 + \sigma^{-2})\right] +$$

$$+ \varrho^3\left[\frac{3}{16}(\sigma + \sigma^{-1}) + \frac{5}{16}(\sigma^3 + \sigma^{-3})\right] + \ldots = \tag{4б}$$

$$= 1 + \varrho\cos S + \varrho^2\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2S\right] +$$

$$+ \varrho^3\left[\frac{3}{8}\cos S + \frac{5}{8}\cos 3S\right] + \ldots = \tag{4в}$$

$$= 1 + \varrho\cos S + \varrho^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right] +$$

$$+ \varrho^3\left[-\frac{3}{2}\cos S + \frac{5}{2}\cos^3 S\right] + \ldots = \tag{4г}$$

$$= 1 + \varrho P_1(\cos S) + \varrho^2 P_2(\cos S) + \varrho^3 P_3(\cos S) + \ldots. \tag{4д}$$

Функции P_0, P_1, ... являются полиномами Лежандра, уже определенными в гл. III, где рассматривались условия сходимости этого разложения. Легко видеть, что при $S = 0$, $\cos S = +1$, выражение (3) принимает вид $(1-\varrho)^{-1}$, а (4в) становится его разложением в биномиальный ряд вида

$$(1-\varrho)^{-1} = 1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \ldots,$$

который сходится при $|\varrho| < 1$. Для остальных действительных значений S коэффициенты ряда (4в) или его эквивалентов (4г) и (4д) никогда не превосходят единицы. Эти ряды также сходятся при $|\varrho| < 1$.

Поскольку

$$\frac{xx'+yy'}{r'^3}=\frac{r\cos S}{r'^2},$$

то мы получаем

$$R=\frac{k^2m'}{r'}\left[1+\varrho^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)+\varrho^3\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\ldots\right].$$

Член $\varrho\cos S$, присутствующий в r'/Δ, взаимно уничтожился с дополнительной частью возмущающей функции (1а). Наконец, поскольку r' не зависит от координат Луны, то член k^2m'/r' ничего не вносит в правые части уравнений движения (1). Поэтому можно написать

$$R=\frac{k^2m'}{r'}\left[\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)+\frac{r^3}{r'^3}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\ldots\right]. \quad (5)$$

Напомним, что это выражение для возмущающей функции было получено в предположении, что можно пренебречь массой Луны. Если же масса Луны M должна быть принята во внимание, то необходимо исходить из уравнений движения для всех трех тел в инерциальной системе координат. Тогда мы находим, что:

1. Относительное движение центра масс системы Земля — Луна вокруг Солнца настолько мало отклоняется от невозмущенной эллиптической орбиты, что для всех практических целей можно считать орбиту этого движения кеплеровым эллипсом для масс m' и $E+M$.

2. Движение Луны относительно Земли можно определить из уравнений движения (1), если в левой части заменить E на $E+M$ и вместо формулы (5) записать возмущающую функцию (гл. X, разд. 8) в следующем виде:

$$R=\frac{k^2m'}{r'}\left[\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{E-M}{E+M}\frac{r^3}{r'^3}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\ldots\right]. \quad (6)$$

Поскольку в системе Земля — Луна отношение M/E равно приблизительно 1/80, то множитель $(E-M)/(E+M)$, зависящий от масс, примерно равен $1-1/40$. В любой форме теории Луны надлежащий учет этого множителя и аналогичных множителей, появляющихся вместе с членами R более высоких порядков, является нетрудным делом.

3. Разложение возмущающей функции по эллиптическим элементам. В некоторых методах, применяемых в теории движения Луны, особенно в методе, использованном Делонэ, требуется разложение возмущающей функции по эллиптическим элементам орбит Луны и Солнца. В качестве первого шага к получению такого разложения необходимо рассмотреть $\cos S$. Пусть Ω есть долгота восходящего узла орбиты Луны, J — наклонность орбиты Луны к эклиптике, ω — угловое расстояние лунного перигея от восходящего узла, f — истинная аномалия. Пусть, далее, ω', f' означают соответствующие углы для Солнца. Наконец, положим истинные долготы Луны и Солнца равными соответственно

$$\psi=\Omega+\omega+f, \qquad \psi'=\Omega+\omega'+f'.$$

Из формулы косинуса в сферической тригонометрии вытекает, что

$$\cos S=\cos(\omega+f)\cos(\omega'+f')+\sin(\omega+f)\sin(\omega'+f')\cos J=$$
$$=\cos(\omega+f-\omega'-f')-(1-\cos J)\sin(\omega+f)\sin(\omega'+f')=$$

$$= \cos(\psi - \psi') - \frac{1}{2}(1 - \cos J)\,[\cos(\psi - \psi') - \cos(\omega + f + \omega' + f')] =$$
$$= \cos^2\frac{J}{2}\cos(\psi - \psi') + \sin^2\frac{J}{2}\cos(\psi + \psi' - 2\Omega).$$

Положим

$$\sin J = \gamma;$$

тогда, если пренебречь степенями γ выше второй, то

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)\cos(\psi - \psi') + \frac{1}{4}\gamma^2\cos(\psi + \psi' - 2\Omega), \tag{7а}$$

$$\cos^2 S = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right)\cos^2(\psi - \psi') + \frac{1}{2}\gamma^2\cos(\psi - \psi')\cos(\psi + \psi' - 2\Omega) =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma^2\right)\cos(2\psi - 2\psi') +$$
$$+ \frac{1}{4}\gamma^2\cos(2\psi - 2\Omega) + \frac{1}{4}\gamma^2\cos(2\psi' - 2\Omega), \tag{7б}$$

$$\cos^3 S = \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}\gamma^2\right)\cos(\psi - \psi') + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\gamma^2\right)\cos(3\psi - 3\psi') +$$
$$+ \frac{3}{8}\gamma^2\cos(\psi + \psi' - 2\Omega) + \frac{3}{16}\gamma^2\cos(3\psi - \psi' - 2\Omega) +$$
$$+ \frac{3}{16}\gamma^2\cos(\psi - 3\psi' + 2\Omega). \tag{7в}$$

Эти разложения должны быть подставлены в выражение (6), но прежде чем это сделать, необходимо слегка видоизменить (6). Третий закон Кеплера для движения центра масс системы Земля — Луна относительно Солнца дает соотношение

$$k^2(m' + E + M) = n'^2 a'^3,$$

в котором a' означает среднее расстояние до Солнца, а n' — среднее движение Солнца. Поскольку $(E + M)/m'$ равно около 1/330000, то заменой $k^2 m'$ на $n'^2 a'^3$ вносится лишь небольшая, легко учитываемая погрешность. Если далее заменить множитель $(E - M)/(E + M)$, зависящий от масс, единицей, то выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$R = n'^2 a^2 \left[\frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right) +\right.$$
$$+ \frac{a}{a'}\frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\left(-\frac{3}{2}\cos S + \frac{5}{2}\cos^3 S\right) +$$
$$\left.+ \left(\frac{a}{a'}\right)^2\frac{r^4}{a^4}\frac{a'^5}{r'^5}\left(+\frac{3}{8} - \frac{15}{4}\cos^2 S + \frac{35}{8}\cos^4 S\right) + \ldots\right] =$$
$$= R_1 + R_2 + R_3 + \ldots. \tag{8}$$

Совокупность членов, получающаяся из члена $\varrho^4 P_4(\cos S)$ в разложении (4д), добавлена для того, чтобы показать характер продолжения этого разложения. Теперь выражение для R подготовлено к разложению по эллиптическим элементам. Существенные особенности этого разложения могут быть наглядно показаны, если удержать в разложении члены, включающие в себя квадраты и произведения эксцентриситетов. Приближенные числовые значения для системы Земля — Луна равны

$$e = 0{,}0549, \quad e' = 0{,}0168.$$

Кроме степеней e и e', буквенное разложение R будет содержать степени $\gamma^2 = \sin^2 J$, присутствующего в (7а, б, в), и отношения a/a', первая степень которого возникает как множитель второго члена формулы (8), вторая степень — как множитель третьего члена и т. д. Приближенные численные значения будут

$$\gamma = \sin J = 0{,}0897, \quad a/a' = 0{,}0025.$$

Отношение a/a' равно отношению синуса параллакса Солнца к синусу параллакса Луны. Множитель, зависящий от масс, который входит во второй член R, можно учесть, используя вместо a/a' величину

$$\frac{E-M}{E+M}\frac{a}{a'} = 0{,}00251273.$$

Это численное значение было использовано Брауном при составлении «Tables of the Motion of the Moon»[1]) и не соответствует самым лучшим значениям для параллакса Солнца и отношения M/E, имеющимся в настоящее время.

При помощи формулы (7б) первая часть R, ограниченная членами, не содержащими множителем γ^2, принимает вид

$$R_1 = n'^2 a^2 \frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3}\left[+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2\psi - 2\psi')\right] = \tag{9а}$$

$$= n'^2 a^2 \frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3}\left[+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}' + 2f - 2f')\right], \tag{9б}$$

где $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$, $\tilde{\omega}' = \omega' + \Omega$ соответственно долготы перигеев Луны и Солнца.

При помощи методов, изложенных в гл. II, можно получить следующие разложения по средним аномалиям l и l'. Удерживая члены только до второй степени относительно e, e' и вводя φ, φ' для обозначения средних аномалий, получаем

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - 2e\cos\varphi - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi,$$

$$\frac{a'^3}{r'^3} = 1 + \frac{3}{2}e'^2 + 3e'\cos\varphi' + \frac{9}{2}e'^2\cos 2\varphi',$$

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2}\cos 2f &= +\frac{5}{2}e^2 - 3e\cos\varphi + \left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos 2\varphi + e\cos 3\varphi + e^2\cos 4\varphi,\\
\frac{r^2}{a^2}\sin 2f &= -3e\sin\varphi + \left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\sin 2\varphi + e\sin 3\varphi + e^2\sin 4\varphi,\\
\frac{a'^3}{r'^3}\cos 2f' &= -\frac{e'}{2}\cos\varphi' + \left(1-\frac{5}{2}e'^2\right)\cos 2\varphi' + \frac{7}{2}e'\cos 3\varphi' +\\
&\qquad + \frac{17}{2}e'^2\cos 4\varphi',\\
\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2f' &= -\frac{e'}{2}\sin\varphi' + \left(1-\frac{5}{2}e'^2\right)\sin 2\varphi' + \frac{7}{2}e'\sin 3\varphi' +\\
&\qquad + \frac{17}{2}e'^2\sin 4\varphi'.
\end{aligned}$$

[1]) E. W. Brown, Tables of the Motion of the Moon, Yale Univ. Press, 1919.

Перемножая ряды, находим

$$\frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3} = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - 2e\cos\varphi + 3e'\cos\varphi' - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi + \\ + \frac{9}{2}e'^2\cos 2\varphi' - 3ee'\cos(\varphi-\varphi') - 3ee'\cos(\varphi+\varphi'), \qquad (10)$$

$$\frac{r^2}{a^2}\cos 2f\cdot\frac{a'^3}{r'^3}\cos 2f' + \frac{r^2}{a^2}\sin 2f\cdot\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2f' = \mathrm{I} =$$

$$= \left(1 - \frac{5}{2}e^2 - \frac{5}{2}e'^2\right)\cos(2\varphi - 2\varphi') - 3e\cos(\varphi - 2\varphi') + e\cos(3\varphi - 2\varphi') -$$
$$- \frac{e'}{2}\cos(2\varphi - \varphi') + \frac{7}{2}e'\cos(2\varphi - 3\varphi') +$$
$$+ \frac{5}{2}e^2\cos 2\varphi' + e^2\cos(4\varphi - 2\varphi') +$$
$$+ \frac{3}{2}ee'\cos(\varphi - \varphi') - \frac{21}{2}ee'\cos(\varphi - 3\varphi') - \frac{1}{2}ee'\cos(3\varphi - \varphi') +$$
$$+ \frac{7}{2}ee'\cos(3\varphi - 3\varphi') +$$
$$+ \frac{17}{2}e'^2\cos(2\varphi - 4\varphi'),$$

$$\frac{r^2}{a^2}\cos 2f\cdot\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2f' - \frac{r^2}{a^2}\sin 2f\cdot\frac{a'^3}{r'^3}\cos 2f' = \mathrm{II} =$$

$$= -\left(1 - \frac{5}{2}e^2 - \frac{5}{2}e'^2\right)\sin(2\varphi - 2\varphi') + 3e\sin(\varphi - 2\varphi') - e\sin(3\varphi - 2\varphi') +$$
$$+ \frac{e'}{2}\sin(2\varphi - \varphi') - \frac{7}{2}e'\sin(2\varphi - 3\varphi') +$$
$$+ \frac{5}{2}e^2\sin 2\varphi' - e^2\sin(4\varphi - 2\varphi') -$$
$$- \frac{3}{2}ee'\sin(\varphi - \varphi') + \frac{21}{2}ee'\sin(\varphi - 3\varphi') + \frac{1}{2}ee'\sin(3\varphi - \varphi') -$$
$$- \frac{7}{2}ee'\sin(3\varphi - 3\varphi') -$$
$$- \frac{17}{2}e'^2\sin(2\varphi - 4\varphi').$$

За исключением членов с аргументом $2\varphi'$, все косинусоидальные члены в выражении I имеют соответственные члены с синусами в выражении II, коэффициенты которых противоположны по знаку. Это обусловлено равенством коэффициентов при соответствующих членах с косинусами в основных рядах и представляет собой свойство, которое исчезает, если учитываются степени e и e' выше второй. Однако это обстоятельство не мешает распространению той же процедуры на более высокие степени e и e'.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2\psi - 2\psi') = \mathrm{I}\cdot\cos(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \mathrm{II}\cdot\sin(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') =$$
$$= \left(1 - \frac{5}{2}e^2 - \frac{5}{2}e'^2\right)\cos(2\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') -$$
$$- 3e\cos(\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + e\cos(3\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') -$$
$$- \frac{e'}{2}\cos(2\varphi - \varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \frac{7}{2}e'\cos(2\varphi - 3\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') +$$

$$+\frac{5}{2}e^2\cos(2\varphi'-2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}')+e^2\cos(4\varphi-2\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}')+$$

$$+\frac{3}{2}ee'\cos(\varphi-\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}')-\frac{21}{2}ee'\cos(\varphi-3\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}')-$$

$$-\frac{1}{2}ee'\cos(3\varphi-\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}')+\frac{7}{2}ee'\cos(3\varphi-3\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}')+$$

$$+\frac{17}{2}e'^2\cos(2\varphi-4\varphi'+2\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}'). \qquad (11)$$

Подстановка (10) и (11) в (9а) дает требуемый результат. При этой подстановке мы заменяем φ разностью $\lambda-\tilde{\omega}$, φ' — разностью $\lambda'-\tilde{\omega}'$, где λ и λ' — соответственно средние долготы Луны и Солнца. Далее мы добавляем в выражение (7б) для $\cos^2 S$ члены, содержащие множителем γ^2, заменяя в этих членах ψ на λ, ψ' на λ'. Тогда первая часть R принимает следующий вид:

$$R_1=n'^2a^2\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2-\frac{3}{8}\gamma^2+\right.$$

$$+\left(+\frac{3}{4}-\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{8}e'^2-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(2\lambda-2\lambda')-$$

$$-\frac{e}{2}\cos(\lambda-\tilde{\omega})-\frac{9}{4}e\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\frac{3}{4}e\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})+$$

$$+\frac{3}{4}e'\cos(\lambda'-\tilde{\omega}')-\frac{3}{8}e'\cos(2\lambda-\lambda'-\tilde{\omega}')+\frac{21}{8}e'\cos(2\lambda-3\lambda'+\tilde{\omega}')-$$

$$-\frac{e^2}{8}\cos(2\lambda-2\tilde{\omega})+\frac{15}{8}e^2\cos(2\lambda'-2\tilde{\omega})+\frac{3}{4}e^2\cos(4\lambda-2\lambda'-2\tilde{\omega})-$$

$$-\frac{3}{4}ee'\cos(\lambda-\lambda'-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+\frac{9}{8}ee'\cos(\lambda-\lambda'+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-$$

$$-\frac{3}{4}ee'\cos(\lambda+\lambda'-\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-$$

$$-\frac{3}{8}ee'\cos(3\lambda-\lambda'-\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-\frac{63}{8}ee'\cos(\lambda-3\lambda'+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+$$

$$+\frac{21}{8}ee'\cos(3\lambda-3\lambda'-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+$$

$$+\frac{9}{8}e'^2\cos(2\lambda'-2\tilde{\omega}')+\frac{51}{8}e'^2\cos(2\lambda-4\lambda'+2\tilde{\omega}')+$$

$$\left.+\frac{3}{8}\gamma^2\cos(2\lambda-2\Omega)+\frac{3}{8}\gamma^2\cos(2\lambda'-2\Omega)\right]. \qquad (12)$$

Аналогичным образом можно разложить члены R более высокого порядка. Делонэ использует в качестве основы своей теории разложение до шестого порядка относительно элементов e, e', γ, тогда как отношение a/a' рассматривается как величина второго порядка. Его ряд для R содержит 324 члена.

Получение некоторых наиболее значительных членов в движении Луны можно проиллюстрировать, ограничивая возмущающую функцию следующими членами:

$$R = n'^2 a^2 \Big[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2\lambda - 2\lambda') -$$

$$- \frac{1}{2} e\cos(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{9}{4} e\cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} e\cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) +$$

$$+ \frac{3}{4} e'\cos(\lambda' - \tilde{\omega}') + \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{8} e^2\cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}) +$$

$$+ \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{8}\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma^2\cos(2\lambda' - 2\Omega) +$$

$$+ \frac{3}{8}\frac{a}{a'}\cos(\lambda - \lambda') + \frac{5}{8}\frac{a}{a'}\cos(3\lambda - 3\lambda') -$$

$$- \frac{15}{16}\frac{a}{a'} e\cos(\lambda' - \tilde{\omega}') - \frac{15}{16}\frac{a}{a'} ee'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \Big]. \qquad (13)$$

Чтобы получить члены, имеющие множителем a/a', удобно аналогично формуле (9a) записать

$$R_2 = n'^2 a^2 \frac{a}{a'}\frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\left[+ \frac{3}{8}\cos(\psi - \psi') + \frac{5}{8}\cos(3\psi - 3\psi') \right].$$

Главные члены разложения получаются заменой r/a и a'/r' единицей, а $\psi - \psi'$ — разностью $\lambda - \lambda'$. Остальные два члена, включенные в (13), легко получаются из разложения до первой степени относительно e и e' следующих величин:

$$\frac{r^3}{a^3}\cos f = -\frac{5}{2}e + \cos\varphi - \frac{e}{2}\cos 2\varphi,$$

$$\frac{r^3}{a^3}\sin f = \qquad + \sin\varphi - \frac{e}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{a'^4}{r'^4}\cos f' = + e' + \cos\varphi' + 3e'\cos 2\varphi',$$

$$\frac{a'^4}{r'^4}\sin f' = \qquad + \sin\varphi' + 3e'\sin 2\varphi',$$

которые порождают следующие члены:

$$-\frac{5}{2}ee' - \frac{5}{2}e\cos\varphi' \quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\cos(f - f'),$$

$$+\frac{5}{2}e\sin\varphi' \quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\sin(f - f'),$$

и, следовательно,

$$-\frac{5}{2}ee'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \frac{5}{2}e\cos(\varphi' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') \quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\cos(\psi - \psi').$$

Умножение на $\frac{3}{8}n'^2a^2a/a'$ объясняется присутствием последних двух членов из (13).

4. Свойства возмущающей функции. Значение S не зависит от выбора нуль-пункта, от которого отсчитываются углы ψ и ψ'. Углы λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ и Ω, которые встречаются в линейных комбинациях в аргументах периодических членов, присутствующих в R, отсчитываются от того же общего начала. Если все эти углы возрастут на произвольную общую величину, то разложение для R не должно измениться. Поэтому необходимо, чтобы сумма коэффициентов этих составных частей аргументов была равна нулю для каждого члена в R.

Рассмотрим сперва члены, не имеющие множителем γ^2. Аргументы могут быть написаны в следующем виде:

$$i_1\lambda + i_2\lambda' + i_3\tilde{\omega} + i_4\tilde{\omega}',$$

причем

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0. \qquad (14)$$

Если ввести $\varphi = \lambda - \tilde{\omega}$, $\varphi' = \lambda' - \tilde{\omega}'$, то эти аргументы примут вид

$$(i_1 + i_3)\,\lambda + (i_2 + i_4)\,\lambda' - i_3\varphi - i_4\varphi'.$$

Условие (14) равносильно требованию, чтобы коэффициенты при λ и λ' в последней форме были равны по величине и обратны по знаку. Следовательно, этот аргумент можно написать в виде

$$p_1(\lambda - \lambda') + p_2\varphi + p_3\varphi', \qquad (15)$$

в котором p_1 может быть равным нулю или положительному целому числу, p_2 и p_3 — любыми целыми числами, положительными, отрицательными или нулем. В членах, которые составляют R_1, значение p_1 равно либо 0, либо 2; в R_2 — 1 или 3; в R_3 — 0, 2 или 4 и т. д. Это следует из того факта, что числовое значение p_1 в (15) совпадает с кратностью разности $\psi - \psi'$, которая получается при раскрытии выражения (8) с помощью выражений (7) для различных степеней.

Наконец, степень e в коэффициенте члена связана с кратностью p_2 средней аномалии φ в аргументе вида (15) и степень e' — с кратностью p_3 средней аномалии φ'. Этот коэффициент содержит следующий множитель:

$$e^{|p_2|+2k}e'^{|p_3|+2k'}, \quad k,\ k' = 0,\ +1,\ +2,\ \ldots \qquad (16)$$

Это соответствует соотношению Даламбера в разложениях в эллиптическом движении. Если s есть целое положительное число, то можно написать соотношение вида

$$\left(\frac{r}{a}\right)^s \left(\frac{a'}{r'}\right)^{s+1} \cos j(\psi - \psi') = (1 + x)^s (1 + x')^{-s-1} \cos [j(\lambda - \lambda') + jy - jy'],$$

в котором $x = r/a - 1$, $x' = r'/a' - 1$, а y, y' — уравнения центра. Теперь $(1 + x)^s \cos jy$ и $(1 + x)^s \sin jy$ можно разложить в даламберовы ряды по косинусам или синусам; аргументами являются дуги, кратные φ, и связь между степенью e и кратностью средней аномалии будет той же, что и заданная выражением (16). Аналогично $(1 + x')^{-s-1} \cos jy'$ и $(1 + x')^{-s-1} \times$ $\times \sin jy'$ можно разложить в даламберовы ряды по дугам, кратным средней аномалии φ'. Эти даламберовы свойства разложений в эллиптическом движении сохраняются, когда аргументы выражены окончательно в форме (15).

Аналогичная связь существует между степенями γ и кратностями угла Ω. Если эксцентриситеты равны нулю, то (7а) принимает вид

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos (\lambda - \lambda') + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos (\lambda + \lambda' - 2\Omega),$$

что можно записать в следующем виде:

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos (\lambda - \lambda') + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos [\lambda - \lambda' - 2(\lambda - \Omega)].$$

Во всех степенях $\cos S$, записанных в этой форме, аргументы будут вида

$$p_1(\lambda - \lambda') + 2p_4(\lambda - \Omega),$$

где p_4 есть целое число (положительное, отрицательное или нуль), тогда как коэффициент имеет множитель

$$\gamma^{|2p_4|+2k''}, \quad k''=0,\ +1,\ +2,\ \ldots\ .$$

Это соотношение справедливо и в том случае, если эксцентриситеты включены в разложение.

Эти различные соотношения можно свести воедино, представляя любой член из R в следующей форме:

$$Nn'^2a^2e^{|p_2|+2k}e'^{|p_3|+2k'}\gamma^{|2p_4|+2k''}\left(\frac{a}{a'}\right)^{p'_1}\times$$
$$\times\cos\left[p_1(\lambda-\lambda')+p_2\varphi+p_3\varphi'+2p_4(\lambda-\Omega)\right],$$

в которой величины p и k — целые числа, а N — рациональный числовой коэффициент, причем p_1 — нуль или положительное число, p_2, p_3, p_4 — нуль, положительные или отрицательные числа, а k, k', k'' — нуль или положительные числа.

Если члены, порождаемые R_1, R_2, R_3, ..., рассматриваются в отдельности, то мы имеем

в R_1	$p_1=0$ или 2;	показатель степени a/a' 0;
R_2	$p_1=1$ или 3;	1;
R_3	$p_1=0$, 2 или 4;	2.

5. Интегрирование главных членов по методу вариации произвольных постоянных. Метод вариации произвольных постоянных удобен для получения солнечных возмущений в движении спутников, для которых отношение n'/n является весьма малым по сравнению с его значением для системы Земля — Луна. В таких случаях достаточно первого приближения для получения возмущений со всей точностью, необходимой для сравнения с наблюдениями. Лаплас применил этот метод для вычисления значений солнечных возмущений в движении галилеевых спутников Юпитера; Г. Струве применил его к спутникам Сатурна, за исключением Фебы. Отношение n'/n равно 0,0039 для IV спутника Юпитера, 0,0015 для Титана; оба эти значения малы по сравнению со значением для Луны, равным 0,0748. Пуассон использовал этот метод для Луны, однако он не стремился дать законченную теорию.

Пусть возмущенная средняя долгота определяется уравнением

$$\lambda=\int n\,dt+\varepsilon_1. \tag{17}$$

Если пренебречь степенями эксцентриситета и наклонности орбиты спутника выше второй, то можно применить следующие сокращенные уравнения [см. гл. XI, уравнения (21)]:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=+\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda}, & \frac{d\varepsilon_1}{dt}&=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a},\\
\frac{de}{dt}&=-\frac{1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\tilde\omega}, & \frac{d\tilde\omega}{dt}&=+\frac{1}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\gamma}{dt}&=-\frac{1}{na^2\gamma}\frac{\partial R}{\partial\Omega}, & \frac{d\Omega}{dt}&=+\frac{1}{na^2\gamma}\frac{\partial R}{\partial\gamma}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Определяя ε_1 посредством (17), условимся, что, коль скоро рассматриваются элементы спутниковой орбиты, R следует считать функцией от a, e, γ, λ, $\tilde{\omega}$ и Ω. Тогда в силу (17) и выражений для da/dt и $d\varepsilon_1/dt$ из (18) возмущения в средней долготе имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\lambda = -\int\int \frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\,dt\,dt - \int \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}\,dt = \\ = (\delta\lambda) + \delta\varepsilon_1. \qquad (19)\end{aligned}$$

Как и в случае применения этого метода к движению планет, возмущения первого порядка получаются, если считать a, e, γ и $n = \mu^{1/2}a^{-3/2}$ постоянными всюду в разложениях правых частей (18) и (19). Средняя долгота в этих правых частях рассматривается как линейная функция времени. Вместо того чтобы считать $\tilde{\omega}$ и Ω постоянными, как это имеет место в эллиптическом движении, при вычислении возмущений первого порядка целесообразно учесть вековые изменения этих элементов, получающиеся из некоторых членов возмущающей функции. Это не нарушает линейного характера решения; по-прежнему мы можем рассматривать каждый член или группу членов возмущающей функции в отдельности. Однако прежде всего необходимо рассмотреть вековые члены.

6. Вековые члены. Если возмущающая функция ограничена членами

$$[R] = n'^2a^2\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 - \frac{3}{8}\gamma^2\right],$$

то уравнения (18) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}&\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right],\\ &\frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = +\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n},\\ &\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}.\end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$\begin{aligned}&a = a_0, \quad \bar{\varepsilon}_1 = -\frac{n'^2}{\bar{n}^2}\left(1 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^2\right)\bar{n}t + \varepsilon_{10},\\ &e = e_0, \quad \bar{\tilde{\omega}} = +\frac{3}{4}\frac{n'^2}{\bar{n}^2}\bar{n}t + \tilde{\omega}_0,\\ &\gamma = \gamma_0, \quad \bar{\Omega} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{\bar{n}^2}\bar{n}t + \Omega_0,\end{aligned}$$

где $\bar{n}$, a_0, e_0, γ_0, ε_{10}, $\tilde{\omega}_0$ и Ω_0 — постоянные. Черта над различными символами указывает среднее значение, освобожденное от периодических членов.

Тот факт, что ε_1 оказывается отрицательной линейной функцией времени, свидетельствует о том, что наблюденное среднее движение Луны меньше невозмущенного среднего движения, которое, согласно третьему закону Кеплера, должно соответствовать значению a_0 большой полуоси a. Этот вопрос рассматривается ниже в разд. 13 этой главы.

Результат вида $\bar{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}_1 t + \tilde{\omega}_0$ при положительном $\tilde{\omega}_1$ указывает на то, что перигей имеет прямое движение. Обычно применяется следующая форма записи:

$$\tilde{\bar{\omega}} = (1 - c)\bar{n}t + \tilde{\omega}_0, \tag{20}$$

так что среднее значение средней аномалии l получается по формуле

$$l = \bar{\lambda} - \tilde{\bar{\omega}} = c\bar{n}t + l_0, \tag{21}$$

где $\bar{\lambda}$, $\tilde{\bar{\omega}}$ — линейные функции времени, причем их не следует смешивать с оскулирующими λ, $\tilde{\omega}$, от которых они отличаются на сумму периодических членов. Аналогично $\bar{n}$ означает среднее значение среднего движения Луны.

Поскольку $\tilde{\omega}_1$ положительно, то $1 - c$ положительно и c меньше единицы. Поэтому среднее значение средней аномалии возрастает медленнее, чем среднее значение средней долготы, и аномалистический период больше сидерического периода.

Будет полезно ввести следующее обозначение:

$$m = n'/\bar{n},$$

которое для Луны приблизительно равно 0,0748013. Тогда приближенный результат, полученный для $\tilde{\omega}_1$, равен

$$\tilde{\omega}_1 = +\frac{3}{4} m^2\bar{n},$$

которому соответствует

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2.$$

Результат вида $\bar{\Omega} = \Omega_1 t + \Omega_0$ при отрицательном Ω_1 показывает, что восходящий узел лунной орбиты на эклиптике имеет обратное движение. Это выражение обычно приводится к следующему виду:

$$\bar{\Omega} = (1 - g)\bar{n}t + \Omega_0, \tag{22}$$

так что среднее значение аргумента широты F выражается формулой

$$F = \bar{\lambda} - \bar{\Omega} = g\bar{n}t + F_0. \tag{23}$$

Поскольку $1 - g$ отрицательно, то g больше единицы. Среднее значение аргумента широты возрастает быстрее, чем среднее значение средней долготы Луны, и драконический месяц короче сидерического месяца.

В планетной теории результаты, полученные этим методом для вековых членов в элементах $\tilde{\omega}$ и Ω, как правило, являются хорошим приближением к окончательным результатам. Это не имеет места в случае движения Луны, особенно для долготы перигея. Выполняя интегрирование методом последовательных приближений, мы находим

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{225}{32} m^3 - \frac{4071}{128} m^4 - \frac{265493}{2048} m^5 - \ldots, \tag{24}$$

$$g = 1 + \frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{32} m^3 - \frac{273}{128} m^4 - \frac{9797}{2048} m^5 - \ldots . \tag{25}$$

Кроме того, имеются члены, содержащие множителем e^2, e'^2, γ^2 и a/a'. Медленная сходимость рядов в теории движения Луны иллюстрируется табл. 1 и 2. Для сравнения приведены также отдельные члены для IV спутника Юпитера, для которого $m = 0{,}003851975$. Для этого спутника сходимость вполне удовлетворительна.

Таблица 1

Разложение главной части движения перицентра по степеням m

$$1-c=\frac{1}{n}\frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

	Луна, $m=0,07480\,13263$	IV спутник Юпитера, $m=0,00385\,1975$
$0,75000\ m^2$	$+0,00419\,64288$	$+0,00001\,10533$
$7,03125\ m^3$	$+\ 294\,27979$	$+\ 4019$
$31,804688\ m^4$	$+\ 99\,56996$	$+\ 70$
$129,63525\ m^5$	$+\ 30\,35775$	$+\ 1$
$521,7542\ m^6$	$+\ 9\,13949$	
$2159,841\ m^7$	$+\ 2\,83000$	
$10035,29\ m^8$	$+\ 98357$	
$47309,7\ m^9$	$+\ 34684$	
$1-c$	$+0,00857\,15028$	$+0,00001\,14623$
Точное значение $1-c$	$+0,00857\,25730$	

Ряд для движения перигея представляет только один пример медленной сходимости по степеням m; коэффициенты некоторых периодических членов в теории Луны являются причиной аналогичных затруднений.

Таблица 2

Разложение главной части движения узла по степеням m

$$1-g=\frac{1}{n}\frac{d\Omega}{dt}$$

	Луна	IV спутник Юпитера
$-0,75000\ m^2$	$-0,00419\,64288$	$-0,00001\,10533$
$+0,28125\ m^3$	$+\ 11\,77119$	$+\ 161$
$+2,132813\ m^4$	$+\ 6\,67713$	$+\ 5$
$+4,78369\ m^5$	$+\ 1\,12024$	
$+8,1084\ m^6$	$+\ 14203$	
$+11,288\ m^7$	$+\ 1479$	
$1-g$	$-0,00399\,91750$	$-0,00001\,10367$
Точное значение $1-g$	$-0,00399\,91645$	

7. **Главные периодические члены.** Как было установлено в предыдущем разделе, для того чтобы получить периодические члены в первом приближении, можно вместо a, e, γ воспользоваться постоянными a_0, e_0, γ_0, а в аргументах вместо λ, $\tilde{\omega}$, Ω подставить линейные функции времени $\tilde{\lambda}$, $\bar{\omega}$, $\tilde{\Omega}$. Для упрощения обозначений отбросим нижние индексы и горизонтальные черточки. Кроме того, следует иметь в виду, что всякий раз, когда встречается n, под ним необходимо понимать сидерическое среднее движение, которое предполагается постоянной величиной.

В результате интегрирования мы получим выражения для

$$\delta a,\ \delta e,\ \delta\gamma,\ \delta\lambda,\ \delta\tilde{\omega},\ \delta\Omega.$$

Члены самого низшего порядка в возмущениях полярных координат получаются из

$$\psi = \lambda + 2e\sin(\lambda - \tilde{\omega}),$$
$$r = a[1 - e\cos(\lambda - \tilde{\omega})],$$
$$\sin\beta = \gamma\sin(\psi - \Omega).$$

Они равны

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \delta\lambda + 2\sin(\lambda - \tilde{\omega})\,\delta e - 2\cos(\lambda - \tilde{\omega})\,e\delta\tilde{\omega},\\ \delta r &= \delta a - a\cos(\lambda - \tilde{\omega})\,\delta e - a\sin(\lambda - \tilde{\omega})\,e\delta\tilde{\omega},\\ \delta\beta &= \sin(\lambda - \Omega)\,\delta\gamma - \cos(\lambda - \Omega)\,\gamma\delta\Omega + \gamma\cos(\lambda - \Omega)\,\delta\psi.\end{aligned} \tag{26}$$

Член $\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,\delta\psi$ в $\delta\beta$, который получается из определенного члена в R, как показывают уравнения (18), будет на два порядка выше по γ, чем члены, обусловленные $\delta\gamma$ и $\gamma\delta\Omega$, возникающие из этого же члена. Поэтому в первом приближении можно отбросить третий член в $\delta\beta$.

8. Вариация. Рассмотрим сначала член

$$+\frac{3}{4}n'^2a^2\cos(2\lambda - 2\lambda').$$

Уравнения (18) и (19) дают

$$\frac{da}{dt} = -3\,\frac{n'^2}{n}\,a\sin(2\lambda - 2\lambda'), \qquad \frac{\delta a}{a} = +\frac{3n'^2}{n(2n - 2n')}\cos(2\lambda - 2\lambda'),$$
$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{dt^2} = +\frac{9}{2}\,n'^2\sin(2\lambda - 2\lambda'), \qquad (\delta\lambda) = -\frac{9}{2}\,\frac{n'^2}{(2n - 2n')^2}\sin(2\lambda - 2\lambda'),$$
$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -3\,\frac{n'^2}{n}\cos(2\lambda - 2\lambda'), \qquad \delta\varepsilon_1 = -\frac{3n'^2}{n(2n - 2n')}\sin(2\lambda - 2\lambda').$$

Результат для $\delta a/a$ можно написать в следующем виде:

$$\frac{\delta a}{a} = +\frac{3}{2}\,\frac{m^2}{1 - m}\cos(2\lambda - 2\lambda').$$

Множитель $(1 - m)^{-1}$ может быть заменен биномиальным разложением $1 + m + m^2 + \ldots$. С точностью до самого низшего порядка относительно m имеем

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{\delta a}{a} = +\frac{3}{2}\,m^2\cos(2\lambda - 2\lambda'), \tag{27a}$$

и аналогично

$$(\delta\lambda) = -\frac{9}{8}\,m^2\sin(2\lambda - 2\lambda'),$$
$$\delta\varepsilon_1 = -\frac{3}{2}\,m^2\sin(2\lambda - 2\lambda'),$$
$$\delta\psi = (\delta\lambda) + \delta\varepsilon_1 = -\frac{21}{8}\,m^2\sin(2\lambda - 2\lambda'). \tag{27б}$$

Это не единственные члены с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$, не зависящие от e, e', γ и имеющие множителем m^2, в δr и $\delta\psi$. Рассмотрим следующие члены в R:

$$n'^2a^2\left[-\frac{9}{4}e\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\frac{3}{4}e\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})\right].$$

Они дают

$$\frac{de}{dt}=-\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n}\sin(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\sin(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega}),$$

$$e\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega}),$$

$$\begin{aligned}\delta e&=+\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n[n-2n'+(1-c)n]}\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\\&+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n[3n-2n'-(1-c)n]}\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})=\\&=+\frac{9}{4}\frac{m^2}{1-2m+\frac{3}{4}m^2+\ldots}\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\\&+\frac{1}{4}\frac{m^2}{1-\frac{2}{3}m-\frac{1}{4}m^2+\ldots}\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})=\\&=+\frac{9}{4}m^2\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\frac{1}{4}m^2\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega}),\end{aligned}$$

если удерживаются только самые низшие степени относительно m. При помощи той же процедуры получаем

$$e\delta\tilde{\omega}=-\frac{9}{4}m^2\sin(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})+\frac{1}{4}m^2\sin(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega}).$$

Тогда, согласно уравнениям (26), находим

$$\begin{aligned}\delta\psi&=+\frac{9}{2}m^2\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})\sin(\lambda-\tilde{\omega})+\frac{1}{2}m^2\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})\sin(\lambda-\tilde{\omega})+\\&+\frac{9}{2}m^2\sin(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})\cos(\lambda-\tilde{\omega})-\frac{1}{2}m^2\sin(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})\cos(\lambda-\tilde{\omega})=\\&=+4m^2\sin(2\lambda-2\lambda'),\end{aligned}\tag{28а}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{a}&=-\frac{9}{4}m^2\cos(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})\cos(\lambda-\tilde{\omega})-\frac{1}{4}m^2\cos(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})\cos(\lambda-\tilde{\omega})+\\&+\frac{9}{4}m^2\sin(\lambda-2\lambda'+\tilde{\omega})\sin(\lambda-\tilde{\omega})-\frac{1}{4}m^2\sin(3\lambda-2\lambda'-\tilde{\omega})\sin(\lambda-\tilde{\omega})=\\&=-\frac{5}{2}m^2\cos(2\lambda-2\lambda').\end{aligned}\tag{28б}$$

Складывая результаты (27) и (28), получаем вариацию в первом приближении

$$\begin{aligned}\delta\psi&=+\frac{11}{8}m^2\sin(2\lambda-2\lambda'),\\\frac{\delta r}{a}&=\quad -m^2\cos(2\lambda-2\lambda').\end{aligned}\tag{29}$$

Этот вывод служит иллюстрацией того, каким образом члены возмущающей функции с различными аргументами могут быть объединены в члены с общим аргументом в $\delta\psi$ и $\delta r/a$. Главные члены, обусловленные возмущениями в λ и a, входят в $\delta\psi$ и $\delta r/a$ без изменения аргумента; возмущения в e и $\tilde{\omega}$ с аргументом A порождают главные возмущения в $\delta\psi$ и $\delta r/a$ с аргументом $A \pm (\lambda - \tilde{\omega})$.

Процесс дальнейших приближений к членам с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$ даст коэффициент в виде ряда по степеням m. С точностью до четвертой степени коэффициент в $\delta\psi$ равен

$$+\frac{11}{8}m^2 + \frac{59}{12}m^3 + \frac{893}{72}m^4 + \dots ,$$

Кроме того, в теорию, если стремиться к точности, сравнимой с лучшими наблюдениями, необходимо включить члены, содержащие e^2, e'^2, $(a/a')^2$, γ^2. Члены с аргументами $4\lambda - 4\lambda'$, $6\lambda - 6\lambda'$ можно в конечном счете рассматривать как вариационные неравенства.

Коэффициент члена с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$ в долготе Луны, согласно теории Брауна, равен $+39'29'',9$. Тем не менее вариация не была известна греческим астрономам, в том числе и Птолемею. Период вариации равен половине среднего синодического месяца; это неравенство обращается в нуль как в новолуние, так и в полнолуние, и поэтому не влияет на моменты солнечных и лунных затмений. Поскольку древние греки черпали большую часть своих сведений о лунной орбите из затмений, то это неравенство не могло быть ими обнаружено.

Из членов в R с аргументами $\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}$ и $3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}$ были получены только возмущения в e и $\tilde{\omega}$. Конечно, они порождают члены с теми же аргументами в a и λ. Легко видеть, что эти члены в δa и $\delta\lambda$ будут иметь множителем m^2e. Первый из этих аргументов известен как аргумент эвекции, однако члены в $\delta\psi$ и $\delta r/a$, которые получаются из этого члена посредством δa и $\delta\lambda$, менее значительны, чем члены, получаемые посредством δe и $\delta\tilde{\omega}$ из другого члена возмущающей функции, который мы сейчас рассмотрим.

9. Эвекция. Член в R_1

$$+\frac{15}{8}n'^2a^2e^2\cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega})$$

вызывает следующие возмущения:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}e\sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

$$\delta e = +\frac{15}{4}\frac{n'^2e}{n[2n' - 2(1-c)n]}\cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

$$e\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = +\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}e\cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

$$e\delta\tilde{\omega} = +\frac{15}{4}\frac{n'^2e}{n[2n' - 2(1-c)n]}\sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}).$$

Коэффициент, входящий в δe и $e\delta\tilde{\omega}$, можно написать в следующем виде:

$$\frac{15}{4}\frac{n'^2e}{2nn'\left(1 - \frac{3}{4}m\right)} = \frac{15}{8}\frac{me}{1 - \frac{3}{4}m} \sim \frac{15}{8}me.$$

Поэтому результаты первого приближения получаются в виде

$$\delta e = +\frac{15}{8}me\cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

$$e\delta\tilde{\omega} = +\frac{15}{8}me\sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

откуда при помощи (26) получаем

$$\begin{aligned} \delta\psi &= +\frac{15}{4} me \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}), \\ \frac{\delta r}{a} &= -\frac{15}{4} me \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}). \end{aligned} \tag{30}$$

Эвекция представляет собой самое большое периодическое возмущение в долготе Луны. Коэффициент члена с аргументом $\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}$ в $\delta\psi$, согласно теории Брауна, равен $+1^\circ 16' 26'',4$. Этот член был известен Гиппарху.

Значительность этого члена вызвана отсутствием кратности λ в аргументе $2\lambda' - 2\tilde{\omega}$ члена в возмущающей функции, который был нами рассмотрен. Поэтому делитель, вводимый при интегрировании, имеет множителем n', тогда как обычно для членов, содержащих кратность λ в аргументе, этим множителем является n. Делитель n' уменьшает общий множитель n'^2 возмущающей функции до величины n'. В результате получается член с множителем m, а не m^2.

В планетной теории имеется много примеров малых членов в возмущающей функции, которые порождают большие возмущения в долготе. Такими возмущениями в планетном движении являются долгопериодические возмущения в средней долготе. Они возникают из линейных комбинаций вида $p\lambda - q\lambda'$ средних долгот двух планет, для которых разность $pn - qn'$ мала по сравнению с n и n'. При интегрировании $(\delta\lambda)$ из

$$(\delta\lambda) = -\iint \frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \, dt \, dt$$

появляется квадрат малого делителя. Причина возникновения большого коэффициента при главном члене эвекции в долготе Луны несомненно иная, так как его значительность обусловлена отсутствием λ в аргументе члена в R, который порождает это возмущение.

Среднее движение аргумента $2\lambda' - 2\tilde{\omega}$ возмущений в e и $\tilde{\omega}$, которые порождают эвекцию, равно

$$[2m - 2(1-c)]\, n = 2\,(0{,}07480\,133 - 0{,}00857\,257)\, n = 0{,}13245\,752 n.$$

Поэтому, если принять сидерический месяц равным 27,321 661 суток, то период этого аргумента равен

$$\frac{27^d{,}32166\,1}{0{,}13245\,752} = 206{,}26735 \text{ суток.}$$

Среднее движение аргумента эвекции в долготе равно

$$[1 - 2m + (1-c)]\, n = (1 - 0{,}14960\,266 + 0{,}00857\,257)\, n = 0{,}85896\,991\, n.$$

Соответствующий период равен

$$\frac{27^d{,}321661}{0{,}85896\,991} = 31{,}80747 \text{ суток.}$$

Поэтому возмущение в эксцентриситете и долготе перигея с периодом около семи синодических месяцев порождает возущения в долготе и радиусе-векторе с периодом примерно на двое суток большим, чем средний синодический месяц.

10. Годичное неравенство. Аналогичное понижение порядка относительно m происходит при интегрировании члена

$$+\frac{3}{4}n'^2a^2e'\cos(\lambda'-\tilde{\omega}').$$

Мы получаем

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=-3\frac{n'^2}{n}e'\cos(\lambda'-\tilde{\omega}'),\qquad \delta\varepsilon_1=-3me'\sin(\lambda'-\tilde{\omega}'),$$

$$\delta\psi=-3me'\sin(\lambda'-\tilde{\omega}'). \tag{31}$$

Соответствующего члена в радиусе-векторе не существует.

Легко видеть, что следующие члены в (12):

$$n'^2a^2\left[-\frac{3}{4}ee'\cos(\lambda-\lambda'-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+\frac{9}{8}ee'\cos(\lambda-\lambda'+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')\right]$$

порождают посредством δe и $e\delta\tilde{\omega}$ члены с аргументом $\lambda'-\tilde{\omega}'$ в долготе и радиусе-векторе. В аргументах этих членов содержится λ; следовательно, здесь не происходит понижения порядка с m^2 до m. Поэтому члены, получающиеся в $\delta\psi$ и $\delta r/a$, имеют множителем m^2e' или на один порядок выше относительно m, чем главный член с аргументом $\lambda'-\tilde{\omega}'$, полученный выше. Его период равен аномалистическому году. Коэффициент члена с этим аргументом в долготе Луны равен $-11'8'',9$.

11. Параллактическое неравенство. Член в R

$$-\frac{15}{16}n'^2a^2\frac{a}{a'}e\cos(\lambda'-\tilde{\omega})$$

дает

$$\frac{de}{dt}=+\frac{15}{16}\frac{n'^2}{n}\frac{a}{a'}\sin(\lambda'-\tilde{\omega}),\qquad \delta e=-\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\cos(\lambda'-\tilde{\omega}),$$

$$e\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{15}{16}\frac{n'^2}{n}\frac{a}{a'}\cos(\lambda'-\tilde{\omega}),\qquad e\delta\tilde{\omega}=-\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\sin(\lambda'-\tilde{\omega}).$$

Из (26) находим

$$\delta\psi=-\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\sin(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\delta r}{a}=+\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\cos(\lambda-\lambda'). \tag{32}$$

Главный член в R_2

$$+\frac{3}{8}n'^2a^2\frac{a}{a'}\cos(\lambda-\lambda')$$

посредством δa, $(\delta\lambda)$ и $\delta\varepsilon_1$ породит в $\delta\psi$ и $\delta r/a$ члены с характеристикой m^2a/a'. Благодаря делителю n' и операции деления на e при интегрировании δe и $e\delta\tilde{\omega}$ член, который представляется менее значительным в возмущающей функции, производит возмущения в координатах, превосходящие по величине возмущения, которые вызываются значительно бо́льшим членом возмущающей функции.

Период параллактического неравенства равен среднему синодическому месяцу. Браун приводит для коэффициента в долготе Луны значение $-2'4'',8$. Если численное значение этого коэффициента определено из наблюдений, то можно найти значение a/a' или, точнее,

$$\frac{E-M}{E+M}\frac{a}{a'}$$

(см. разд. 3 этой главы). Эта величина определяет параллакс Солнца. Слабое место такого определения состоит в том, что получающиеся результаты трудно освободить от влияния систематических фазовых эффектов, так как период неравенства совпадает со средним синодическим месяцем. Из-за этой трудности указанный заманчивый метод не может конкурировать по точности с другим гравитационным методом — методом определения параллакса Солнца по значению массы Земли, полученному из возмущений, вызываемых Землей в движении малой планеты Эрос.

12. Главное возмущение в широте. Член в R

$$+\frac{3}{8}n'^2a^2\gamma^2\cos(2\lambda'-2\Omega)$$

дает

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\gamma\sin(2\lambda'-2\Omega);\qquad \delta\gamma=+\frac{3}{8}m\gamma\cos(2\lambda'-2\Omega),$$

$$\gamma\frac{d\Omega}{dt}=+\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\gamma\cos(2\lambda'-2\Omega),\qquad \gamma\delta\Omega=+\frac{3}{8}m\gamma\sin(2\lambda-2\Omega),$$

откуда согласно (26) возмущение в широте получается равным.

$$\delta\beta=+\frac{3}{8}m\gamma\sin(\lambda-2\lambda'+\Omega).\qquad(33)$$

Теория Брауна дает для коэффициента этого члена значение $+10'23'',7$. Из-за присутствия делителя $2n'$ этот член представляет собой наибольший член возмущений в широте Луны. Среднее движение аргумента равно

$$(1-2m+1-g)\,n=(1-0{,}14960\,266-0{,}00399\,916)\,n=0{,}84639\,818\,n.$$

Отсюда период равен

$$\frac{27^d{,}32166\,1}{0{,}84639\,818}=32{,}279915\text{ суток.}$$

13. Применение третьего закона Кеплера к спутниковым орбитам. Член в R_1

$$-\frac{1}{2}n'^2a^2e\cos(\lambda-\tilde{\omega})$$

дает

$$\frac{de}{dt}=+\frac{1}{2}\frac{n'^2}{n}\sin(\lambda-\tilde{\omega}),\qquad \delta e=-\frac{1}{2}m^2\cos(\lambda-\tilde{\omega}),$$

$$\frac{e\,d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{n'^2}{n}\cos(\lambda-\tilde{\omega}),\qquad e\delta\tilde{\omega}=-\frac{1}{2}m^2\sin(\lambda-\tilde{\omega}),\qquad(34)$$

$$\delta\psi=0,\qquad \frac{\delta r}{a}=+\frac{1}{2}m^2.$$

Этот результат вместе с вековым возмущением $d\varepsilon_1/dt=-m^2n$, полученным в разд. 6 этой главы, находит важное применение при определении массы планеты по размерам орбиты спутника.

Обычная процедура состоит в нахождении среднего движения как коэффициента при времени в линейной функции от t. Для этого необходимо вычесть из наблюденных долгот периодические члены — как эллиптические (соответствующие невозмущенному кеплерову движению), так и возмущения. Обозначим такое среднее движение через N. Аналогично из наблюденных радиусов-векторов вычитаются эллиптические члены и периодические возмущения. Пусть получающееся при этом среднее значение есть A.

Если n, a — среднее движение и большая полуось (причем последняя выражена в астрономических единицах), которые были бы применимы, если бы отсутствовали солнечные возмущения, то мы имели бы

$$n^2a^3 = k^2(m_p + m_s)$$

при условии, что k согласуется с единицей времени и угловой единицей, употребленными для n. Возмущение $\delta\,\varepsilon_1 = -m^2nt$ дает $N = n(1 - m^2)$; возмущение $\delta r = +\frac{1}{2}am^2$ дает $A = a\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right)$. Следовательно,

$$N^2A^3 = n^2a^3(1 - m^2)^2\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right)^3$$

или, если m есть малая величина,

$$N^2A^3 = k^2(m_p + m_s)\left(1 - \frac{1}{2}m^2\right).$$

Поэтому сумму масс главной планеты и спутника мы найдем из следующего соотношения:

$$k^2(m_p + m_s) = N^2A^3\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right). \tag{35}$$

Этот результат справедлив, если солнечные возмущения являются единственными возмущениями, которые необходимо рассматривать в движении спутника. В приложениях к галилеевым спутникам Юпитера или к спутникам Сатурна должны быть включены влияния, обусловленные сжатием главной планенты и притяжением со стороны остальных спутников, обращающихся относительно той же планеты. Они дают дополнительные члены к множителю $1 + \frac{1}{2}m^2$ зависящие от динамического сжатия планеты и от отношения больших полуосей возмущаемого и возмущающего спутников.

14. Члены без множителя m. В предыдущих разделах было приведено несколько примеров членов, в которых степень множителя m понижается с 2 до 1 посредством делителя n'. Понижение степени m на 2 происходит в члене

$$-\frac{15}{16}n'^2a^2\,\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')$$

в R_2. Мы получаем

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = +\frac{45}{8}\,\frac{n'^2}{n}\,\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'),\quad \delta\varepsilon_1 = +\frac{45}{8}\,\frac{n'^2}{n^2(1-c)}\,\frac{a}{a'}\,ee'\sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}).$$

Но $1 - c = +\frac{3}{4}m^2 + \ldots$, откуда

$$\delta\psi = \delta\varepsilon_1 = +\frac{15}{2}\,\frac{a}{a'}\,ee'\sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'). \tag{36}$$

Также имеем

$$\frac{de}{dt} = -\frac{15}{16}\frac{n'^2}{n}\frac{a}{a'}e'\sin(\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'),\quad \delta e = +\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'),$$

$$e\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{15}{16}\frac{n'^2}{n}\frac{a}{a'}e'\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'), e\delta\tilde{\omega} = -\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e'\sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'),$$

откуда

$$\delta\psi = +\frac{5}{2}\frac{a}{a'}e'\sin(\lambda - \tilde{\omega}'),\qquad \frac{\delta r}{a} = -\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e'\cos(\lambda - \tilde{\omega}). \tag{37}$$

Эти коэффициенты малы по сравнению с коэффициентами, например, годичного неравенства в силу малости отношения a/a'. Интересная особенность этих возмущений состоит в том, что из коэффициентов совершенно исчез множитель m^2. Это представляет несомненный парадокс: поскольку возмущающая функция, обусловленная притяжением Солнца, имеет множителем m^2, то все возмущения должны были бы обратиться в нуль, если бы обратилось в нуль m. Объяснение состоит в том, что произвольные постоянные могут быть выбраны так, чтобы члены, остающиеся при $m = 0$, свелись к членам эллиптического движения.

По существу тот же результат получается для аналогичных членов в планетной теории. Здесь возмущающая функция планеты с массой m, которая возмущается планетой массы m', имеет множителем m'. Движение $\tilde{\omega}$ содержит m' в качестве множителя. Поэтому интегрирование члена с аргументом $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ должно дать член, не зависящий от возмущающей массы. В обычной форме планетной теории эта проблема не возникает, поскольку такие члены разлагаются по степеням времени. В теории вековых возмущений они рассматриваются одновременно с вековыми членами; после интегрирования получаются члены, имеющие множителем произвольную постоянную, а не возмущающую массу.

15. Дальнейшие приближения. Как было отмечено выше, метод, применяемый для определения возмущений в элементах в первом приближении, дает результаты, которые совершенно достаточны для изучения спутниковых систем с малыми значениями отношения n'/n. Для Луны и для внешних спутников Юпитера и Сатурна возмущений первого порядка недостаточно для удовлетворительного представления наблюдаемых движений. Для задач такого рода решение следовало бы провести путем многочисленных последовательных приближений. Если эти дальнейшие приближения не предпринимаются в систематически упорядоченной последовательности, то задача представляется безнадежно сложной.

Метод использования канонических переменных дает возможность действовать систематически посредством ряда последовательных канонических преобразований. Фактически это было проделано Делонэ для основной задачи теории Луны. Решение Делонэ представляет собой наиболее совершенное аналитическое решение этой проблемы. Принципы его метода объясняются в гл. XVII.

Теория Делонэ подтверждает предположение, к которому приводит знакомство с первым приближением, что элементы могут быть выражены в следующем виде:

$a = a_0 +$ косинусоидальные члены,

$e = e_0 +$ косинусоидальные члены,

$\gamma = \gamma_0 +$ косинусоидальные члены,

$\lambda = nt + \varepsilon_0 +$ синусоидальные члены $= \bar{\lambda} +$ синусоидальные члены,

$\tilde{\omega} = (1-c)\,nt + \tilde{\omega}_0 +$ синусоидальные члены $= \bar{\tilde{\omega}} +$ синусоидальные члены,

$\Omega = (1-g)\,nt + \Omega_0 +$ синусоидальные члены $= \bar{\Omega} +$ синусоидальные члены.

Символы a_0, e_0, γ_0, ε_0, $\tilde{\omega}_0$, Ω_0 означают произвольные постоянные, тогда как n, также будучи постоянной, означает среднее сидерическое движение Луны. Значения c и g должны быть получены из теории как функции от $m = n'/n$, e^2, e'^2, a_0/a' и γ_0^2. Штрихованные величины представляют элементы орбиты Солнца, рассматриваемые как постоянные. Если $\lambda' = n't + \varepsilon'$ есть средняя долгота Солнца, то аргументы периодических членов могут быть выражены в следующей форме:

$$p_1(\bar{\lambda} - \lambda') + p_2(\bar{\lambda} - \bar{\tilde{\omega}}) + p_3(\lambda' - \tilde{\omega}') + p_4(\bar{\lambda} - \bar{\Omega}),$$

или, в обозначениях Делонэ,

$$p_1 D + p_2 l + p_3 l' + p_4 F.$$

Коэффициенты периодических членов получаются в виде степенных рядов, расположенных по степеням m, e_0^2, e'^2, γ_0^2, $(a_0/a')^2$. С точностью до числового множителя главный член коэффициента любого периодического члена равен

$$m^{q_1} e_0^{q_2} e'^{q_3} \left(\frac{a_0}{a'}\right)^{q_4} \gamma_0^{q_5}.$$

В ходе интегрирования может понизиться порядок относительно m, но это не произойдет с порядками относительно e_0, e', a_0/a' или γ_0. Поэтому в выражениях для элементов сохраняется связь между показателями степени q главного коэффициента и кратностями p в аргументе, аналогичная связи, имеющей место для членов возмущающей функции. Следует учитывать это понижение порядка относительно e в правых частях уравнений (18) для de/dt и $d\tilde{\omega}/dt$ и относительно γ в правых частях уравнений (18) для $d\gamma/dt$ и $d\Omega/dt$.

Наконец, сферические координаты Луны получаются в следующей форме:

$$\psi = nt + \text{const} + \\ + \sum A \sin\,[p_1 D + p_2 l + p_3 l' + 2p_4 F],$$

$$\beta = \sum B \sin\,[p_1 D + p_2 l + p_3 l' + (2p_4 + 1) F],$$

$$\frac{a}{r} = \text{const} + \\ + \sum C \cos\,[p_1 D + p_2 l + p_3 l' + 2p_4 F]$$

соответственно для истинных эклиптической долготы, широты и параллакса. Здесь были использованы те же обозначения для коэффициентов $p_1, \ldots, p_4$, что и в аргументах возмущающей функции в разд. 4 этой главы. Коэффициенты A, B, C получаются в виде степенных рядов по m, e, e', γ и a/a'. Между степенями параметров e, e', γ, a/a'

и коэффициентами p_1, p_2, p_3, p_4 соответственно существует в точности такая же связь, как и в возмущающей функции. Как было отмечено в случаях, рассмотренных в разд. 9—14, наименьшая степень параметра m, встречающаяся в коэффициентах в качестве множителя, обычно равна 2; этот порядок может быть понижен до 1, если $p_1 = 0$, и до 0, если $p_1 = p_3 = 0$. Отрицательные степени m не встречаются.

В теории движения Луны по соображениям, связанным с наблюдениями, обычно определяют лунный параллакс, а не радиус-вектор. С другой стороны, также по причинам, обусловленным наблюдениями, в теориях остальных спутников определяется радиус-вектор.

16. Комментарии к теориям Делонэ и Ганзена. Главным недостатком метода Делонэ является медленная сходимость разложений коэффициентов по степеням отношения $m = n'/n$. Что же касается параметров e, e', γ и a/a', то сходимость разложений по степеням этих параметров, как правило, удовлетворительна. Особенно наглядный пример медленной сходимости по степеням m представляет собой главная часть движения перигея, однако многие периодические члены также обладают коэффициентами, которые сходятся столь же медленно. Этот же упрек относится, конечно, ко всем остальным методам, в которых результаты получаются в виде буквенных разложений по степеням m. Хилл заметил, что в случае движения перигея сходимость улучшается, если разложение ведется по степеням величины $\mathfrak{m} = m/(1-m)$, но это не устраняет указанную трудность полностью.

Преимущество сохранения m или $\mathfrak{m}$ в буквенном виде состоит в том, что решение основной проблемы может быть использовано для получения солнечных возмущений в движении любого спутника при помощи подстановки соответствующих значений постоянных. Поэтому решение Делонэ применялось для получения солнечных возмущений для спутников, как, например, для VI и VII спутников Юпитера и спутника Сатурна Фебы. Для этих спутников значения n'/n того же порядка, что и для Луны. С другой стороны, e и γ значительно больше, чем соответствующие постоянные для орбиты Луны. Ввиду того что для представления планетоцентрического движения этих спутников требуется гораздо меньшая точность, чем для Луны, представление при помощи теории Делонэ в общем достаточно для таких приложений.

Более трудным является применение метода Делонэ к орбитам VIII, IX и XI спутников Юпитера, для которых отношение n'/n приблизительно вдвое больше, чем для Луны; кроме того, значительно большими являются значения e и γ. Сходимость рядов, расположенных по степеням n'/n, для движения перицентра и для коэффициентов большинства периодических членов чрезвычайно медленна. Только путем эмпирической экстраполяции рядов Делонэ представляется возможным получить некоторые полезные результаты[1]).

Влияние медленной сходимости разложений по степеням n'/n было преодолено в теории Ганзена движения Луны введением с самого начала численных значений для всех параметров, которые входят в основную задачу. Таблицы, основанные на теории Ганзена, были введены для вычисления эфемериды Луны в астрономических ежегод-

[1]) E. W. Brown, Astron. J., 35, 1 (1923).

никах в 1862 г. Улучшение по сравнению с предшествующими теориями было огромным; тем не менее представляется сомнительным, является ли метод Ганзена особенно подходящим для лунной проблемы Этот метод представляет собой приспособление планетного метода Ганзена, достоинства которого для определения взаимных возмущений планет получили общее признание, однако для лунной проблемы это приспособление до некоторой степени является просто ловким трюком. Прекрасные результаты, полученные Ганзеном при помощи его теории движения Луны, следует скорее отнести за счет исключительных способностей самого Ганзена, чем приписать высокому качеству избранного им метода.

17. Вводные замечания к работе Хилла «Researches in the Lunar Theory». Новый подход к решению лунной проблемы был сделан Хиллом, который избрал путь вычисления солнечных возмущений в движении Луны в прямоугольных координатах, вращающихся равномерно с угловой скоростью, равной среднему движению Солнца. Имеется некоторое сходство между методом Хилла и методом Эйлера в его второй теории Луны, опубликованной в 1772 г., однако Эйлер использовал систему координат, вращающуюся со средней угловой скоростью Луны.

Значительные преимущества вычисления возмущений в координатах, а не в элементах, заключаются в следующем:

1. Разложение возмущающей функции по элементам становится ненужным.

2. Возмущения получаются в форме, более пригодной для непосредственного применения к вычислениям эфемерид. Если используются прямоугольные координаты, то в конце вычислений производится преобразование к полярным координатам, но это представляет собой небольшую задачу по сравнению с тем общим количеством труда, с которым связано построение теории движения Луны.

Хилл выбирает прямоугольные координаты, а не полярные, так как дифференциальные уравнения в этом случае выражаются в чисто алгебраическом виде. Если используются полярные координаты, то почти немедленно появляются тригонометрические функции. Хилл также замечает, что в эллиптическом движении прямоугольные координаты выражаются через среднюю аномалию гораздо более простыми рядами, чем полярные координаты. Затем он продолжает: «Если это верно в эллиптической теории, то насколько более вероятной является справеливость аналогичного факта в том случае, когда сложность проблемы увеличивается вследствие рассмотрения возмущающих сил?»

Важная особенность метода Хилла состоит в том, что его применение начинается с получения тех возмущений в движении Луны, которые зависят только от отношения n'/n. Чтобы получить дифференциальные уравнения, которые определяют эти возмущения, вводятся следующие упрощения первоначальных уравнений:

а) Возмущающая функция ограничивается частью R_1, что равносильно отбрасыванию тех членов R, которые содержат множителем отношение a/a' и его более высокие степени.

б) Третья координата z положена равной нулю. Поэтому все члены, имеющие множителем синус наклонности орбиты Луны γ, отбрасываются.

в) Орбита Солнца относительно центра масс системы Земля — Луна считается круговой. Поэтому исключаются члены, содержащие множителем эксцентриситет орбиты Солнца.

Уравнения, которые получаются после таких упрощений, должны дать возможность определить все члены в движении Луны, зависящие от обоих параметров $m = n'/n$ и e. Исключение членов, зависящих от e, может быть осуществлено лишь разысканием некоторого частного решения этих дифференциальных уравнений. Это частное решение является периодическим решением; оно представляет собой основу метода Хилла.

18. Уравнения Хилла для движения Луны. Если введены упрощения, перечисленные в пунктах (а), (б) и (в), то из уравнений (1) и (8) в прямоугольной системе координат с началом в центре Земли и неподвижными осями вытекают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial y}, \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= k^2(E+M), \\ R_1 &= n'^2r^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Плоскость xy совпадает с плоскостью эклиптики, считаемой неподвижной.

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью n', с осью X, постоянно направленной в сторону Солнца, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} - 2n'\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n'\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Y}, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$F = \frac{\mu}{r} + \frac{n'^2}{2}(X^2+Y^2) + R_1. \tag{40a}$$

В такой вращающейся системе координат $r\cos S = X$; следовательно,

$$\begin{aligned} R_1 &= n'^2\left(-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{3}{2}X^2\right) = \\ &= n'^2\left(+X^2 - \frac{1}{2}Y^2\right), \\ F &= \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2}n'^2X^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Поэтому уравнения можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} - 2n'\frac{dY}{dt} + \frac{\mu X}{r^3} - 3n'^2X &= 0, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n'\frac{dX}{dt} + \frac{\mu Y}{r^3} \qquad\quad &= 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Эти уравнения в высшей степени просты; тем не менее их общее решение содержит все те члены в решении основной задачи теории Луны, которые зависят от m и e.

Чтобы получить решение, которое зависит только от m, предположим, что начальные условия при $t=0$ имеют вид

$$X(0)=a, \quad \dot{X}(0)=0,$$
$$Y(0)=0, \quad \dot{Y}(0)=b;$$

т. е. при $t=0$ Луна находится в соединении с Солнцем и во вращающейся системе координат имеет скорость, перпендикулярную к прямой, соединяющей Землю и Солнце. Если теперь переменить знаки Y и t на обратные, оставляя неизменным знак X, то дифференциальные уравнения остаются без изменения. Поэтому в решении с указанными начальными условиями X будет четной функцией от t, а Y — нечетной функцией от t. Эти дифференциальные уравнения также не изменяются, если переменить знаки X и t на обратные, оставляя неизменным знак Y. Поэтому, если при данных начальных значениях орбита должна пересекать ось Y под прямым углом, то она должна быть замкнутой кривой во вращающейся системе координат и симметричной относительно обеих осей. Это частное решение называется вариационной орбитой или вариационной кривой.

Пуанкаре показал, что такие решения вообще существуют, так что для любого заданного значения $X(0)=a$ можно найти значение $\dot{Y}(0)=b$, которое дает периодическое решение указанного типа. В орбите такого рода, если $P=2\pi/\nu$ — период, выражения для X и Y будут с необходимостью иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= A_0 \cos\nu(t-t_0)+A_1\cos 3\nu(t-t_0)+A_2\cos 5\nu(t-t_0)+\ldots, \\ Y &= B_0 \sin\nu(t-t_0)+B_1\sin 3\nu(t-t_0)+B_2\sin 5\nu(t-t_0)+\ldots, \end{aligned} \tag{43}$$

где t_0 — момент соединения Луны и Солнца. В эти выражения входят только нечетные кратности угла $\nu(t-t_0)$, чтобы удовлетворить условиям вида

$$X_{\nu(t-t_0)=\pi} = -X_{\nu(t-t_0)=0},$$
$$Y_{\nu(t-t_0)=3\pi/2} = -Y_{\nu(t-t_0)=\pi/2}.$$

Период $P=2\pi/\nu$ должен равняться среднему синодическому периоду обращения Луны относительно Солнца. Следовательно,

$$\nu = n-n'.$$

Выбирая теперь $\nu(t-t_0)=\tau$ в качестве независимой переменной и полагая

$$\mathfrak{m}=\frac{n'}{n-n'},$$

приводим уравнения к следующему виду:

$$\frac{d^2X}{d\tau^2}-2\mathfrak{m}\frac{dY}{d\tau}+\left(\frac{\varkappa}{r^3}-3\mathfrak{m}^2\right)X=0, \tag{44а}$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2}+2\mathfrak{m}\frac{dX}{d\tau}+\frac{\varkappa}{r^3}Y=0, \tag{44б}$$

в которых

$$\varkappa=\frac{\mu}{\nu^2}=\frac{\mu}{(n-n')^2}.$$

Уравнения (40) с F, определяемой формулой (40а), имеют ту же форму, что и уравнения для ограниченной задачи трех тел. Поскольку F является функцией только от X и Y, то эти уравнения обладают интегралом Якоби, получаемым умножением уравнений (40) соответственно на dX/dt, dY/dt и последующим сложением и интегрированием. Поэтому интеграл Якоби для уравнений (40) равен

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2\right]-F=C', \tag{45}$$

где C' — постоянная интегрирования. В применении к уравнениям (42) этот интеграл принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}-\frac{3}{2}n'^2X^2=C', \tag{46}$$

тогда как уравнения (44) дают

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right]-\frac{\varkappa}{r}-\frac{3}{2}\mathfrak{m}^2X^2=C, \tag{47}$$

где $C'=\nu^2C$.

Численное решение, соответствующее данным значениям $\mathfrak{m}$ и $\varkappa$, можно получить последовательными пробами при численном интегрировании уравнений (44). Однако представляет интерес получить решение, в котором параметр $\mathfrak{m}$ сохраняется в буквенном виде. Присутствие членов с множителем $\varkappa r^{-3}$ составляет главную трудность этой задачи, но при помощи интеграла Якоби эти члены могут быть исключены. Результат этого исключения получается в виде следующих двух уравнений:

$$X\frac{d^2X}{d\tau^2}+Y\frac{d^2Y}{d\tau^2}-2\mathfrak{m}\left(X\frac{dY}{d\tau}-Y\frac{dX}{d\tau}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right]-\frac{9}{2}\mathfrak{m}^2X^2=C, \tag{48а}$$

$$Y\frac{d^2X}{d\tau^2}-X\frac{d^2Y}{d\tau^2}-2\mathfrak{m}\left(X\frac{dX}{d\tau}+Y\frac{dY}{d\tau}\right)-3\mathfrak{m}^2XY=0. \tag{48б}$$

Первое из этих уравнений имеет вид (44а) $X+$(44б) $Y+$(47), а второе — (44а) $Y-$(44б) X.

Уравнения (48) не совсем равносильны уравнениям (44), поскольку исчез параметр $\varkappa$. Однако эти новые уравнения однородны, если не обращать внимания на присутствие C в правой части уравнения (48а). Поэтому, если $X(\tau)$, $Y(\tau)$ есть решение при $C=C_0$, то $\lambda X(\tau)$, $\lambda Y(\tau)$ при произвольном λ будет решением при $C=\lambda^2C_0$. Поэтому соответствующая процедура состоит в получении периодического решения уравнений (48) для любого подходящего значения C и в использовании затем любого из трех уравнений (44а), (44б) или (47) для определения численного значения λ для конкретной спутниковой проблемы. Это равносильно утверждению, что для любого наперед заданного значения параметра $\mathfrak{m}$ все сведения об этом периодическом решении, за исключением размеров орбиты, получаются из уравнения (48). Чтобы определить размеры, необходимо прибегнуть к помощи уравнения, содержащего $\varkappa$.

19. Введение u и s. Как и во многих задачах, в которых используются тригонометрические ряды, удобнее пользоваться показательными функциями. Поэтому, обозначая через i мнимую единицу, положим

$$u = X + iY, \quad s = X - iY,$$

или

$$X = \frac{u+s}{2}, \quad Y = \frac{u-s}{2i},$$

и

$$D = \frac{d}{id\tau}.$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$X^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2us + s^2), \qquad Y^2 = -\frac{1}{4}(u^2 - 2us + s^2),$$

$$X^2 + Y^2 = us, \qquad XY = -\frac{i}{4}(u^2 - s^2),$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{i}{2} D(u+s), \qquad \frac{dY}{d\tau} = \frac{1}{2} D(u-s),$$

$$X\frac{dX}{d\tau} + Y\frac{dY}{d\tau} = \frac{i}{2}(sDu + uDs), \qquad X\frac{dY}{d\tau} - Y\frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{2}(sDu - uDs),$$

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = -DuDs,$$

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}D^2(u+s), \qquad \frac{d^2Y}{d\tau^2} = \frac{i}{2}D^2(u-s),$$

$$X\frac{d^2X}{d\tau^2} + Y\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}(sD^2u + uD^2s), \qquad X\frac{d^2Y}{d\tau^2} - Y\frac{d^2X}{d\tau^2} = \frac{i}{2}(sD^2u - uD^2s).$$

Тогда уравнения (48) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(sD^2u + uD^2s) + \mathfrak{m}(sDu - uDs) + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{8}\mathfrak{m}^2(u^2 + 2us + s^2) = -C, \\ &\frac{1}{2}(sD^2u - uD^2s) + \mathfrak{m}(sDu + uDs) - \frac{3}{4}\mathfrak{m}^2(u^2 - s^2) = 0. \end{aligned} \tag{49а}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, мы получаем

$$\begin{aligned} sD^2u + 2\mathfrak{m}sDu + \frac{1}{2}Du\,Ds + \frac{9}{4}\mathfrak{m}^2us &= -\frac{1}{8}\mathfrak{m}^2(3u^2 + 15s^2) - C, \\ uD^2s - 2\mathfrak{m}uDs + \frac{1}{2}Du\,Ds + \frac{9}{4}\mathfrak{m}^2us &= -\frac{1}{8}\mathfrak{m}^2(15u^2 + 3s^2) - C. \end{aligned} \tag{49б}$$

Уравнения (44) и интеграл Якоби, выраженные через u, s и D, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^2u + 2\mathfrak{m}Du - \varkappa u^{-1/2}s^{-3/2} + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(u+s) = 0, \\ D^2s - 2\mathfrak{m}Ds - \varkappa u^{-3/2}s^{-1/2} + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(u+s) = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\frac{1}{2}Du\,Ds + \varkappa u^{-1/2}s^{-1/2} + \frac{3}{8}\mathfrak{m}^2(u+s)^2 = -C. \tag{51}$$

Введем

$$\exp i\tau = \zeta$$

и заметим, что

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta},$$

$$D\zeta^k = \frac{d}{id\tau} \exp ki\tau = k\zeta^k.$$

Введение D исключило мнимую единицу из уравнений (49) и (50), а также из интеграла Якоби (51); D также является особо удобным в качестве дифференциального оператора, действующего на степенные ряды, выраженные через положительные и отрицательные степени ζ.

Мы ищем решение уравнений (49) в следующем виде:

$$u = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{2j+1},$$

$$s = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{-2j-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{-j-1} \zeta^{2j+1}, \tag{52}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} X &= \frac{u+s}{2} = (a_0 + a_{-1}) \cos \tau + (a_1 + a_{-2}) \cos 3\tau + (a_2 + a_{-3}) \cos 5\tau + \ldots, \\ Y &= \frac{u-s}{2i} = (a_0 - a_{-1}) \sin \tau + (a_1 - a_{-2}) \sin 3\tau + (a_2 - a_{-3}) \sin 5\tau + \ldots . \end{aligned} \tag{53}$$

Сравнение с выражениями (43) немедленно доказывает эквивалентность разложений (43) и (52).

20. Решение относительно u и s по степеням $\mathfrak{m}$. В изложении работы Хилла, данном Пуанкаре, уравнения (49) записываются в виде

$$\begin{aligned} sD^2u + 2ps\,Du + \frac{1}{2}\,Du\,Ds + \frac{9}{4}\,p^2us &= -\frac{1}{8}\,\mathfrak{m}^2(3u^2 + 15s^2) - C, \\ uD^2s - 2pu\,Ds + \frac{1}{2}\,Du\,Ds + \frac{9}{4}\,p^2us &= -\frac{1}{8}\,\mathfrak{m}^2(15u^2 + 3s^2) - C, \end{aligned} \tag{54}$$

т. е. в левой части $\mathfrak{m}$ заменено на p. Поскольку в уравнения входит только квадрат параметра $\mathfrak{m}$, мы можем предполагать, что решение уравнений (54) будет разложено по степеням $\mathfrak{m}^2$; в окончательном результате необходимо p заменить на $\mathfrak{m}$.

Искомое решение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= (u_0 + u_1\mathfrak{m}^2 + \ldots + u_q\mathfrak{m}^{2q} + \ldots)\,\zeta \equiv U\zeta, \\ s &= (s_0 + s_1\mathfrak{m}^2 + \ldots + s_q\mathfrak{m}^{2q} + \ldots)\,\zeta^{-1} \equiv S\zeta^{-1}, \\ C &= C_0 + C_1\mathfrak{m}^2 + \ldots + C_q\mathfrak{m}^{2q} + \ldots . \end{aligned} \tag{55}$$

Подстановка в уравнения (54) дает

$$\begin{aligned} &SD^2U + \frac{1}{2}\,DUDS + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)SDU + \frac{1}{2}\,UDS + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}\,p^2\right)US = \\ &\qquad = -\frac{\mathfrak{m}^2}{8}(3U^2\zeta^2 + 15S^2\zeta^{-2}) - C, \\ &UD^2S + \frac{1}{2}\,DU\,DS - \frac{1}{2}\,SDU - \left(\frac{3}{2} + 2p\right)UDS + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}\,p^2\right)US = \\ &\qquad = -\frac{\mathfrak{m}^2}{8}\,(15U^2\zeta^2 + 3S^2\zeta^{-2}) - C. \end{aligned} \tag{56}$$

Теперь процедура состоит в подстановке вместо U и S рядов (55) по степеням $\mathfrak{m}^2$ и в последовательном приравнивании членов, имеющих $\mathfrak{m}^0$, $\mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}^4$, ... множителем. Ввиду того что u и s являются комплексными сопряженными величинами, таковыми также будут U, S и u_0, s_0, u_1, s_1 и т. д.

Члены, содержащие множителем $\mathfrak{m}^0$, дают из любого из двух уравнений (56)

$$C_0 = -\left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right) u_0 s_0.$$

Однако можно положить $u_0 = s_0 = +1$. При этом предположении

$$C_0 = -\frac{1}{2} - 2p - \frac{9}{4}p^2.$$

Далее мы полагаем

$$U = 1 + \mathfrak{m}^2 u_1, \quad S = 1 + \mathfrak{m}^2 s_1$$

и удерживаем только те члены в левых и правых частях уравнений (56), которые имеют множителем $\mathfrak{m}^2$. В результате получаются уравнения вида

$$\begin{aligned} D^2u_1 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Du_1 + \frac{1}{2} Ds_1 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right)(u_1 + s_1) &= \\ = -\frac{3}{8}\zeta^2 - \frac{15}{8}\zeta^{-2}&, \\ D^2s_1 - \frac{1}{2} Du_1 - \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Ds_1 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right)(u_1 + s_1) &= \\ = -\frac{15}{8}\zeta^2 - \frac{3}{8}\zeta^{-2}&. \end{aligned} \tag{57}$$

Нам необходимо только частное решение

$$u_1 = \xi_1\zeta^2 + \eta_1\zeta^{-2}, \quad s_1 = \eta_1\zeta^2 + \xi_1\zeta^{-2} \tag{58}$$

этих уравнений. Очевидно также, что $C_1 = 0$.

Прежде чем заняться вычислением ξ_1 и η_1 как функций от p, целесообразно рассмотреть составление уравнений для следующего шага в этой процедуре. Мы должны в таком случае подставить в (56)

$$U = 1 + \mathfrak{m}^2 u_1 + \mathfrak{m}^4 u_2, \quad S = 1 + \mathfrak{m}^2 s_1 + \mathfrak{m}^4 s_2$$

и собрать те члены, которые имеют множителем $\mathfrak{m}^4$. Вместе с тем очевидно, что u_2 и s_2 войдут точно таким же образом, каким u_1 и s_1 входят в левые части уравнений (57). Остальные члены в левой части состоят из произведений функций u_1, s_1 и их первых и вторых производных. Эти величины становятся известными функциями от ζ и переносятся в правую сторону, объединяясь с членами правых частей уравнений (56), содержащими множитель $\mathfrak{m}^4$. Уравнения для u_2 и s_2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^2u_2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Du_2 + \frac{1}{2} Ds_2 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right)(u_2 + s_2) = \\ = -\Big[s_1D^2u_1 + \frac{1}{2} Du_1\, Ds_1 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) s_1\, Du_1 + \frac{1}{2} u_1\, Ds_1 + \\ + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right) u_1 s_1 \Big] - \frac{3}{4} u_1\zeta^2 - \frac{15}{4} s_1\zeta^{-2} - C_2, \end{aligned} \tag{59}$$

$$D^2s_2-\frac{1}{2}Du_2-\left(\frac{3}{2}+2p\right)Ds_2+\left(\frac{1}{2}+2p+\frac{9}{4}p^2\right)(u_2+s_2)=$$
$$=-\left[u_1D^2s_1+\frac{1}{2}Du_1\,Ds_1-\frac{1}{2}s_1\,Du_1-\left(\frac{3}{2}+2p\right)u_1\,Ds_1+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}+2p+\frac{9}{4}p^2\right)u_1s_1\right]-\frac{15}{4}u_1\zeta^2-\frac{3}{4}\,s_1\zeta^{-2}-C_2.$$

Ввиду характера функций u_1, s_1, определяемых выражениями (58), правые части уравнений (59) должны быть вида

$$\alpha_4\zeta^4+\alpha_0\zeta^0+\alpha_{-4}\zeta^{-4}-C_2,$$
$$\alpha_{-4}\zeta^4+\alpha_0\zeta^0+\alpha_4\zeta^{-4}-C_2,$$

где α_4, α_0, α_{-4} являются известными функциями от p, как только определены u_1, s_1.

Имеются две возможности для определения постоянных членов в правых частях уравнений (59). Мы можем положить $C_2=0$ и вычислить члены в u_2, s_2, имеющие множителем ζ^0, из уравнения

$$\left(\frac{1}{2}+2p+\frac{9}{4}p^2\right)(u_2+s_2)_0=\alpha_0,\quad (u_2)_0=(s_2)_0, \tag{60}$$

или же мы можем положить $(u_2)_0=(s_2)_0=0$ и вычислить C_2 из

$$C_2=\alpha_0.$$

Хилл выбирает последнюю возможность; это относится и ко всем дальнейшим приближениям.

Теперь ясно, какую форму будут иметь уравнения при дальнейших приближениях. Левые части будут одинаковы во всех приближениях. Что же касается членов в правых частях этих уравнений, то они представляют собой следующие степени ζ:

Члены с $\mathfrak{m}^0$				ζ^0			
Члены с $\mathfrak{m}^2$			ζ^2		ζ^{-2}		
Члены с $\mathfrak{m}^4$		ζ^4		ζ^0		ζ^{-4}	
Члены с $\mathfrak{m}^6$	ζ^6		ζ^2		ζ^{-2}		ζ^{-6}

Этот процесс можно продолжать неограниченно. Члены, известные из предшествующих приближений и перенесенные в правые части, неизбежно становятся все сложнее по мере того, как мы переходим к более высоким степеням $\mathfrak{m}^2$, однако этот процесс быстро сходится для достаточно малых значений $\mathfrak{m}$.

21. Результаты для вариационной орбиты. Из предыдущего рассмотрения очевидно, что на любом шаге этой процедуры мы должны будем получить частные решения следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$D^2u_q+\left(\frac{3}{2}+2p\right)Du_q+\frac{1}{2}Ds_q+\left(\frac{1}{2}+2p+\frac{9}{4}p^2\right)(u_q+s_q)=$$
$$=\sum_k(\alpha_k\zeta^{2k}+\beta_k\zeta^{-2k}), \tag{61}$$
$$D^2s_q-\frac{1}{2}Du_q-\left(\frac{3}{2}+2p\right)Ds_q+\left(\frac{1}{2}+2p+\frac{9}{4}p^2\right)(u_q+s_q)=$$
$$=\sum_k(\beta_k\zeta^{2k}+\alpha_k\zeta^{-2k})$$

а виде

$$u_q = \sum_k (\xi_k \zeta^{2k} + \eta_k \zeta^{-2k}), \quad s_q = \sum_k (\eta_k \zeta^{2k} + \xi_k \zeta^{-2k}), \tag{62}$$

где ξ_k, η_k необходимо определить как функции от p. Далее, было установлено, что для любого значения q значение k не больше q и что вместе с нечетными значениями k входят только нечетные значения q, а четные значения k — вместе с четными значениями q. Частный случай $k=0$ уже был исключен из рассмотрения. Наконец, поскольку уравнения линейны, то решение уравнений (61) можно рассматривать отдельно для каждого значения k.

Поэтому мы подставляем единственную пару членов

$$\xi_k \zeta^{2k} + \eta_k \zeta^{-2k} \text{ вместо } u_q,$$
$$\eta_k \zeta^{2k} + \xi_k \zeta^{-2k} \text{ вместо } s_q$$

в уравнения (61) и приравниваем коэффициенты при ζ^{2k} и ζ^{-2k}. Ввиду того что u_q и s_q — сопряженные комплексные величины, достаточно любого из этих двух уравнений. Отсюда следует

$$\begin{aligned}
&\left[4k^2 + 2k\left(\frac{3}{2} + 2p\right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right]\xi_k + \left[k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right]\eta_k = \alpha_k,\\
&\left[-k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right]\xi_k + \left[4k^2 - 2k\left(\frac{3}{2} + 2p\right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right]\eta_k = \beta_k,
\end{aligned} \tag{63}$$

или

$$\begin{aligned}
A(k)\,\xi_k + B(k)\,\eta_k &= \alpha_k,\\
B(-k)\,\xi_k + A(-k)\,\eta_k &= \beta_k,
\end{aligned} \tag{64}$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned}
A(k) &= 4k^2 + 2k\left(\frac{3}{2} + 2p\right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2,\\
B(k) &= k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2.
\end{aligned} \tag{65}$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\xi_k &= \frac{A(-k)}{\Delta}\alpha_k - \frac{B(k)}{\Delta}\beta_k,\\
\eta_k &= \frac{-B(-k)}{\Delta}\alpha_k + \frac{A(k)}{\Delta}\beta_k,
\end{aligned} \tag{66}$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов. Если мы положим

$$P = \frac{3}{2} + 2p, \qquad Q = \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2,$$

то

$$\begin{aligned}
\Delta &= (4k^2 + 2kP + Q)(4k^2 - 2kP + Q) + k^2 - Q^2 =\\
&= 16k^4 + k^2(8Q - 4P^2 + 1) =\\
&= 16k^4 + k^2(-4 - 8p + 2p^2) =\\
&= 2k^2(8k^2 - 2 - 4p + p^2).
\end{aligned} \tag{67}$$

Таблица 3 дает функции, необходимые для вычисления коэффициентов при α_k, β_k в уравнениях (66) для $k = 1, 2, 3, 4$. В этих выражениях p заменено на $\mathfrak{m}$.

Таблица 3

Функции для уравнений (66)

	$\Delta(k)$	$A(-k)-$ $-B(-k)$	$-B(k)$ $A(k)$
$k=1$	$2(6-4m+m^2)$	$+\frac{3}{2}-2m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{3}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{1}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{15}{2}+6m+\frac{9}{4}m^2$
$k=2$	$8(30-4m+m^2)$	$+\frac{21}{2}-6m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{5}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{3}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{45}{2}+10m+\frac{9}{4}m^2$
$k=3$	$18(70-4m+m^2)$	$+\frac{55}{2}-10m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{7}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{5}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{91}{2}+14m+\frac{9}{4}m^2$
$k=4$	$32(126-4m+m^2)$	$+\frac{105}{2}-14m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{9}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{7}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{153}{2}+18m+\frac{9}{4}m^2$

Решение уравнений (57) относительно u_1, s_1 при

$$\alpha_1=-\frac{3}{8},\qquad \beta_1=-\frac{15}{8},$$

с использованием функций для $k=1$ из приведенной выше таблицы, мы получаем после некоторых упрощений в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= +\frac{9}{16}\,\frac{2+4\mathfrak{m}+3\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}\,\zeta^2-\frac{3}{16}\,\frac{38+28\mathfrak{m}+9\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}\,\zeta^{-2},\\ s_1 &= -\frac{3}{16}\,\frac{38+28\mathfrak{m}+9\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}\,\zeta^2+\frac{9}{16}\,\frac{2+4\mathfrak{m}+3\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}\,\zeta^{-2}. \end{aligned} \tag{68}$$

Возвращаясь теперь к разложениям (52) и (55), легко видеть, что решение пока дало

$$\begin{aligned} a_0 &= +1,\\ a_1 &= +\frac{9}{16}\,\mathfrak{m}^2\,\frac{2+4\mathfrak{m}+3\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}=+\frac{3}{16}\,\mathfrak{m}^2+\frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^3+\frac{7}{12}\,\mathfrak{m}^4+\frac{11}{36}\,\mathfrak{m}^5+\ldots,\\ a_{-1} &= -\frac{3}{16}\,\mathfrak{m}^2\,\frac{38+28\mathfrak{m}+9\mathfrak{m}^2}{6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2}=-\frac{19}{16}\,\mathfrak{m}^2-\frac{5}{3}\,\mathfrak{m}^3-\frac{43}{36}\,\mathfrak{m}^4-\frac{14}{27}\,\mathfrak{m}^5+\ldots. \end{aligned} \tag{69}$$

Эти ряды сходятся быстро; знаменатель $6-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2=\Delta(1)$ имеет корни $2\pm i\sqrt{2}$, что дает радиус сходимости, равный $\sqrt{6}$. Кроме того, в разложении по степеням $\mathfrak{m}$ написаны полностью все члены до пятой степени $\mathfrak{m}$, так как следующие слагаемые вида (68) порождаются членами u_3, s_3, имеющими множитель $\mathfrak{m}^6$.

Получив решение (68) относительно u_1, s_1, мы можем перейти теперь к разысканию функций u_2, s_2 при помощи уравнений (59). В этом решении появляется делитель $30-4\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^2=\Delta(2)$, умноженный на первую степень или квадрат делителя $\Delta(1)$. Будучи разложенным по степеням $\mathfrak{m}$, это решение даст a_2 и a_{-2}, начинающиеся с

$$a_2 = +\frac{25}{256}\mathfrak{m}^4 + \frac{803}{1920}\mathfrak{m}^5 + \ldots,$$
$$a_{-2} = 0\cdot\mathfrak{m}^4 + \frac{23}{640}\mathfrak{m}^5 + \ldots. \tag{70}$$

Еще четыре степени $\mathfrak{m}$ получены за один шаг.

Хилл получил буквенное решение для вариационной орбиты с точностью до девятой степени $\mathfrak{m}$. Это требует продолжения приближений до u_4, s_4.

Эта процедура пригодна в равной степени для определения численных значений коэффициентов, если в самом начале принято численное значение для параметра $\mathfrak{m}$. Хилл провел такое численное решение с пятнадцатью десятичными знаками. Приняв

$$\mathfrak{m} = 0{,}08084\,89338\,08312,$$

он получил коэффициенты, выписанные в табл. 4.

При помощи формулы (53) можно теперь немедленно написать ряды для X и Y; они приводятся в табл. 5.

Таблица 4

Решение Хилла

a_0	$= +\ 1{,}00000\ 00000\ 00000$
a_1	$= +\ 0{,}00151\ 57074\ 79563$
a_{-1}	$= -\ 869\ 57469\ 61540$
a_2	$= +\ 58786\ 56578$
a_{-2}	$= +\ 1637\ 90486$
a_3	$= +\ 300\ 31632$
a_{-3}	$= +\ 24\ 60393$
a_4	$= +\ 1\ 75268$
a_{-4}	$= +\ 12284$
a_5	$= +\ 1107$
a_{-5}	$= +\ 64$
a_6	$= +\ 7$
a_{-6}	$= +\ 0$

Таблица 5

Ряды для X и Y

$$\frac{X}{\mathfrak{a}} = +\ 0{,}99130\ 42530\ 38460\cos\tau$$
$$+\ 151\ 58712\ 70049\cos 3\tau$$
$$+\ 58811\ 16971\cos 5\tau$$
$$+\ 300\ 43916\cos 7\tau$$
$$+\ 1\ 75332\cos 9\tau$$
$$+\ 1107\cos 11\tau$$
$$+\ 7\cos 13\tau$$

$$\frac{Y}{\mathfrak{a}} = +1{,}00869\ 57469\ 61540\sin\tau$$
$$+\ 151\ 55436\ 89077\sin 3\tau$$
$$+\ 58761\ 96185\sin 5\tau$$
$$+\ 300\ 19348\sin 7\tau$$
$$+\ 1\ 75204\sin 9\tau$$
$$+\ 1107\sin 11\tau$$
$$+\ 7\sin 13\tau$$

22. Масштабный множитель a. Масштабный множитель a, введенный в выражения для X и Y, соответствует множителю λ, введенному в разд. 18. В невозмущенном движении среднее расстояние, которое отвечает наблюденному сидерическому среднему движению, связано с последним посредством следующего соотношения:

$$\mu = k^2(E+M) = n^2a^3,$$

или

$$\varkappa = \frac{\mu}{(n-n')^2} = \left(\frac{n}{n-n'}\right)^2 a^3 = (1+\mathfrak{m})^2a^3.$$

Мы подставляем это выражение вместо $\varkappa$ в любое из двух уравнений (50) или в уравнение (51). Выберем первое из уравнений (50), которое можно написать в виде

$$D^2u + 2\mathfrak{m}\,Du + \frac{3}{2}\,\mathfrak{m}^2\,(u+s) = (1+\mathfrak{m})^2\,\frac{a^3}{r^3}\,u. \tag{71}$$

Это уравнение должно стать тождеством, если подставить решение для любого значения ζ, например $\zeta = +1$. Для этого частного значения ζ имеем

$$u = s = r = \mathrm{a}\sum a_j,$$
$$Du = \mathrm{a}\sum (2j+1)\,a_j,$$
$$D^2u = \mathrm{a}\sum (2j+1)^2 a_j,$$

и уравнение (71) принимает вид

$$\mathrm{a}\sum\,[(2j+1)^2 + 2(2j+1)\,\mathfrak{m} + 3\mathfrak{m}^2]\,a_j = (1+\mathfrak{m})^2\,\frac{a^3}{\mathrm{a}^2\,(\Sigma\,a_j)^2},$$

или

$$\left(\frac{\mathrm{a}}{a}\right)^3 = \frac{(1+\mathfrak{m})^2}{(\Sigma a_j)^2\,\Sigma\,[(2j+1)^2 + 2\,(2j+1)\,\mathfrak{m} + 3\mathfrak{m}^2]\,a_j}. \tag{72}$$

Как это всегда имеет место при употреблении комплексных координат, суммирования необходимо распространить от $-\infty$ до $+\infty$. Данные $a_0 = +1$ и a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}, определяемые формулами (69) и (70), достаточны для разложения выражения (72) по степеням $\mathfrak{m}$ до $\mathfrak{m}^5$ включительно. С точностью до третьей степени $\mathfrak{m}$ имеем

$$\sum a_j = 1 - \mathfrak{m}^2 - \frac{7}{6}\,\mathfrak{m}^3 + \ldots,$$
$$\left(\sum a_j\right)^2 = 1 - 2\mathfrak{m}^2 - \frac{7}{3}\,\mathfrak{m}^3 + \ldots,$$
$$\sum\,[(2j+1)^2 + 2\,(2j+1)\,\mathfrak{m} + 3\mathfrak{m}^2]a_j = 1 + 2\mathfrak{m} + \frac{7}{2}\,\mathfrak{m}^2 + \frac{19}{3}\,\mathfrak{m}^3 + \ldots.$$

Тогда

$$\left(\frac{\mathrm{a}}{a}\right)^3 = \frac{(1+\mathfrak{m})^2}{1 + 2\mathfrak{m} + \frac{3}{2}\,\mathfrak{m}^2 + 0\cdot\mathfrak{m}^3} = 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}^3 + \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{a}}{a} = 1 - \frac{1}{6}\,\mathfrak{m}^2 + \frac{1}{3}\,\mathfrak{m}^3 + \ldots. \tag{73}$$

С принятым значением $\mathfrak{m}$ Хилл дает следующий численный результат для орбиты Луны:

$$\frac{\mathrm{a}}{a} = 0{,}99909\,31419\,75298.$$

Поскольку $\mathfrak{m}^2 = m^2 + 2m^3$, легко видеть, что полученное в разд. 13 уравнение (35) согласуется с точностью до m^2 с результатом, полученным здесь при помощи совершенно другой методики.

23. Преобразование уравнений. Вариационная орбита, рассмотренная в разд. 17—22 этой главы, содержит две произвольные постоянные — $\mathfrak{m}$ и фазовую постоянную ε в комбинации

$$\tau = (n - n')\,t + \varepsilon.$$

Она является частным решением уравнений

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} - 2\mathfrak{m}\frac{dY}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial X}, \quad \frac{d^2Y}{d\tau^2} + 2\mathfrak{m}\frac{dX}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial Y}, \tag{74}$$

где

$$\Omega = \frac{\varkappa}{r} + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2X^2, \tag{75}$$

которые соответствуют уравнениям (40) и (41) с той лишь разницей, что независимая переменная t заменена τ. Интеграл Якоби равен

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right] = \Omega + C. \tag{76}$$

Теперь мы располагаем частным решением

$$X_0 + iY_0 = \mathfrak{a}\sum a_j\zeta^{2j+1}, \quad X_0 - iY_0 = \mathfrak{a}\sum a_{-j-1}\zeta^{2j+1}$$

этих уравнений, в котором нижний нулевой индекс использован для обозначения координат в вариационной орбите.

Для того чтобы получить общее решение уравнений (74), рассмотрим некоторое решение, близкое к вариационной орбите, вида

$$X = X_0 + \delta X, \quad Y = Y_0 + \delta Y, \tag{77}$$

где δX и δY — малые величины, так что в первом приближении можно пренебречь их квадратами и произведениями. Тогда мы получим из уравнений (74)

$$\frac{d^2\delta X}{d\tau^2} - 2\mathfrak{m}\frac{d\delta Y}{d\tau} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}\right)_0\delta X + \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X\partial Y}\right)_0\delta Y, \quad \frac{d^2\delta Y}{d\tau^2} + 2\mathfrak{m}\frac{d\delta X}{d\tau} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X\partial Y}\right)_0\delta X + \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)_0\delta Y, \tag{78}$$

а интеграл Якоби дает

$$\frac{dX_0}{d\tau}\frac{d\delta X}{d\tau} + \frac{dY_0}{d\tau}\frac{d\delta Y}{d\tau} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial X}\right)_0\delta X - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial Y}\right)_0\delta Y = \delta C. \tag{79}$$

Нулевой нижний индекс указывает, что в частные производные от Ω необходимо подставить координаты, удовлетворяющие вариационной орбите.

Как было отмечено в предыдущем разделе, уравнения, которые были использованы для получения вариационной орбиты, могут дать члены в движении Луны, которые зависят от эксцентриситета лунной орбиты, в добавление к членам, зависящим только от параметра $\mathfrak{m}$. Решение относительно δX и δY уравнений (78) должно поэтому дать члены, имеющие множителем первую степень эксцентриситета орбиты Луны. Посредством этих членов будет введена средняя аномалия, а следовательно, и движение перигея $(1-c)n$. Предметом рассмотрения этого и последующих разделов является вычисление движения перигея для орбит с малым эксцентриситетом, т. е. вычисление главной части движения перигея, которая зависит только от $\mathfrak{m}$. После того как определено c, можно непосредственно получить решение относительно δX и δY. Уравнения (78) не годятся для непосредственного определения движения перигея; необходимо ввести новые зависимые переменные для вывода уравнений более удобного вида. Мы выбираем эти новые переменные посредством следующих рассуждений.

Непосредственно очевидно, что

$$\delta X = \frac{dX_0}{d\tau}, \quad \delta Y = \frac{dY_0}{d\tau} \tag{80}$$

представляет собой частное решение линейных дифференциальных уравнений (78); ибо если совершить эту подстановку, то уравнения (78) и (79) превращаются в выражения производных от (74) и (76) при условии, что $\delta C = 0$. Если теперь введены новые переменные p и q формулами

$$\delta X = p\frac{dX_0}{d\tau} - q\frac{dY_0}{d\tau}, \qquad \delta Y = q\frac{dX_0}{d\tau} + p\frac{dY_0}{d\tau}. \tag{81}$$

то частное решение (80) будет соответствовать

$$p = +1, \quad q = 0.$$

Подстановка (81) в (78) даст два однородных линейных дифференциальных уравнения относительно p и q, но так как $p = \text{const}$ должно быть решением, то они не могут содержать члена p; p может входить лишь посредством своей первой и второй производной. Аналогично уравнение (79) при $\delta C = 0$ превратится в линейное однородное выражение относительно q, $dp/d\tau$, $dq/d\tau$. Из полученных трех уравнений можно было бы исключить $d^2p/d\tau^2$ и $dp/d\tau$, оставляя только одно уравнение относительно одной зависимой переменной q.

Хотя эта задача может быть решена без каких-либо дополнительных затруднений в действительных координатах, обозначения будут несколько блоее удобными, если применяются комплексные координаты u и s.

Уравнения (74) и интеграл Якоби (76), выраженные через u и s, имеют вид

$$\begin{aligned} &D^2u + 2mDu + 2\frac{\partial\Omega}{\partial s} = 0, \\ &D^2s - 2mDs + 2\frac{\partial\Omega}{\partial u} = 0, \end{aligned} \tag{82}$$

$$DuDs + 2\Omega + 2C = 0. \tag{83}$$

Пусть δu, δs — малые изменения координат u_0, s_0, удовлетворяющих вариационной орбите. Тогда при $\delta C = 0$ имеем

$$\begin{aligned} &D^2\delta u + 2mD\delta u + 2\Omega_{12}\delta u + 2\Omega_{22}\delta s = 0, \\ &D^2\delta s - 2mD\delta s + 2\Omega_{11}\delta u + 2\Omega_{12}\delta s = 0, \end{aligned} \tag{84}$$

$$Du_0D\delta s + Ds_0D\delta u + 2\Omega_1\delta u + 2\Omega_2\delta s = 0, \tag{85}$$

где мы положили

$$\Omega_1 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)_0, \quad \Omega_2 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right)_0,$$

$$\Omega_{11} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}\right)_0, \quad \Omega_{12} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial s}\right)_0, \quad \Omega_{22} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}\right)_0,$$

причем нижний индекс нуль указывает снова, что при вычислении этих частных производных от Ω необходимо использовать координаты вариационной орбиты.

Частное решение этих уравнений имеет вид

$$\delta u = Du_0, \quad \delta s = Ds_0.$$

Если p и q введены посредством (81), то, поскольку

$$\delta u = \delta X + i\delta Y, \quad \delta s = \delta X - i\delta Y,$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned}
\delta u &= p\frac{dX_0}{d\tau} - q\frac{dY_0}{d\tau} + iq\frac{dX_0}{d\tau} + ip\frac{dY_0}{d\tau} = \\
&= (p+iq)\frac{d(X_0+iY_0)}{d\tau} = \\
&= (ip-q)Du_0, \\
\delta s &= p\frac{dX_0}{d\tau} - q\frac{dY_0}{d\tau} - iq\frac{dX_0}{d\tau} - ip\frac{dY_0}{d\tau} = \\
&= (p-iq)\frac{d(X_0-iY_0)}{d\tau} = \\
&= (ip+q)Ds_0.
\end{aligned} \tag{86}$$

Введем $ip = p'$; тогда

$$\delta u = (p'-q)Du_0, \quad \delta s = (p'+q)Ds_0, \tag{87}$$

и их производные имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
D\delta u &= D(p'-q)Du_0 + (p'-q)D^2u_0, \\
D\delta s &= D(p'+q)Ds_0 + (p'+q)D^2s_0, \\
D^2\delta u &= D^2(p'-q)Du_0 + 2D(p'-q)D^2u_0 + (p'-q)D^3u_0, \\
D^2\delta s &= D^2(p'+q)Ds_0 + 2D(p'+q)D^2s_0 + (p'+q)D^3s_0.
\end{aligned}$$

При помощи уравнений (82) и их первых производных

$$\begin{aligned}
D^3u_0 + 2\mathrm{m}D^2u_0 + 2\Omega_{12}Du_0 + 2\Omega_{22}Ds_0 &= 0, \\
D^3s_0 - 2\mathrm{m}D^2s_0 + 2\Omega_{11}Du_0 + 2\Omega_{12}Ds_0 &= 0
\end{aligned}$$

производные от (87) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
D\delta u &= D(p'-q)Du_0 + (p'-q)(-2\mathrm{m}Du_0 - 2\Omega_2), \\
D\delta s &= D(p'+q)Ds_0 + (p'+q)(+2\mathrm{m}Ds_0 - 2\Omega_1), \\
D^2\delta u &= D^2(p'-q)Du_0 + 2D(p'-q)(-2\mathrm{m}Du_0 - 2\Omega_2) + \\
&\quad + (p'-q)(+4\mathrm{m}^2Du_0 + 4\mathrm{m}\Omega_2 - 2\Omega_{12}Du_0 - 2\Omega_{22}Ds_0), \\
D^2\delta s &= D^2(p'+q)Ds_0 + 2D(p'+q)(+2\mathrm{m}Ds_0 - 2\Omega_1) + \\
&\quad + (p'+q)(+4\mathrm{m}^2Ds_0 - 4\mathrm{m}\Omega_1 - 2\Omega_{11}Du_0 - 2\Omega_{12}Ds_0),
\end{aligned} \tag{88}$$

причем используются только первые производные от u_0 и s_0. Подстановка (87) и (88) в (84) и (85) дает

$$\begin{aligned}
D^2(p'-q)Du_0 + 2D(p'-q)(-2\Omega_2 - \mathrm{m}Du_0) + 4q\Omega_{22}Ds_0 &= 0, \\
D^2(p'+q)Ds_0 + 2D(p'+q)(-2\Omega_1 + \mathrm{m}Ds_0) - 4q\Omega_{11}Du_0 &= 0, \\
Dp'Du_0Ds_0 + 2q(\mathrm{m}Du_0Ds_0 - \Omega_1Du_0 + \Omega_2Ds_0) &= 0.
\end{aligned} \tag{89}$$

Умножая первое из этих уравнений на $-\frac{1}{2}Ds_0$, второе на $+\frac{1}{2}Du_0$ и складывая, исключаем D^2p'. В результате получается

$$D^2qDu_0Ds_0-2DqD\Omega+2Dp'(\mathfrak{m}\,Du_0Ds_0-\Omega_1Du_0+\Omega_2Ds_0)-\\ -2q\,[\Omega_{11}(Du_0)^2+\Omega_{22}(Ds_0)^2]=0. \tag{90}$$

В этом уравнении мы написали $D\Omega$ вместо

$$\Omega_1Du_0+\Omega_2Ds_0.$$

Но уравнение (83) показывает, что

$$D(DuDs)=-2D\Omega.$$

Используя это уравнение и вводя для краткости Φ посредством

$$\mathfrak{m}Du_0Ds_0-\Omega_1Du_0+\Omega_2Ds_0=\Phi, \tag{91}$$

приводим уравнение (90) и третье уравнение из (89) к виду

$$\left.\begin{aligned} &D^2q+\frac{D(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0}Dq+\frac{2\Phi}{Du_0Ds_0}Dp'-\frac{2[\Omega_{11}(Du_0)^2+\Omega_{22}(Ds_0)^2]}{Du_0Ds_0}q=0,\\ &Dp'+\frac{2\Phi}{Du_0Ds_0}q=0. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Из этих уравнений можно исключить Dp', что даст уравнение с q в качестве единственной переменной:

$$D^2q+\frac{D(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0}Dq-\left\{\frac{2[\Omega_{11}(Du_0)^2+\Omega_{22}(Ds_0)^2]}{Du_0Ds_0}+\frac{4\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}\right\}q=0. \tag{93}$$

Это — уравнение вида

$$D^2q+H\,Dq-Kq=0. \tag{94}$$

Чтобы исключить средний член, положим

$$q=\varphi\varrho,$$

так что уравнение (94) примет вид

$$\varphi\,D^2\varrho+(H\varphi+2D\varphi)\,D\varrho-(K\varphi-D^2\varphi-H\,D\varphi)\,\varrho=0.$$

Если φ определяется соотношением

$$H=-\frac{2D\varphi}{\varphi}, \tag{95}$$

то средний член обратится в нуль; тогда

$$-\frac{D^2\varphi}{\varphi}-H\frac{D\varphi}{\varphi}=\frac{H^2}{4}+\frac{1}{2}DH,$$

и уравнение (93) приводится к виду

$$D^2\varrho-\Theta\varrho=0, \tag{96}$$

в котором

$$\Theta=K+\frac{H^2}{4}+\frac{1}{2}DH. \tag{97}$$

При выводе уравнений (92) мы произвели деление на $Du_0\,Ds_0$; получая (95), мы делили на φ. Соотношения между X, Y, u и s, установленные в разд. 19, показывают, что

$$Du_0 Ds_0 = -\left(\frac{dX_0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dY_0}{d\tau}\right)^2 = -V_0^2,$$

где V_0 — скорость в вариационной орбите. Тогда

$$H = \frac{2}{i}\frac{d}{d\tau}\ln V_0 = $$
$$= -\frac{2}{i}\frac{d}{d\tau}\ln\varphi,$$

согласно уравнениям (93), (94) и (95). Отсюда следует, что $\varphi = V_0^{-1}$. Скорость в любой точке вариационной орбиты конечна и отлична от нуля для широкого интервала значений $\mathfrak{m}$, включая и значение для орбиты Луны. Следовательно, операции деления на Du_0Ds_0 и φ законны.

24. Функция Θ. Уравнение (96) известно под названием уравнения Хилла. Прежде чем приступить к его рассмотрению, требуется несколько подробнее исследовать функцию Θ. Из уравнений (93) и (94) следует

$$H = \frac{D(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0},$$

следовательно,

$$DH = \frac{D^2(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0} - \frac{[D(Du_0Ds_0)]^2}{(Du_0Ds_0)^2}$$

и

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2}DH = \frac{D^2(Du_0Ds_0)}{2Du_0Ds_0} - \frac{[D(Du_0Ds_0)]^2}{4(Du_0Ds_0)^2}.$$

Но поскольку

$$D(Du_0Ds_0) = -2D\Omega, \tag{98}$$

это уравнение записывается в следующем виде:

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2}DH = -\frac{D^2\Omega}{Du_0\,Ds_0} - \frac{(D\Omega)^2}{(Du_0\,Ds_0)^2}. \tag{99}$$

Правая часть выражается через $Du_0\,Ds_0$ и частные производные от Ω путем использования соотношений

$$D\Omega = \Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0,$$
$$D^2\Omega = \Omega_{11}(Du_0)^2 + 2\Omega_{12}Du_0Ds_0 + \Omega_{22}(Ds_0)^2 + \Omega_1 D^2u_0 + \Omega_2 D^2 s_0.$$

Вместо последних двух членов мы пишем

$$\Omega_1 D^2u_0 + \Omega_2 D^2s_0 = \Omega_1(-2\mathfrak{m}Du_0 - 2\Omega_2) + \Omega_2(2\mathfrak{m}Ds_0 - 2\Omega_1) =$$
$$= 2\mathfrak{m}(-\Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0) - 4\Omega_1\Omega_2.$$

Наконец, с Φ, определяемым уравнением (91), мы получаем

$$D^2\Omega = \Omega_{11}(Du_0)^2 + 2\Omega_{12}Du_0Ds_0 + \Omega_{22}(Ds_0)^2 -$$
$$- 4\Omega_1\Omega_2 + 2\mathfrak{m}\Phi - 2\mathfrak{m}^2 Du_0Ds_0. \tag{100}$$

Аналогично

$$(D\Omega^2) = (\Phi - \mathfrak{m}\,Du_0\,Ds_0)^2 + 4\Omega_1\Omega_2\,Du_0\,Ds_0,$$
$$\frac{(D\Omega)^2}{Du_0Ds_0} = \frac{\Phi^2}{Du_0Ds_0} + 4\Omega_1\Omega_2 - 2\mathfrak{m}\Phi + \mathfrak{m}^2 Du_0Ds_0. \tag{101}$$

При помощи (100) и (101) уравнение (99) можно написать в следующем виде:

$$\frac{H^2}{4}+\frac{1}{2}DH=\frac{1}{Du_0\,Ds_0}[-\Omega_{11}(Du_0)^2-2\Omega_{12}\,Du_0Ds_0-\Omega_{22}(Ds_0)^2]-$$
$$-\frac{\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}+\mathfrak{m}^2.$$

К этому уравнению прибавляется коэффициент K при q в (93), и получается следующее окончательное выражение для Θ:

$$\Theta=\frac{1}{Du_0Ds_0}[\Omega_{11}(Du_0)^2-2\Omega_{12}Du_0Ds_0+\Omega_{22}(Ds_0)^2]+$$
$$+\frac{3\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}+\mathfrak{m}^2. \tag{102}$$

До этого момента было удобно сохранять буквенное обозначение для Ω. Поскольку уравнения (74) представляют собой уравнения ограниченной задачи, то рассуждения этого раздела применимы к изучению орбит в близкой окрестности периодических решений ограниченной задачи. Для приложения к проблеме Луны мы должны подставить из (75)

$$\Omega=\frac{\varkappa}{r}+\frac{3}{2}\mathfrak{m}^2X^2=$$
$$=\frac{\varkappa}{r}+\frac{3}{8}\mathfrak{m}^2(u^2+2us+s^2),$$

где $r^2=us$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\Omega_1&=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)_0=-\frac{1}{2}\frac{\varkappa s_0}{r_0^3}+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2(u_0+s_0),\\
\Omega_2&=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right)_0=-\frac{1}{2}\frac{\varkappa u_0}{r_0^3}+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2(u_0+s_0),\\
\Omega_{11}&=\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}\right)_0=+\frac{3}{4}\frac{\varkappa s_0^2}{r_0^5}+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2,\\
\Omega_{12}&=\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial s}\right)_0=+\frac{1}{4}\frac{\varkappa}{r_0^3}+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2,\\
\Omega_{22}&=\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}\right)_0=+\frac{3}{4}\frac{\varkappa u_0^2}{r_0^5}+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2.
\end{aligned} \tag{103}$$

Подстановка в (102) приводит к следующему выражению:

$$\Theta=\frac{\varkappa}{r_0^3}+\mathfrak{m}^2+\frac{3}{4Du_0Ds_0}\left[\frac{\varkappa}{r_0^5}(s_0Du_0-u_0Ds_0)^2+\mathfrak{m}^2\,(Du_0-Ds_0)^2\right]+\frac{3\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}, \tag{104}$$

в котором

$$\Phi=\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{r_0^3}(s_0Du_0-u_0Ds_0)+\mathfrak{m}Du_0Ds_0+\frac{3}{4}\mathfrak{m}^2(u_0+s_0)(-Du_0+Ds_0).$$

Из структуры функции Θ очевидно, что она является действительной четной периодической функцией от 2τ. Поэтому она разложима в ряд по косинусам дуг, кратных 2τ. Для получения этого ряда можно с успехом применить гармонический анализ.

Если требуется буквенное разложение, то более удобны другие формы. Мы используем соотношения (98) и (100):

$$-\frac{1}{2}D^2(Du_0Ds_0)=D^2\Omega=$$
$$=\Omega_{11}(Du_0)^2+2\Omega_{12}Du_0Ds_0+\Omega_{22}(Ds_0)^2-$$
$$-4\Omega_1\Omega_2+2\mathrm{m}\Phi-2\mathrm{m}^2Du_0Ds_0,$$

которые дают

$$\Omega_{11}(Du_0)^2-2\Omega_{12}Du_0Ds_0+\Omega_{22}(Ds_0)^2=-4\Omega_{12}Du_0Ds_0+4\Omega_1\Omega_2-2\mathrm{m}\Phi+$$
$$+2\mathrm{m}^2Du_0Ds_0-\frac{1}{2}D^2(Du_0Ds_0).$$

Подстановка в (102) дает

$$\Theta=-\frac{\varkappa}{r_0^3}+\frac{4\Omega_1\Omega_2}{Du_0Ds_0}-2\mathrm{m}\frac{\Phi}{Du_0Ds_0}+\frac{3\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}-\frac{1}{2}\frac{D^2(Du_0Ds_0)}{Du_0Ds_0},\qquad(105)$$

в котором $4\Omega_{12}$ заменено на $\varkappa r_0^{-3}+3\mathrm{m}^2$ согласно (103). Далее,

$$\frac{4\Omega_1\Omega_2}{Du_0\,Ds_0}=\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+2\mathrm{m}\right)\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-2\mathrm{m}\right)=$$
$$=\frac{D^2u_0\,D^2s_0}{Du_0Ds_0}+2\mathrm{m}\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-\frac{D^2u_0}{Du_0}\right)-4\mathrm{m}^2,$$
$$-\frac{2\mathrm{m}\Phi}{Du_0Ds_0}=-\mathrm{m}\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-\frac{D^2u_0}{Du_0}\right)+2\mathrm{m}^2,$$
$$\frac{3\Phi^2}{(Du_0Ds_0)^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-\frac{D^2u_0}{Du_0}\right)^2-3\mathrm{m}\left(\frac{D^2s_0}{Ds_0}-\frac{D^2u_0}{Du_0}\right)+3\mathrm{m}^2,$$
$$-\frac{1}{2}\frac{D^2(Du_0\,Ds_0)}{Du_0Ds_0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)^2-\frac{1}{2}D\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)$$

являются соотношениями, которые могут быть легко проверены. Если их подставить в (105), то получим выражение

$$\Theta=-\frac{\varkappa}{r_0^3}-\mathrm{m}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0}+2\mathrm{m}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right)-\frac{1}{2}D\left(\frac{D^2u_0}{Du_0}+\frac{D^2s_0}{Ds_0}\right),\qquad(106)$$

которое хорошо приспособлено для буквенных разложений.

Ряд для $\varkappa r_0^{-3}$ можно получить из (82) и (103):

$$\frac{\varkappa}{r_0^3}=\frac{D^2u_0+2\mathrm{m}Du_0+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2s_0}{u_0}+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2.$$

Если мы теперь подставим

$$u_0=\mathrm{a}\sum a_j\zeta^{2j+1},\quad s_0=\mathrm{a}\sum a_{-j-1}\zeta^{2j+1},$$

то получим

$$\frac{\varkappa}{r_0^3}=\frac{\sum\left\{[(2j+1)^2+2\mathrm{m}(2j+1)]\,a_j+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-j-1}\right\}\zeta^{2j+1}}{\sum a_j\zeta^{2j+1}}+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2=$$
$$=1+2\mathrm{m}+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2+\frac{\sum\left[4j(j+1+\mathrm{m})\,a_j+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-j-1}\right]\zeta^{2j}}{\sum a_j\zeta^{2j}},\qquad(107)$$

Поскольку $\varkappa/r_0^3$ представляет собой ряд по косинусам дуг, кратных 2τ, то последний член правой части разложения (107) можно написать в виде

$$\sum Q_k \zeta^{2k} = \frac{\sum b_j \zeta^{2j}}{\sum a_j \zeta^{2j}},$$

где $Q_{-k} = Q_k$, а a_j и b_j известны из вариационной орбиты либо как численные коэффициенты, либо как степенные ряды по параметру $\mathfrak{m}$. Коэффициенты Q_k получаются последовательными приближениями из уравнений

$$\begin{aligned}
Q_0 a_0 + Q_1 (a_1 + a_{-1}) + Q_2 (a_2 + a_{-2}) + \ldots &= b_0,\\
Q_0 a_{-1} + Q_1 (a_0 + a_{-2}) + Q_2 (a_1 + a_{-3}) + \ldots &= b_{-1},\\
Q_0 a_1 + Q_1 (a_2 + a_0) + Q_2 (a_3 + a_{-1}) + \ldots &= b_1,\\
Q_0 a_{-2} + Q_1 (a_{-1} + a_{-3}) + Q_2 (a_0 + a_{-4}) + \ldots &= b_{-2},\\
Q_0 a_2 + Q_1 (a_3 + a_1) + Q_2 (a_4 + a_0) + \ldots &= b_2.
\end{aligned}$$

Частные D^2u_0/Du_0 и D^2s_0/Ds_0 можно вычислить аналогичным образом. Мы полагаем

$$\frac{D^2u_0}{Du_0} = \frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{2j}} = \sum U_j \zeta^{2j},$$

$$\frac{D^2s_0}{Ds_0} = -\frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{-2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{-2j}} = -\sum U_j \zeta^{-2j},$$

так что $\varkappa/r_0^3$ и D^2u_0/Du_0 являются единственными рядами, необходимыми для вычисления Θ.

Эти ряды в виде, данном Хиллом, приведены в табл. 6 для $\mathfrak{m} = 0{,}08084\ 89338\ 08312$.

Полное решение основной задачи теории Луны может быть основано на этих рядах и рядах для u_0 и s_0, данных ранее, если не требуется буквенного разложения по степеням $\mathfrak{m}$. Такого рода решение было фактически выполнено Брауном с выдающимся успехом.

Таблица 6

Ряды Хилла

$$\begin{aligned}
\frac{\varkappa}{r_0^3} = {} & 1{,}17150\ 80211\ 79225\\
& + 0{,}02523\ 36924\ 97860 \cos 2\tau\\
& + 25\ 15533\ 50012 \cos 4\tau\\
& + 24118\ 79799 \cos 6\tau\\
& + 226\ 05851 \cos 8\tau \qquad (108)\\
& + 2\ 08750 \cos 10\tau\\
& + 1908 \cos 12\tau\\
& + 17 \cos 14\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta = {} & 1{,}15884\ 39395\ 96583\\
& - 0{,}11408\ 80374\ 93807 \cos 2\tau\\
& + 76\ 64759\ 95109 \cos 4\tau\\
& - 1\ 83465\ 77790 \cos 6\tau\\
& + 1088\ 95009 \cos 8\tau \qquad (109)\\
& - 20\ 98671 \cos 10\tau\\
& + 12103 \cos 12\tau\\
& - 211 \cos 14\tau
\end{aligned}$$

25. Движение перигея. Мы рассмотрим теперь решение уравнения

$$D^2 q - \Theta q = 0,$$

в котором

$$\Theta = \theta_0 + 2\sum_1^{\infty} \theta_j \cos 2j\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_j \zeta^{2j}, \quad \theta_{-j} = \theta_j.$$

Разлагая по степеням параметра $\mathfrak{m}$, находим

$$\theta_0 = 1 + 2\mathfrak{m} + \ldots, \quad \theta_j = \theta_{-j} = O(\mathfrak{m}^{2j}).$$

Это уравнение сводится к уравнению простого гармонического колебания, если ограничить функцию Θ ее постоянным членом θ_0. Тогда решение имеет вид

$$q = E\cos l, \text{ где } l = \mathrm{c}_0\tau + l_0,$$

E и l_0 — произвольные постоянные, а $\mathrm{c}_0 = \sqrt{\theta_0}$. В общем случае, когда функция Θ не ограничена своим постоянным членом, решение можно представить в виде

$$q = E\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \cos(l + 2j\tau)$$

с $q_0 = 1$ или

$$q = E\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \exp(il_0)\,\zeta^{2j+\mathrm{c}} + E\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \exp(-il_0)\,\zeta^{-2j-\mathrm{c}}.$$

E и l_0 снова суть произвольные постоянные, но c будет теперь зависеть от всех коэффициентов $\theta_0, \theta_1, \ldots$ функции Θ.

Коэффициент при $\zeta^{2j+\mathrm{c}}$ в функции Θq равен

$$(\ldots\theta_2 q_{j-2} + \theta_1 q_{j-1} + \theta_0 q_j + \theta_1 q_{j+1} + \theta_2 q_{j+2}\ldots)\,E\exp il_0.$$

В силу равенства θ_j и θ_{-j} тот же коэффициент при $\exp(il_0)$ вместо $\exp(-il_0)$ получается для $\zeta^{-2j-\mathrm{c}}$. Поэтому эти два члена q дают в точности одинаковые уравнения, если в $D^2 q$ и Θq приравнять коэффициенты при соответствующих степенях ζ. Эти уравнения таковы:

$$\begin{array}{llll}
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\cdots[(\mathrm{c}-4)^2-\theta_0]\,q_{-2} - & & \theta_1 q_{-1} - & \theta_2 q_0 - \\
 & & -\theta_3 q_1 - & \theta_4 q_2 - \ldots = 0, \\
\cdots -\theta_1 q_{-2} - [(\mathrm{c}-2)^2-\theta_0]\,q_{-1} - & & & \theta_1 q_0 - \\
 & & -\theta_2 q_1 - & \theta_3 q_2 - \ldots = 0, \\
\cdots -\theta_2 q_{-2} - & & \theta_1 q_{-1} + (\mathrm{c}^2-\theta_0)\,q_0 - & \\
 & & -\theta_1 q_1 - & \theta_2 q_2 - \ldots = 0, \\
\cdots -\theta_3 q_{-2} - & & \theta_2 q_{-1} - & \theta_1 q_0 + \\
 & + [(\mathrm{c}+2)^2-\theta_0]\,q_1 - & & \theta_1 q_2 - \ldots = 0, \\
\cdots -\theta_4 q_{-2} - & & \theta_3 q_{-1} - & \theta_2 q_0 - \\
 & -\theta_1 q_1 + [(\mathrm{c}+4)^2-\theta_0]\,q_2 - \ldots = 0. & & \\
 & \vdots & \vdots &
\end{array} \qquad (110)$$

Это бесконечная система линейных однородных уравнений. Для конечной системы таких уравнений условие существования решения заключается в том, чтобы определитель, составленный из коэффициентов, был равен нулю. Этот определитель, будучи приравненным нулю, служит уравнением, из которого вычисляется значение c. После того как найдено c, можно получить неизвестные q_j; одно из них, например q_0, остается произвольным и может быть принято равным единице.

Хилл имел смелость распространить ту же методику на бесконечное число уравнений с бесконечным числом неизвестных. Таким образом, он первым ввел в математический анализ бесконечный определитель.

Хилл пишет уравнение в виде определителя:

$$\Delta(c) \equiv \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \frac{(c-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{c^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{(c+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = 0.$$

В качестве вспомогательного определителя он вводит следующий:

$$\Delta_1(c) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & \frac{-\theta_1}{(c-4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c-4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c-4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_4}{(c-4)^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{(c-2)^2-\theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{(c-2)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c-2)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c-2)^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_2}{c^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{c^2-\theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{c^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{c^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{(c+2)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c+2)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{(c+2)^2-\theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{(c+2)^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{(c+4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c+4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta^2}{(c+4)^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{(c+4)^2-\theta_0} & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix},$$

так что

$$\Delta(c) = \Delta_1(c) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(c-2k)^2-\theta_0}{4k^2-\theta_0}. \tag{111}$$

Бесконечное произведение в правой части можно выразить через функции от синусов, используя следующие известные бесконечные произведения:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - x^2}{k^2\pi^2},$$

$$\frac{\sin x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{\sin x_2} = \prod_{1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - x_1^2}{k^2\pi^2 - x_2^2} =$$

$$= \prod_{1}^{\infty} \frac{k\pi - x_1}{k\pi - x_2} \cdot \frac{k\pi + x_1}{k\pi + x_2}.$$

Применяя эти соотношения к (111), мы пишем

$$\Delta(\mathrm{c}) = \Delta_1(\mathrm{c}) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{c} - 2k - \mathrm{c}_0}{2k - \mathrm{c}_0} \frac{\mathrm{c} - 2k + \mathrm{c}_0}{2k + \mathrm{c}_0} =$$

$$= \Delta_1(\mathrm{c}) \frac{\mathrm{c}^2 - \theta_0}{-\theta_0} \prod_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{c} - 2k - \mathrm{c}_0}{2k - \mathrm{c}_0} \frac{\mathrm{c} - 2k + \mathrm{c}_0}{2k + \mathrm{c}_0} \frac{\mathrm{c} + 2k - \mathrm{c}_0}{-2k - \mathrm{c}_0} \frac{\mathrm{c} + 2k + \mathrm{c}_0}{-2k + \mathrm{c}_0} =$$

$$= \Delta_1(\mathrm{c}) \frac{\mathrm{c}^2 - \theta_0}{-\theta_0} \prod_{1}^{\infty} \frac{k\pi - \frac{1}{2}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_0)\pi}{k\pi - \frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi} \frac{k\pi - \frac{1}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}_0)\pi}{k\pi + \frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi} \times$$

$$\times \frac{k\pi + \frac{1}{2}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_0)\pi}{k\pi + \frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi} \frac{k\pi + \frac{1}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}_0)\pi}{k\pi - \frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi} =$$

$$= \Delta_1(\mathrm{c}) \frac{\mathrm{c}^2 - \theta_0}{-\theta_0} \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_0)\pi}{\frac{1}{2}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_0)\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}_0)\pi}{\frac{1}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}_0)\pi} \left(\frac{\frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi}{\sin\frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi}\right)^2 =$$

$$= \Delta_1(\mathrm{c}) \frac{-\sin\frac{1}{2}(\mathrm{c} - \mathrm{c}_0)\pi \sin\frac{1}{2}(\mathrm{c} + \mathrm{c}_0)\pi}{\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{c}_0\pi} = \qquad (112\text{а})$$

$$= \Delta_1(\mathrm{c}) \frac{\cos \mathrm{c}\pi - \cos \mathrm{c}_0\pi}{1 - \cos \mathrm{c}_0\pi}, \qquad (112\text{б})$$

где, как и прежде,

$$\mathrm{c}_0 = \sqrt{\theta_0}.$$

Можно затем получить аналитическое выражение для определителя $\Delta_1(\mathrm{c})$, используя следующие его свойства:

1. Он является четной периодической функцией от c с периодом 2; если c есть корень, то $\pm\mathrm{c}\pm 2k$ также будут корнями.

2. Он имеет простые полюсы при

$$(\mathrm{c} + 2k)^2 = \theta_0$$

или

$$\mathrm{c} = \pm\mathrm{c}_0 + 2k.$$

3. Он стремится к единице, если мнимая часть величины c стремится к $\pm\infty$.

Эти свойства справедливы также и для разности

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c+c_0)\pi-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c-c_0)\pi.$$

Поэтому возможно выбрать такую постоянную K, чтобы выражение

$$\Delta_1(c)-K\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c+c_0)\pi-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c-c_0)\pi\right]$$

не имело полюсов и, следовательно, было равно постоянной. Эта постоянная равна единице и определяется, если положить $c=\pm i\infty$, для которого $\Delta_1(c)=+1$ и разность котангенсов равна нулю. Это дает

$$\Delta_1(c)=1+K\left[\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c+c_0)\pi-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c-c_0)\pi\right]=$$

$$=1+K\frac{-2\sin\frac{1}{2}c_0\pi\cos\frac{1}{2}c_0\pi}{\sin\frac{1}{2}(c-c_0)\pi\sin\frac{1}{2}(c+c_0)\pi}.$$

Тогда из формулы (112а) мы находим

$$\Delta(c)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(c-c_0)\pi\sin\frac{1}{2}(c+c_0)\pi}{\sin^2\frac{1}{2}c_0\pi}+2K\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c_0\pi. \tag{113}$$

Полагая $c=0$ в (113), мы получаем

$$\Delta(0)=+1+2K\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c_0\pi,$$

или

$$2K\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c_0\pi=\Delta(0)-1.$$

Поэтому окончательное выражение для $\Delta(c)$ имеет вид

$$\Delta(c)=\Delta(0)-1-\frac{\sin\frac{1}{2}(c-c_0)\pi\sin\frac{1}{2}(c+c_0)\pi}{\sin^2\frac{1}{2}c_0\pi}=$$

$$=\Delta(0)-1+\frac{\cos c\pi-\cos c_0\pi}{1-\cos c_0\pi}=$$

$$=\Delta(0)-\frac{1-\cos c\pi}{1-\cos\sqrt{\theta_0}\,\pi}. \tag{114}$$

Таким образом, задача свелась к вычислению $\Delta(0)$ и нахождению одного из корней следующего уравнения:

$$1-\cos c\pi=\Delta(0)\left(1-\cos\sqrt{\theta_0}\pi\right), \tag{115}$$

или уравнения

$$\sin^2\frac{c}{2}\pi=\Delta(0)\sin^2\frac{1}{2}\sqrt{\theta_0}\pi,$$

или

$$\sin\frac{c}{2}\pi=\sqrt{\Delta(0)}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\theta_0}\pi. \tag{116}$$

Необходимо получить корень, ближайший к единице, так как $c \to 1$ при $\mathfrak{m} \to 0$.

Все члены, расположенные по главной диагонали бесконечного определителя $\Delta(0)$, равны $+1$. Следовательно, основной член в разложении $\Delta(0)$ равен $+1$. Процедура получения остальных членов состоит в систематической замене строк и столбцов и в вычислении диагонального элемента после каждой замены. Одна замена двух смежных строк или столбцов порождает члены, имеющие множителем θ_1^2; поскольку θ_j, будучи разложенным по степеням $\mathfrak{m}$, содержит множителем $\mathfrak{m}^{2j}$, то эти члены будут иметь множителем $\mathfrak{m}^4$. Члены следующего, более высокого порядка имеют множителем $\mathfrak{m}^8$; они получаются от замены строк или столбцов, которая дает члены вида θ_1^4, $\theta_1^2\theta_2$ или θ_2^2. Каждая последовательность замен требует вычисления бесконечной суммы.

Коэффициент при θ_1^2 равен следующей бесконечной сумме:

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2j)^2-\theta_0} \frac{1}{(2j+2)^2-\theta_0} = -\frac{1}{16} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j^2-p^2} \frac{1}{(j+1)^2-p^2},$$

если $p = \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0} = \frac{1}{2}c_0$. Разлагая каждый член на элементарные дроби имеем

$$\frac{1}{32p} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2p+1}\left(\frac{1}{p-j}+\frac{1}{p+j+1}\right)-\frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{p+j}+\frac{1}{p-j-1}\right)\right].$$

Используя теперь формулу

$$\pi \operatorname{ctg} p\pi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+j} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p-j},$$

мы можем написать для коэффициента при θ_1^2

$$\frac{1}{16p}\left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p-1}\right) \pi \operatorname{ctg} p\pi = \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0}\,\pi}{4(1-\theta_0)\sqrt{\theta_0}}.$$

Аналогичным образом можно найти коэффициент при θ_2^2. Коэффициенты при $\theta_1^2\theta_2$ и θ_1^4 являются более сложными, требуя разложения на простые дроби величин, обратных произведениям трех или четырех сомножителей вида $(2j-2k)^2-\theta_0$, однако процедура остается той же. Дальнейшие подробности об этих разложениях можно найти в оригинальной работе Хилла и в «Treatise on the Lunar Theory» Брауна[1]).

Хилл приводит следующие значения членов, составляющих $\Delta(0)$:

Член нулевого порядка	+1,00000 00000 00000 0
Члены 4-го порядка	+0,00180 46110 93422 7
Члены 8-го порядка	+ 1808 63109 9
Члены 12-го порядка	+ 64478 6
Сумма	+1,00180 47920 21011 2

откуда посредством (115) или (116) находим

$$c = 1{,}07158\,32774\,16016.$$

[1]) E. W. Brown, Treatise on the Lunar Theory, Cambridge Univ. Press, London, 1896; Dover Publications, New York, 1960.

Для контроля Хилл представляет это значение в качестве приближенного решения в уравнения (110), последовательно исключает q_{-1}, q_1, q_{-2}, q_2, q_{-3}, q_3, q_{-4}, которые все являются неизвестными, подлежащими рассмотрению, и находит следующий улучшенный результат:

$$\mathrm{c} = 1{,}07158\,32774\,16012.$$

Для нахождения движения перигея мы имеем

$$\frac{dl}{d\tau} = \mathrm{c}, \qquad \frac{dl}{dt} = \mathrm{c}\,(n - n'),$$

где l — среднее значение средней аномалии, или

$$\bar{l} = \lambda - \bar{\tilde{\omega}}.$$

Определим теперь c уравнением

$$\frac{dl}{dt} = cn.$$

Тогда, поскольку

$$\frac{n - n'}{n} = 1 - m = \frac{1}{1 + \mathrm{m}},$$

имеем

$$c = \frac{\mathrm{c}}{1 + \mathrm{m}}$$

и

$$\frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{dt} = (1 - c)\,n = \left(1 - \frac{\mathrm{c}}{1 + \mathrm{m}}\right) n.$$

Окончательное значение с при указанном значении параметра m дает

$$\frac{1}{n}\,\frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{dt} = 0{,}00857\,25730\,04864.$$

С имеющимся теперь значением с можно было бы вернуться к уравнениям (110), чтобы получить q_j путем последовательных приближений, полагая q_0 равным $+1$. Затем можно было бы найти p' из второго уравнения (92) и впоследствии δu и δs из уравнения (87). Эта процедура является до некоторой степени более длинной, чем это необходимо. Единственная цель преобразования исходных уравнений (84) заключается в получении уравнения, из которого можно было бы определить с, а после того как это сделано, для получения δu и δs могут быть использованы уравнения (84). Это было фактически сделано Брауном в его решении основной задачи.

Поскольку E входит в решение относительно q как постоянная интегрирования, то эта же постоянная присутствует как множитель при p' и при δu и δs. Эта постоянная E должна быть связанной с постоянной эксцентриситета возмущенной орбиты Луны. Постоянной E можно приписать точный смысл путем сравнения некоторого коэффициента в одной из координат с его значением в эллиптическом движении. В теории Брауна постоянная эксцентриситета определяется при помощи коэффициентов при членах ζ^{c} и ζ^{-c} в $u\zeta^{-1}$ таким образом, чтобы разность между этими коэффициентами равнялась ae. Это значение должно не изменяться, когда вычисляются члены более высоких порядков относительно e, e'.

Как было отмечено ранее, значение c, полученное из бесконечного определителя, дает главную часть движения перигея. Члены с множителями e^2, e^4, ... получаются в виде дополнительных членов с в ходе полного решения уравнений (84).

26. Движение узла. Уравнение для z имеет следующий вид:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=-\frac{k^2m'z}{\Delta^3},$$

если плоскость xy совпадает с плоскостью эклиптики. В первом приближении мы пренебрегаем более высокими степенями z, которые появляются из разложения Δ^{-3}; далее мы пренебрегаем членами в возмущающей функции, которые содержат множителем a/a', а также эксцентриситетами орбит Земли и Луны. Это осуществляется путем записи a'^3 вместо Δ^3. Если затем заменить k^2m' на $n'^2a'^3$, то уравнение для z принимает вид

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{\mu}{r^3}+n'^2\right)z=0.$$

Это уравнение необходимо решить, вводя сначала вместо r^{-3} его значение из вариационной орбиты.

В качестве независимой переменной оказывается удобным использовать $\tau=(n-n')t+\text{const}$. Как и прежде, мы вводим $\varkappa$ посредством соотношения $\mu=(n-n')^2\varkappa$ и параметр $\mathfrak{m}$ равенством $\mathfrak{m}=n'/(n-n')$. Тогда уравнение для z приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}+\left(\frac{\varkappa}{r^3}+\mathfrak{m}^2\right)z=0. \qquad (117)$$

Это уравнение имеет в точности такую же форму, как и уравнение Хилла (96); чтобы получить последнее, не требуется никакого сложного преобразования нашего уравнения. Функция $M=\varkappa/r^3+\mathfrak{m}^2$ представляет собой ряд (108) по дугам, кратным 2τ, при условии, что постоянный член увеличен на $\mathfrak{m}^2$ и равен

$$M_0=1{,}17804\,45712\,77166.$$

Для получения главной части движения узла можно использовать метод бесконечного определителя. Эта проблема фактически была решена Адамсом при помощи метода, отчасти сходного с методом Хилла для перигея.

В 1936 г. Браун писал: «Прошло около шестидесяти лет со времени опубликования работ Хилла и Адамса, и ввиду этого теперь, вероятно, не будет нетактичным показать, что эта высокая степень точности может быть получена совершенно элементарными методами и сравнительно небольшим трудом». Затем он переходит к доказательству того, что при помощи дифференциального метода можно получить решение с точностью до $2q$ десятичных знаков, если в распоряжении имеются результаты предварительных вычислений с точностью до q десятичных знаков. Подробности метода Брауна можно найти в следующем разделе. Представляется поучительным построить сначала предварительное решение, не прибегая к использованию каких-либо результатов предыдущей работы. Основными данными являются коэффициенты ряда для M вида

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + 2\sum M_j \cos 2j\tau, \\
M_0 &= +1{,}17804\,45712\,77166 \\
M_1 &= +0{,}01261\,68462\,48930 \\
M_2 &= +\phantom{0{,}000}12\,57766\,75006 \\
M_3 &= +\phantom{0{,}0000}12059\,39900 \\
M_4 &= +\phantom{0{,}000000}113\,02926 \\
M_5 &= +\phantom{0{,}0000000}1\,04375 \\
M_6 &= +\phantom{0{,}0000000000}954 \\
M_7 &= +\phantom{0{,}000000000000}8
\end{aligned}
$$

при

$$\mathrm{m} = 0{,}08084\,89338\,08312.$$

Из свойств вариационной орбиты известно, что

$$
\begin{aligned}
M_0 &= 1 + 2\mathrm{m} + \ldots, \\
M_j &= O(\mathrm{m}^{2j}).
\end{aligned}
$$

Если бы ряд для M был ограничен членом M_0, то уравнение для z приняло бы следующий вид:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + M_0 z = 0,$$

а его решением было

$$z = \gamma \sin F,$$

в котором γ — постоянная интегрирования, а

$$
\begin{aligned}
F &= g_0\tau + \mathrm{const}, \\
g_0 &= \sqrt{M_0}.
\end{aligned}
$$

Ввиду присутствия в коэффициенте при z в уравнении (117) членов с аргументами вида $2j\tau$ решение этого уравнения можно представить в виде

$$z = \gamma \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j \sin(F + 2j\tau), \tag{118}$$

причем $z_0 = +1$ и

$$F = \mathrm{g}\tau + \mathrm{const},$$

где g отличается от g_0 на результат влияния периодических членов в M.

Подстановка выражения (118) дает

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\gamma \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\mathrm{g} + 2j)^2 z_j \sin(F + 2j\tau),$$

$$\left(\frac{\varkappa}{r^3} + \mathrm{m}^2\right) z = +\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{j-k} \sin(F + 2j\tau),$$

причем $M_{-k}=M_k$. Уравнение (117) требует теперь, чтобы для каждого значения j выполнялось условие

$$\ldots -M_2z_{j-2}-M_1z_{j-1}+[(g+2j)^2-M_0]\,z_j-M_1z_{j+1}-M_2z_{j+2}\ldots=0.$$

Пять центральных уравнений из этой бесконечной системы линейных однородных уравнений имеют вид

$$\begin{aligned}
&[(g-4)^2-M_0]\,z_{-2} - M_1z_{-1} - M_2z_0 - M_3z_1 - M_4z_2=0,\\
&-M_1z_{-2}+[(g-2)^2-M_0]\,z_{-1} - M_1z_0 - M_2z_1 - M_3z_2=0,\\
&-M_2z_{-2} - M_1z_{-1}+(g^2-M_0)\,z_0 - M_1z_1 - M_2z_2=0,\\
&-M_3z_{-2} - M_2z_{-1} - M_1z_0 + [(g+2)^2-M_0]\,z_1 - M_1z_2=0,\\
&-M_4z_{-2} - M_3z_{-1} - M_2z_0 - M_1z_1+[(g+4)^2-M_0]\,z_2=0,
\end{aligned}$$

и должны быть решены при $z_0=+1$.

Из среднего уравнения при $z_0=+1$ и z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2 и т. д., равных нулю, мы получаем очевидное первое приближение

$$g_0=\sqrt{M_0}=1{,}08537\,76.$$

Тогда при $g=g_0$ второе и четвертое уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
(4-4g_0)\,z_{-1}-M_2z_1&=M_1,\\
-M_2z_{-1}+(4+4g_0)\,z_1&=M_1.
\end{aligned}$$

В силу малости M_2 по сравнению с $4\pm4g_0$ решение в первом приближении имеет следующий вид:

$$z_{-1}=\frac{M_1}{4-4g_0}=-0{,}03694,$$

$$z_1=\frac{M_1}{4+4g_0}=+0{,}00151.$$

Аналогично

$$z_{-2}=\frac{M_1z_{-1}+M_2+M_3z_1}{16-8g_0}=-0{,}00004\,65,$$

$$z_2=\frac{M_1z_1+M_2+M_3z_{-1}}{16-8g_0}=+0{,}00000\,59.$$

С этими предварительными значениями z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2 мы вычисляем

$$\begin{aligned}
g_1^2&=M_0+M_1(z_{-1}+z_1)+M_2(z_{-2}+z_2)=\\
&=1{,}17759\,74,\\
g_1&=1{,}08517\,16.
\end{aligned}$$

Повторение этих вычислений с новым приближением для g и приближенными значениями для z_j, полученными выше, дает

$$
\begin{aligned}
z_{-1} &= -0{,}03698\,390 && (-3)\\
z_1 &= + \quad 151\,220 && (+2)\\
z_{-2} &= - \quad 4\,65746 && (-4)\\
z_2 &= + \quad 58673 && (+8)\\
z_{-3} &= - \quad 1753 && (-2)\\
z_3 &= + \quad 300 && (0)
\end{aligned}
$$

и с этими значениями находим

$$g_2^2 = 1{,}17759\,70255,$$
$$g_2 = 1{,}08517\,14268 \ (-2).$$

Числа в скобках дают поправки, в которых эти результаты нуждаются в последнем написанном знаке в соответствии с решением, полученным Коуэллом и использованным в лунной теории Брауна. Следующее приближение дает z_j для $|j| \geqslant 2$ с точностью по крайней мере до двенадцати десятичных знаков соответственно решению Коуэлла; чтобы получить двенадцатый десятичный знак для z_1, z_{-1} и g, необходимо еще одно приближение. Эта процедура крайне проста и быстро сходится, за исключением вычисления z_{-1}, которое подвержено влиянию малого делителя $4-4g = -4m + \ldots$. Этим объясняется сравнительно большое численное значение коэффициента z_{-1}. В z получается член $\gamma z_{-1} \sin(F-2\tau)$, который соответствует главному возмущению в широте, полученному в разд 12 этой главы.

27. Метод дифференциальной поправки Брауна. Метод, предложенный Брауном, дает возможность выполнить приближение за один шаг от q десятичных знаков до $2q$ знаков. Тот факт, что в распоряжении имеются коэффициенты M с точностью до 15 десятичных знаков, ограничивает практическую пригодность этого метода до $q \leqslant 8$. Процедура заключается в следующем.

Допустим, что из предварительных вычислений значения g и z_j получены с точностью до 8 десятичных знаков. Мы желаем их иметь с точностью до 15 десятичных знаков. Напишем в g и z_j нули вместо неизвестных остальных десятичных знаков и подставим в дифференциальные уравнения, выполняя вычисления с точностью до 15 десятичных знаков. Коэффициент члена с аргументом $F+2j\tau$ дает для $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$[(g+2j)^2 - M_0]\, z_j - \sum_k M_k (z_{j+k} + z_{j-k}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{119}$$

Из-за неточности предварительных значений с 8 знаками подстановка этих значений, обозначаемых через g_8, $z_{8,j}$, в (119) даст

$$[(g_8+2j)^2 - M_0]\, z_{8,j} - \sum_k M_k (z_{8,j+k} + z_{8,j-k}) = R_j. \tag{120}$$

Положим

$$g - g_8 = \delta g, \qquad z_j - z_{8,j} = \delta z_j;$$

тогда разность между (119) и (120), если пренебречь квадратами и произведениями δg, δz_j, равна

$$[(g_8+2j)^2-M_0]\,\delta z_j-\sum_k M_k(\delta z_{j+k}+\delta z_{j-k})+2(g_8+2j)\,z_{8,j}\,\delta g=-R_j. \quad (121)$$

Умножим (120) на δz_j, (121) — на $z_{8,j}$ и составим сумму разностей для всех значений j. Произведения $z_{8,j}\delta z_j$ исчезнут, и получится следующее уравнение:

$$2\delta g\sum(g_8+2j)\,z_{8,j}^2=-\sum R_j z_{8,j},$$

которое дает δg без необходимости находить δz_j. После того как получено δg, значения δz_j вычисляются из (121) последовательными приближениями. С другой стороны, в решении относительно z_{-1} имеет место потеря точности, обусловленная делителем $-0,34\ldots$. Вследствие этого окончательные результаты будут достоверными с точностью до пятнадцати, а не до шестнадцати десятичных знаков. Браун предпочитает использовать в качестве своих начальных значений результаты, полученные Коуэллом и округленные до девяти десятичных знаков, и получает

$$g=1,08517\,14265\,58189.$$

Для нахождения движения узла мы имеем

$$\frac{dF}{d\tau}=g, \quad \frac{dF}{dt}=g(n-n'),$$

где F — среднее значение аргумента широты, или

$$F=\bar{\lambda}-\bar{\Omega}.$$

Определим теперь g уравнением

$$\frac{dF}{dt}=gn.$$

Поскольку

$$\frac{n-n'}{n}==1-\mathfrak{m}=\frac{1}{1+\mathfrak{m}},$$

то

$$g=\frac{g}{1+\mathfrak{m}}$$

и

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt}=(1-g)\,n=\left(1-\frac{g}{1+\mathfrak{m}}\right)n.$$

Значение g, приведенное выше, вместе со значением $\mathfrak{m}$, используемым всюду в этой главе, дает

$$\frac{1}{n}\frac{d\bar{\Omega}}{dt}=-0,00399\,91645\,34949.$$

Как и в случае движения перигея, полученный результат представляет собой главную часть движения узла. В ходе систематического построения теории Луны получаются дополнительные члены, имеющие множителями e^2, e'^2, γ^2, ...

Браун показывает, что этот дифференциальный метод можно применить также для определения с. Эта задача сложнее, чем вычисление g, так как здесь необходимо рассмотреть систему из двух дифференциальных уравнений. Особенно подходит для этой задачи использование прямоугольных координат, вращающихся со средней скоростью Луны. Эти координаты были приняты Эйлером для его второй теории Луны, опубликованной в 1772 г. Дифференциальный численный метод Брауна приводит к значению с с точностью до пятнадцати десятичных знаков в полном согласии с результатом Хилла.

Из этих результатов очевидно, что в случаях, когда не требуется никакого буквенного разложения по степеням параметра $\mathfrak{m}$, преобразование, рассмотренное в разд. 23 и 24, является излишним и нет необходимости вычислять бесконечный определитель. Эти соображения никоим образом не умаляют достоинств двух известных работ Хилла по теории Луны. Их оригинальность и изящество обеспечивают им незыблемое место среди шедевров литературы в этой области. Кроме того, они внесли важный вклад в методы небесной механики, который не ограничивается теорией Луны. Эта сторона работ Хилла подчеркивается в часто цитируемом высказывании Пуанкаре в предисловии к первому тому его «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste»[1]) и, кроме того, в его же предисловии к «Collected Mathematical Works» Хилла: «В этом труде ... можно увидеть источник большей части прогресса, который был совершен наукой с тех пор».

28. Лунная теория Брауна. Важная характерная особенность метода Хилла, предопределяющая возможность дальнейшего совершенствования и уточнения решения основной задачи, заключается в том, что, как только получены главные части движения перигея и узла, можно определить из системы линейных уравнений коэффициенты членов любого порядка относительно e, e', γ и a/a' в любой комбинации, если найдены члены более низкого порядка. На каждом этапе все степени параметра $\mathfrak{m}$ включаются в численные значения этих коэффициентов, тогда как e, e', γ и a/a' остаются в алгебраическом виде. Для этой цели можно использовать уравнения (49) или эквивалентные им уравнения (48). Для получения членов более низких порядков выгодны уравнения (50). Это требует разложения $\varkappa u/r^3$ и $\varkappa s/r^3$ по степеням δu и δs, если $u = u_0 + \delta u$, $s = s_0 + \delta s$.

Чтобы показать характерные особенности этой процедуры, запишем уравнения (50) с точностью до вторых степеней δu и δs:

$$D^2\delta u + 2\mathfrak{m}D\delta u + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(\delta u + \delta s) =$$
$$= \varkappa u_0^{-1/2}s_0^{-3/2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta u}{u_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta s}{s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta u\delta s}{u_0 s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta s)^2}{s_0^2}\right],$$

$$D^2\delta s - 2\mathfrak{m}D\delta s + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(\delta u + \delta s) =$$
$$= \varkappa u_0^{-3/2}s_0^{-1/2}\left[-\frac{3}{2}\frac{\delta u}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta s}{s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta u\delta s}{u_0 s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta s)^2}{s_0^2}\right].$$

Члены с множителем e удовлетворяют уравнениям

$$D^2\delta_1 u + 2\mathfrak{m}D\delta_1 u + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(\delta_1 u + \delta_1 s) = \varkappa u_0^{-1/2}s_0^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta_1 u}{u_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta_1 s}{s_0}\right),$$
$$D^2\delta_1 s - 2\mathfrak{m}D\delta_1 s + \frac{3}{2}\mathfrak{m}^2(\delta_1 u + \delta_1 s) = \varkappa u_0^{-3/2}s_0^{-1/2}\left(-\frac{3}{2}\frac{\delta_1 u}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta_1 s}{s_0}\right).$$

---

[1]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892—1899.

Пусть $\exp il = \Lambda$; тогда $D\Lambda^k = kc\Lambda^k$, и решение получается в следующем виде:

$$\delta_1 u = \sum a_{j,c}\zeta^{2j+1}\Lambda + \sum a_{j,-c}\zeta^{2j+1}\Lambda^{-1},$$
$$\delta_1 s = \sum a_{-j-1,-c}\zeta^{2j+1}\Lambda + \sum a_{-j-1,c}\zeta^{2j+1}\Lambda^{-1},$$

причем коэффициенты $a_{j,c}$, $a_{-j,-c}$ становятся известными в виде численных коэффициентов, умноженных на e.

Затём можно получить члены с множителем e^2 из уравнений

$$D^2\delta_2 u + 2\mathrm{m}D\delta_2 u + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(\delta_2 u + \delta_2 s) =$$
$$= \varkappa u_0^{-1/2}s_0^{-3/2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta_2 u}{u_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta_2 s}{s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta_1 u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta_1 u\delta_1 s}{u_0 s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta_1 s)^2}{s_0^2}\right],$$
$$D^2\delta_2 s - 2\mathrm{m}D\delta_2 s + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(\delta_2 u + \delta_2 s) =$$
$$= \varkappa u_0^{-3/2}s_0^{-1/2}\left[-\frac{3}{2}\frac{\delta_2 u}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta_2 s}{s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta_1 u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta_1 u\delta_1 s}{u_0 s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta_1 s)^2}{s_0^2}\right].$$

Функции $u_0^{-3/2}s_0^{-3/2}$, $u_0^{-1/2}s_0^{-5/2}$, $u_0^{-5/2}s_0^{-1/2}$, на которые умножаются $\delta_2 u$ и $\delta_2 s$, как легко видеть, представляют собой ряды, содержащие четные степени ζ. С другой стороны, функции $u_0^{-5/2}s_0^{-3/2}$, $u_0^{-3/2}s_0^{-5/2}$, $u_0^{-1/2}s_0^{-7/2}$ и т. д., с которыми перемножаются квадратичные члены в $\delta_1 u$, $\delta_1 s$, являются рядами, содержащими только нечетные степени ζ. Поэтому эти квадратичные слагаемые получаются как известные функции следующего вида:

$$\sum A_{j,2c}\zeta^{2j+1}\Lambda^2 + \sum A_{j,0\cdot c}\zeta^{2j+1} + \sum A_{j,-2c}\zeta^{2j+1}\Lambda^{-2},$$
$$\sum A_{-j-1,-2c}\zeta^{2j+1}\Lambda^2 + \sum A_{-j-1,0\cdot c}\zeta^{2j+1} + \sum A_{-j-1,2c}\zeta^{2j+1}\Lambda^{-2},$$

умноженные на e^2.

Задача заключается в том, чтобы найти решение для $\delta_2 u$ и $\delta_2 s$, имеющее тот же вид, что и эти известные слагаемые в правых частях уравнений. Она напоминает задачу, рассмотренную для вариационной орбиты в разд. 20, с той лишь разницей, что присутствие множителей $\varkappa u_0^{-1/2}s_0^{-3/2}$ и т. д. заставляет применить процедуру последовательных приближений.

Члены с множителем e^3 будут иметь вид ζ^{2j+1}, умножаемого на Λ^3, Λ, Λ^{-1}, Λ^{-3}. Члены $\zeta^{2j+1}\Lambda^{\pm 1}$ имеют тот же вид, что и члены, содержащие множителем e. Чтобы учесть влияние этих членов, необходимо получить поправку к движению перигея. Эта новая часть c имеет множителем e^2. Эта особенность повышает сложность решения относительно членов с множителем e^3, но не представляет существенных затруднений; следующая поправка к c получается при вычислении членов с множителем e^5.

Чтобы включить в решение относительно u и s члены, которые зависят от e', a/a' и γ, необходимо, конечно, добавить новые члены к возмущающей функции; уравнения (42), (50) и эквивалентные им уравнения применимы только в том случае, если этими постоянными пренебрегают.

Замечания. Литература

Браун в своем фундаментальном труде (E. W. B r o w n, An Introductory Treatise on the Lunar Theory, Cambridge Univ. Press, 1896) подробно излагает все основные методы, которые применялись при изучении движения Луны, с полными ссылками и большим количеством поясняющих примечаний. Эта книга переиздана в 1960 г.

Работы Брауна в Mem. Roy. Astron. Soc. (**53**, 39—116, 163—202; **54**, 1—63; **57**, 51—145; **59**, 1—103 (1897—1908)) содержат полное изложение теории движения Луны в соответствии с его собственными вычислениями, включая влияние сжатия Земли и Луны и планетные возмущения. В журнале Amer. J. Math. (**17**, 318, 1895) он дает общий очерк метода, использованного им при решении основной задачи. Браун при содействии Хедрика превратил свою теорию в «Таблицы движения Луны», опубликованные в 1919 г. в шести частях издательствами Иельского и Кембриджского университетов. Таблицы Брауна с 1923 по 1959 г. использовались для вычисления положений Луны, публикуемых в национальных Ежегодниках. С 1960 г. теория Брауна продолжает применяться, однако с целью получения дополнительной значащей цифры в координатах его тригонометрические ряды вычисляются непосредственно, без помощи таблиц.

Теория Делонэ движения Луны изложена в Mém. Acad. Sci., Paris (**28**, 1860; **29**, 1867). С тех пор его метод интегрирования нашел много других важных приложений; преобразования Делонэ теперь обычно называются контактными преобразованиями.

Хилл описал свой метод вращающейся системы прямоугольных координат в Amer. J. Math. (**1**, 5—26, 129—147, 245—260, 1878) и ввел бесконечный определитель в отдельной работе, опубликованной в 1877 г. и перепечатанной в Acta Math. (**8**, 1—36, 1886). Все его работы, достойные тщательного изучения, собраны и опубликованы в четырех томах, изданных в 1905—1907 гг. Институтом Карнеджи. Относительно законности бесконечного определителя см. «Курс современного анализа» Уиттекера и Ватсона; мы в значительной степени следовали методу решения, изложенному в гл. XIX этого руководства. Для дальнейшего изучения рекомендуются работа Хилла в Acta Math. и рассмотрение этой проблемы в «Лекциях по небесной механике», принадлежащих Пуанкаре (том 2, часть 2).

Наше численное решение для движения узла основано на работе Брауна (Astron. J., **45**, 84, 1936), в которой можно также найти аналогичные вычисления движения перигея. Адамс получил решение для движения узла до того, как Хилл опубликовал свою работу о движении перигея, однако Адамс напечатал краткое сообщение о своей работе в Mon. Not. Roy. Astron. Soc. (**38**, 43, 1877) только после появления статьи Хилла в печати. Подробности вычислений Адамса были опубликованы посмертно в его собрании сочинений (том 1, 181—188, 1896—1900). Работа Коуэлла в Amer. J. Math. (**18**, 99, 1896), содержащая решение задачи Адамса, была использована Брауном в его теории Луны.

Введение p вместо m в левые части уравнений (54) было сделано Пуанкаре в его «Лекциях по небесной механике» (том 2, часть 2, 1907). Недавно члены самого низкого порядка были подробно описаны Армеро (J. G. A r m e r o, Rev. acad. columbiana cienc. exact. fis. y nat., **6**, 500—576, 1946).

Исчезновение множителя m из определенных членов возмущающей функции обсуждено Гогу (M. C. G o g o u, Ann. Obs. Paris, **18**, E1—26, 1885).

Применение метода вариации произвольных постоянных к спутниковым системам сделано Тиссераном в его четырехтомном «Трактате по небесной механике» (1891—1896) и Г. Струве в Poulkovo Obs. Suppl. 6 (1888). Оба автора приводят также примеры изменения a, обусловленного сжатием главной планеты и возмущениями от остальных спутников.