Глава XIII

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ

1. Введение. В гл. XI был развит метод определения движения материальной точки при возмущающем влиянии других материальных точек относительно некоторой центральной материальной точки, которая настолько массивна, что оказывает доминирующее воздействие на эту систему. В этом методе, известном под различными названиями — метод вариации элементов, вариации параметров или вариации произвольных постоянных, — шесть непрерывно изменяющихся оскулирующих элементов орбиты возмущаемого тела выражаются в виде сумм тригонометрических рядов, аргументы которых являются либо линейными функциями от времени, либо линейными функциями от некоторых других переменных, связанных с временем посредством формул эллиптического движения. В настоящей главе будет изложен другой метод, в котором отклонения тела от чисто эллиптической орбиты выражаются как возмущения координат, соответствующих движению по этому эллипсу. Этот метод во многих отношениях сходен с методом Энке для частных возмущений, рассмотренным в гл. V, однако здесь мы будем рассматривать абсолютные возмущения полярных координат, а также абсолютные возмущения прямоугольных координат.

Хотя метод вариации произвольных постоянных в принципе резко отличается от метода вычислений возмущений в координатах, фактически представляется возможным объединить различными способами оба эти метода в один. Мы рассмотрим метод, примененный Ньюкомом к четырем внутренним планетам, для которых эксцентриситет, перигелий, наклонность и узел предполагаются меняющимися строго пропорционально времени, а периодические возмущения долготы, широты и радиуса-вектора, будучи прибавлены к соответствующим координатам в этом изменяющемся эллипсе, дают действительное положение планеты.

В заключение мы опишем метод Брауэра, который лучше приспособлен к вычислениям возмущенных прямоугольных координат, чем любой другой метод классической планетной теории.

2. Дифференциальные уравнения. Мы исходим из дифференциальных уравнений относительного движения, изученных в предшествующих главах, рассматривая для простоты одну возмущаемую планету и одну возмущающую планету, так как эти рассуждения легко обобщить на большее число тел. Пусть требуется найти возмущения планеты с массой m, движущейся относительно Солнца, масса которого равна единице, и возмущаемой другой планетой с массой m'. Полагая μ вместо

$k^2(1+m)$, приводим уравнения движения тела m относительно Солнца к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

где прямоугольные координаты относятся к любой неподвижной плоскости, проходящей через Солнце, $r^2=x^2+y^2+z^2$, а возмущающая функция R имеет следующее выражение:

$$R=k^2m'\left\{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{-1/2}-\frac{x'x+y'y+z'z}{r'^3}\right\}. \tag{2}$$

Если долготу, отсчитываемую в этой основной плоскости, обозначить через v, радиус-вектор — через r, а широту — через B, то в этих трех переменных дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2}-r\cos^2B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2-r\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}&=\frac{\partial R}{\partial r},\\ \frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2B\frac{dv}{dt}\right)&=\frac{\partial R}{\partial v},\\ \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dB}{dt}\right)+r^2\sin B\cos B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2&=\frac{\partial R}{\partial B} \end{aligned} \tag{3}$$

и

$$R=k^2m'\left[(r'^2-2rr'\cos H+r^2)^{-1/2}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right], \tag{4}$$

где

$$\cos H=\cos B\cos B'\cos(v-v')+\sin B\sin B'. \tag{5}$$

Вообще проще сохранить прямоугольную координату z вместо широты B и выбрать такие r и v, чтобы

$$x=\sqrt{r^2-z^2}\cos v,\quad y=\sqrt{r^2-z^2}\sin v. \tag{6}$$

Допустим теперь, что каждая координата возмущаемой планеты разделена на две части таким образом, что

$$x=x_0+\delta x,\quad y=y_0+\delta y,\quad z=z_0+\delta z, \tag{7}$$

первая из которых удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2}+\frac{\mu x_0}{r_0^3}&=0,\\ \frac{d^2y_0}{dt^2}+\frac{\mu y_0}{r_0^3}&=0,\\ \frac{d^2z_0}{dt^2}+\frac{\mu z_0}{r_0^3}&=0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$, а члены δx, δy, δz имеют порядок возмущающих сил.

Очевидно, что к x_0, y_0, z_0 можно было бы прибавить определенные функции времени t, не нарушая этим справедливость дифференциальных уравнений (8) для этих величин. Легко также видеть, что в этом случае для представления положения планеты необходимо было бы вычесть эти же функции из δx, δy, δz; поэтому такое разделение координат на две части является до некоторой степени произвольным. Эту неопределенность можно устранить, выбирая для постоянных интегрирования значения, согласующиеся с характером элементов, с помощью которых были получены x_0, y_0, z_0. Если эти элементы являются оскулирующими в некоторую эпоху, то, очевидно, эти постоянные интегрирования должны быть определены так, чтобы δx, δy, δz вместе со своими первыми производными по времени обратились в нуль в эту же эпоху. С другой стороны, часто бывает выгодно использовать средние элементы, определенные таким образом, чтобы некоторые члены возмущений тождественно обращались в нуль, и в этом случае постоянные интегрирования должны быть определены в соответствии с определениями этих средних элементов. Ниже мы увидим, что можно связать каждую из шести независимых постоянных интегрирования с одним из шести элементов таким образом, чтобы возмущения координат уменьшились до своих наименьших возможных численных значений.

Положим теперь

$$r = r_0 + \delta r, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \\ &= \frac{\partial R}{\partial r}\,dr + \frac{\partial R}{\partial v}\,dv + \frac{\partial R}{\partial B}\,dB. \end{aligned} \tag{10}$$

Последнее выражение представляет собой дифференциал R, когда изменяются только координаты возмущаемой планеты. Мы имеем также

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{11}$$

что, очевидно, верно, если в левой части R выражается через r и любые две остальные координаты, которые делают x/r, y/r, z/r независимыми от r.

Умножая уравнения (1) соответственно на $2dx$, $2dy$, $2dz$ и складывая произведения, а затем интегрируя, получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 2\int dR, \tag{12}$$

где μ/a — произвольная постоянная интегрирования; ясно, что мы имеем право считать ее такой, чтобы удовлетворялось следующее уравнение задачи движения двух тел:

$$\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu}{a} = 0; \tag{13}$$

если имеется какая-нибудь остаточная постоянная, то ее необходимо считать включенной в $2\int dR$. В полярных координатах уравнение (12) принимает вид

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2 B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 2\int dR. \tag{14}$$

С другой стороны, умножая уравнения (1) соответственно на x, y, z и складывая произведения, мы получаем, используя (11),

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu}{r} = r\frac{\partial R}{\partial r}, \tag{15}$$

или в полярных координатах

$$r\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\cos^2 B\left(\frac{dv}{dt}\right)^2-r^2\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r}=r\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{16}$$

Сложение (16) с (14) дает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}+\frac{\mu}{a}=2\int dR+r\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{17}$$

Если из этого уравнения вычесть уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2r_0^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r_0}-\frac{\mu}{a}=0,$$

то, используя (9), получим

$$\frac{d^2(r_0\delta r)}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}r_0\delta r=2\int dR+r\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2}+\frac{\mu(\delta r)^2}{r_0^2 r}. \tag{18}$$

Два последних члена правой части этого уравнения имеют порядок квадрата возмущающей силы; если пренебречь квадратом возмущающей силы, то эти члены можно отбросить.

При помощи аналогичного процесса можно преобразовать уравнения (1) в следующие:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta x&=\frac{\partial R}{\partial x}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu x,\\
\frac{d^2\delta y}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta y&=\frac{\partial R}{\partial y}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu y,\\
\frac{d^2\delta z}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta z&=\frac{\partial R}{\partial z}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu z.
\end{aligned} \tag{19}$$

Для краткости мы полагаем теперь

$$\begin{aligned}
Q_r&=2\int dR+r\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2}+\frac{\mu(\delta r)^2}{r_0^2 r},\\
Q_x&=\frac{\partial R}{\partial x}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu x,\\
Q_y&=\frac{\partial R}{\partial y}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu y,\\
Q_z&=\frac{\partial R}{\partial z}+\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r^3}\right)\mu z.
\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда дифференциальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(r_0\delta r)}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}r_0\delta r&=Q_r,\\
\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta x&=Q_x,\\
\frac{d^2\delta y}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta y&=Q_y,\\
\frac{d^2\delta z}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}\delta z&=Q_z.
\end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку μ/r_0^3 является известной функцией t, а все Q имеют порядок возмущающей силы и, следовательно, в первом приближении также являются известными функциями t, уравнения (21) представляют собой линейные уравнения с известными правыми частями.

3. Интегрирование. Чтобы проинтегрировать уравнения (21), рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение без правой части

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}q=0. \tag{22}$$

Согласно теории этого класса дифференциальных уравнений, общее решение относительно q имеет вид

$$q=K_1q_1+K_2q_2, \tag{23}$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные, а q_1 и q_2 — любые два частных решения, которые не зависят друг от друга. Тогда необходимо должны существовать следующие два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}q_1&=0,\\ \frac{d^2q_2}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}q_2&=0.\end{aligned} \tag{24}$$

Путем исключения μ/r_0^3 из этих уравнений получаем

$$q_1\frac{d^2q_2}{dt^2}-q_2\frac{d^2q_1}{dt^2}=0. \tag{25}$$

Это выражение является точным дифференциалом; интегрируя его, получаем

$$q_1\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dq_1}{dt}=\text{const}. \tag{26}$$

Эта постоянная является произвольной и, исключая значение нуль, может быть выбрана какой угодно; для простоты мы примем ее равной единице.

Рассмотрим теперь более общее уравнение с правой частью

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{\mu}{r_0^3}q=Q. \tag{27}$$

Исключая μ/r_0^3 из этого уравнения и уравнений (24), получим

$$q_1\frac{d^2q}{dt^2}-q\frac{d^2q_1}{dt^2}=Qq_1,$$

$$q_2\frac{d^2q}{dt^2}-q\frac{d^2q_2}{dt^2}=Qq_2.$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$\begin{aligned}q_1\frac{dq}{dt}-q\frac{dq_1}{dt}&=K_2+\int q_1Q\,dt,\\ q_2\frac{dq}{dt}-q\frac{dq_2}{dt}&=-K_1+\int q_2Q\,dt,\end{aligned} \tag{28}$$

откуда в силу интеграла (26)

$$\begin{aligned}q&=K_1q_1+K_2q_2+q_2\int q_1Q\,dt-q_1\int q_2Q\,dt,\\ \frac{dq}{dt}&=K_1\frac{dq_1}{dt}+K_2\frac{dq_2}{dt}+\frac{dq_2}{dt}\int q_1Q\,dt-\frac{dq_1}{dt}\int q_2Q\,dt.\end{aligned} \tag{29}$$

Второе из написанных уравнений можно было бы получить также дифференцированием первого. Произвольные постоянные K_1 и K_2 можно считать содержащимися в интегралах $\int q_2 Q\,dt$ и $\int q_1 Q\,dt$; в последующем мы будем записывать уравнения этим способом.

Применяя эти результаты к уравнениям (21), мы имеем

$$\begin{aligned} r_0\delta r &= q_2 \int q_1 Q_r\,dt - q_1 \int q_2 Q_r\,dt, \\ \delta x &= q_2 \int q_1 Q_x\,dt - q_1 \int q_2 Q_x\,dt, \\ \delta y &= q_2 \int q_1 Q_y\,dt - q_1 \int q_2 Q_y\,dt, \\ \delta z &= q_2 \int q_1 Q_z\,dt - q_1 \int q_2 Q_z\,dt. \end{aligned} \tag{30}$$

Поскольку $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, эти уравнения должны удовлетворять следующему соотношению:

$$r_0\delta r = x_0\delta x + y_0\delta y + z_0\delta z + \frac{1}{2}(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - \frac{1}{2r_0^2}(r_0\delta r)^2. \tag{31}$$

Однако необходимо использовать все уравнения (30), так как при употреблении метода последовательных приближений, которым мы вынуждены воспользоваться в этом случае, мы не можем получить значения Q_x, Q_y, Q_z до тех пор, пока не станет известным δr. В общем случае эти уравнения содержат девять произвольных постоянных: одну, прибавленную к члену $2\int dR$ в Q_r, и восемь, введенных восемью интегралами (30). Однако эти восемь постоянных сведутся к шести независимым друг от друга при помощи условия (31); и константа, прибавленная к $2\int dR$, определится как функция от этих шести при помощи следующего условия, выведенного из интеграла (12):

$$\frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz_0}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt} + \frac{\mu}{r_0^3 r}\,r_0\delta r = \\ = \int dR - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)^2\right]. \tag{32}$$

В случае оскулирующих элементов все постоянные определяются из условия обращения каждого интегрального выражения в нуль при $t=0$.

4. Способ Ганзена. Существует замечательный способ, введенный Ганзеном для приведения правых частей уравнений (30) к единому интегральному выражению и устраняющий, таким образом, трудность, которая иначе встречается при вычислениях. Трудность эта состоит в том, что возмущения получаются в виде малых разностей больших чисел. Множители q_1 и q_2, стоящие вне знаков интеграла, могут быть внесены под знак интеграла, если условиться рассматривать при интегрировании содержащееся в них t как постоянное. Поскольку в таком случае необходимо отличать это t от t в величинах, уже стоящих под знаком интеграла, то мы обозначаем его через τ; чтобы отметить, что в какой-нибудь величине, являющейся функцией от t, это t заменено на τ, мы заключаем эту величину в круглые скобки. Поэтому, полагая

$$N = (q_2)\,q_1 - (q_1)\,q_2, \tag{33}$$

мы получаем следующие простые выражения:

$$r_0\delta r=\int NQ_r\,dt,\quad \delta y=\int NQ_y\,dt,$$
$$\delta x=\int NQ_x\,dt,\quad \delta z=\int NQ_z\,dt. \tag{34}$$

После выполнения интегрирования τ заменяется на t. Поскольку τ при интегрировании считается постоянным, то к каждому из этих выражений необходимо прибавить произвольную функцию от τ, которая после замены τ на t становится произвольной функцией от t. Эти функции должны быть в каждом случае определены так, чтобы выражения (34) совпали с (30). Однако не обязательно рассматривать эти произвольные функции, если условиться выполнять интегрирование между самим t в качестве верхнего предела и некоторым нижним пределом, которым может быть любая постоянная величина. Тогда в общем случае к каждому уравнению необходимо прибавить произвольное выражение следующего вида:

$$K_1q_1+K_2q_2.$$

В случае оскулирующих элементов, если нижний предел выбран равным нулю, это произвольное выражение обращается в нуль.

Уравнения (34) могут быть представлены в виде определенных интегралов; поэтому, поскольку N является симметричной функцией от q и (q), имеем

$$r_0\delta r=-\int_0^t N(Q_r)\,d\tau,\quad \delta y=-\int_0^t N(Q_y)\,d\tau,$$
$$\delta x=-\int_0^t N(Q_x)\,d\tau,\quad \delta z=-\int_0^t N(Q_z)\,d\tau, \tag{35}$$

где N можно рассматривать как множитель, значение которого фактически равно нулю, но часть, зависящая от времени, входящая в его выражение, считается постоянной при интегрировании.

5. Множители q_1 и q_2. Определим теперь значения q_1 и q_2. Если мы положим

$$n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}},\quad nt+c=l=u-e\sin u, \tag{36}$$

где n есть среднее движение, a — большая полуось, e — эксцентриситет, c — средняя аномалия в эпоху, l и u — средняя и эксцентрическая аномалии планеты m в эллипсе, выбранном в первом приближении, то

$$\frac{r_0}{a}=1-e\cos u,\qquad dl=\frac{r_0}{a}\,du. \tag{37}$$

Тогда уравнение (22) можно преобразовать в

$$\frac{d^2q}{dl^2}+\frac{a^3}{r_0^3}\,q=0.$$

Далее, если принять за независимую переменную эксцентрическую аномалию u, то это уравнение примет вид

$$(1-e\cos u)\frac{d^2q}{du^2}-e\sin u\,\frac{dq}{du}+q=0. \tag{38}$$

Дифференцируя (38) по u и отбрасывая после этого ненужный множитель $1-e\cos u$, мы получаем уравнение

$$\frac{d^3q}{du^3}+\frac{dq}{du}=0,$$

интеграл которого имеет вид

$$q=K_1\cos u+K_2\sin u+K_3.$$

Чтобы этот интеграл мог удовлетворить уравнению (38), мы полагаем $K_3=-K_1e$. Следовательно, полный интеграл уравнения (38) имеет следующий вид:

$$q=K_1(\cos u-e)+K_2\sin u. \tag{39}$$

Теперь очевидно, что мы можем положить

$$q_1=k(\cos u-e),\quad q_2=k\sin u,$$

где k (не смешивать эту величину с гауссовой постоянной!) выбирается таким образом, чтобы удовлетворить интегралу (26). Когда эти значения подставлены, то мы находим, что $k^2=1/n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_1&=\sqrt{a^3n/\mu}\,(\cos u-e)=\sqrt{an/\mu}\,r_0\cos f,\\ q_2&=\sqrt{a^3n/\mu}\,\sin u\quad=\sqrt{an/\mu\,(1-e^2)}\,r_0\sin f,\end{aligned} \tag{40}$$

где f означает истинную аномалию возмущаемой планеты в ее эллиптической орбите. Подставляя эти значения в (33), мы получаем следующие два выражения для N:

$$\begin{aligned} N&=\frac{a^3n}{\mu}\{\sin[(u)-u]-e\sin(u)+e\sin u\};\\ N&=\frac{an}{\mu\sqrt{1-e^2}}(r_0)\,r_0\sin[(f)-f].\end{aligned} \tag{41}$$

Если t сохраняется в качестве независимой переменной, то любое из этих значений может быть использовано в выражениях (34). Однако в некоторых случаях может потребоваться интегрирование по u или f, и поскольку

$$n\,dt=\frac{r_0}{a}\,du=\frac{r_0^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,df, \tag{42}$$

то мы получим

$$\begin{aligned} N\,dt&=\frac{a^2r_0}{\mu}\{\sin[(u)-u]-e\sin(u)+e\sin u\}\,du;\\ N\,dt&=\frac{1}{\mu a(1-e^2)}(r_0)\,r_0^3\sin[(f)-f]\,df.\end{aligned} \tag{43}$$

В последнем случае выражения для возмущений принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta r&=\frac{1}{\mu a(1-e^2)}\int Q_rr_0^3\sin[(f)-f]\,df,\\ \delta x&=\frac{r_0}{\mu a(1-e^2)}\int Q_xr_0^3\sin[(f)-f]\,df,\\ \delta y&=\frac{r_0}{\mu a(1-e^2)}\int Q_yr_0^3\sin[(f)-f]\,df,\\ \delta z&=\frac{r_0}{\mu a(1-e^2)}\int Q_zr_0^3\sin[(f)-f]\,df.\end{aligned} \tag{44}$$

Эти уравнения являются совершенно точными, так как при их выводе не было отброшено ни одного члена; однако при их практическом приложении приходится столкнуться с необходимостью выражения значений функций Q через независимую переменную при помощи ряда приближений. В первом из этих приближений функции Q будут отягощены ошибками второго порядка относительно возмущающих сил; во втором — ошибками третьего порядка и так далее. Одно преимущество, которым обладают эти уравнения, состоит в том, что множители, на которые необходимо умножить функции Q перед интегрированием, являются функциями только от координат, соответствующих эллипсу первого приближения; они остаются тождественно одними и теми же, как бы далеко ни были проведены приближения. Аналогичным преимуществом обладают уравнения метода Брауэра, рассматриваемые ниже в этой главе.

Несмотря на то что система уравнений (44) является очень симметричной, она все же неудобна, так как содержит на одно соотношение больше, чем необходимо. Поэтому второе и третье уравнения мы заменим одним уравнением. Из уравнений (1) находим

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=H+\int\left(x\frac{\partial R}{\partial y}-y\frac{\partial R}{\partial x}\right)dt, \tag{45}$$

где постоянную H не следует смешивать с H из формулы (4). В полярных координатах получим

$$r^2\cos^2 B\frac{dv}{dt}=H+\int\frac{\partial R}{\partial v}dt. \tag{46}$$

Если мы предпочитаем прямоугольную координату z переменной B, то уравнение (46) можно написать в виде

$$(r^2-z^2)\frac{dv}{dt}=H+\int\frac{\partial R}{\partial v}dt. \tag{47}$$

H представляет собой такую постоянную, что

$$x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}=(r_0^2-z_0^2)\frac{dv_0}{dt}=H. \tag{48}$$

Можно показать, что численное значение H дается формулой

$$H=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i,$$

где i — наклонность плоскости эллиптической орбиты к плоскости xy.

Полагая $v=v_0+\delta v$, мы получаем из (47) следующее уравнение для определения δv:

$$\delta v=\int\left\{\int\frac{an}{\mu}Q_v\,dt-\sqrt{1-e^2}\cos i\frac{(r-r_0)dr-(z+z_0)dz}{r_0^2-z_0^2}\right\}\frac{a^2n}{r^2-z^2}dt, \tag{49}$$

где Q_v означает $\partial R/\partial v$. Подставляя вместо $n\,dt$ любое из его значений из уравнений (42), мы можем принять u или f за независимую переменную. При помощи последней процедуры уравнение (49) приводится к следующему виду:

$$\delta v=\int\left\{\int\frac{r_0^2}{\mu p}Q_v\,dv-\cos i\frac{(r+r_0)\delta r-(z+z_0)\delta z}{r_0^2-z_0^2}\right\}\frac{r_0^2}{r^2-z^2}dv. \tag{50}$$

Подобно уравнениям (44), это уравнение является совершенно строгим, так как мы не пренебрегли ни одним членом. Вместе с первым и последним уравнениями системы (44) его достаточно для полного решения задачи. Это уравнение является также совершенно общим, так как на положение плоскости xy, от которой отсчитывается координата z, не наложено никаких ограничений. В том случае, когда в качестве плоскости xy выбрана плоскость исходной эллиптической орбиты, уравнение (50) несколько упрощается. В этом случае, $i=0$, $z_0=0$ и $z=\delta z$; поэтому

$$\delta v = \int \left\{ \int \frac{r_0^2}{\mu p} Q_v \, dv - \frac{(r+r_0)\,\delta r - \delta z^2}{r_0^2} \right\} \frac{r_0^2}{r^2-\delta z^2} \, dv. \tag{51}$$

6. Лишняя постоянная. При использовании первого и последнего уравнений системы (44) и уравнения (50) или (51) будет введено семь произвольных постоянных — три в уравнении, которое определяет δr, и по две в каждом из остальных. Одна из этих постоянных является лишней и должна быть определена как функция от остальных постоянных. Когда мы определяем возмущения, которые должны быть прибавлены к координатам, заданным при помощи оскулирующих элементов, эта трудность преодолевается легко: мы только должны прибавить к каждому интегралу некоторую постоянную, которая обратит его в нуль в эпоху оскуляции. Однако когда эти возмущения необходимо прибавить к координатам, выведенным по средним элементам, то самый простой метод заключается в допущении, что постоянная, прибавляемая к $\int dR$, является лишней постоянной. Тогда, как было установлено выше, уравнение (32) определит эту постоянную через остальные шесть. При разложении обеих частей этого уравнения в периодические ряды необходимо сохранить только непериодические члены. Непериодический член в $\int dR$ должен быть тем же, что и в выражении

$$\frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta x + \frac{dy_0}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta y + \frac{dz_0}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta z + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{dt}\delta x\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\delta y\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\delta z\right)^2\right] + \frac{\mu}{r_0 r}\delta r.$$

Если в качестве плоскости xy выбрана плоскость исходного эллипса, то получится $dz_0/dt=0$, и один из членов уравнения (32) исчезнет. Допустим, что это выполнено и что координатами, выбранными для определения положения планеты m, являются r, v и δz; тогда уравнение (32) можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r+r_0)\cdot\frac{d}{dt}\delta r + \frac{1}{2}\left(r\frac{dv}{dt} + r_0\frac{dv_0}{dt}\right)\left(r_0\frac{d}{dt}\delta v + \frac{dv}{dt}\delta r\right) + \frac{\mu}{r_0 r}\delta r =$$
$$= \int dR + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dz^2 - \frac{1}{2}\frac{r^4}{r^2-\delta z^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta z}{r}\right)^2. \tag{52}$$

Мы можем принять v_0 за независимую переменную вместо t при помощи подстановки $dt = r_0/\sqrt{\mu p}\,df$, которая дает

$$\frac{1}{2}\frac{d}{df}(r+r_0)\frac{d}{df}\delta r + \frac{1}{2}\left(r\frac{dv}{df} + r_0\right)\left(r_0\frac{d}{df}\delta v + \frac{dv}{df}\delta r\right) + \frac{r_0^3}{pr}\delta r =$$
$$= \frac{r_0^4}{\mu p}\int dR + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{df}\right)^2 \delta z^2 - \frac{1}{2}\frac{r^4}{r^2-\delta z^2}\left(\frac{d}{df}\frac{\delta z}{r}\right)^2. \tag{53}$$

Если мы сохраним члены только первого порядка относительно возмущающих сил, то это уравнение сведется к следующему:

$$p\frac{d}{df}\delta v+(2+e\cos f)\delta r+e\sin f\frac{d}{df}\delta r=\frac{r^2}{\mu}\int dR. \tag{54}$$

Трудность с лишней постоянной может быть устранена путем использования $\int dR$ вместо функции Q_v. Вычитая удвоенное уравнение (18) из уравнения (52) и используя следующее уравнение, даваемое эллиптической теорией,

$$\frac{d^2r_0}{dt^2}-r_0\left(\frac{dv_0}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r_0^2}=0$$

для преобразования результата, мы получаем

$$r_0^2\frac{dv_0}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta v=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr_0}{dt}\delta r+2r_0\frac{d}{dt}\delta r\right)-3\int dR-2r\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\delta r^2-$$
$$-\frac{\mu\delta r^2}{r_0^3r}-\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(\delta r^2-\delta z^2)-\frac{1}{2}r_0\delta r\frac{d}{dt}\delta v\left(\frac{dv}{dt}+2\frac{dv_0}{dt}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r^4}{r^2-\delta z^2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\delta z}{r}\right)^2. \tag{55}$$

В этом уравнении не отброшен ни один член; если мы ограничимся первым порядком возмущающих сил, то оно примет более простой вид:

$$dv=\frac{\frac{dr}{dt}\delta r+2r\frac{d}{dt}\delta r-\int\left(3\int dR+2r\frac{\partial R}{\partial r}\right)dt}{a^2n\sqrt{1-e^2}}. \tag{56}$$

Если, мы выберем истинную аномалию f за независимую переменную, то это уравнение запишется так:

$$dv=\frac{2}{p}(1+e\cos f)\frac{d}{df}\delta r+\frac{e}{p}\sin f\cdot\delta r-\frac{1}{\mu}\int\left(3\int dR+2r\frac{\partial R}{\partial r}\right)\frac{p\,df}{(1+e\cos f)^2}. \tag{57}$$

Если вместо уравнения (51) используются уравнения (55), (56) или (57), то число произвольных постоянных, входящих в выражения для возмущений, будет равно шести — надлежащему количеству. Последние уравнения обладают также тем преимуществом, что δr входит в выражение для δv не под знаком интеграла в отличие от уравнения (51). Кроме того, при разложении величин, подлежащих интегрированию, в периодические ряды определение коэффициентов при членах долгого периода с дополнительной точностью ограничивается единственной величиной dR.

7. Возмущения первого порядка. Мы даем здесь формулы для случая, когда за независимую переменную принимается истинная аномалия f вследствие простоты аналитических выражений. Однако не следует это понимать так, что в численных приложениях обязательно следует предпочитать только эту независимую переменную. Применение эксцентрической аномалии делает ряды более быстро сходящимися, что представляет важное преимущество в случаях, когда эксцентриситет орбиты возмущаемого объекта велик; с другой стороны, использование средней аномалии облегчает вычисление положений возмущаемого объекта и упрощает процесс интегрирования. Однако легко понять, какие видоизменения необходимо произвести в формулах в тех случаях, когда следует использовать ту или иную из двух последних названных переменных.

Так как в тех случаях, когда мы ограничиваемся первым порядком возмущающих сил, необходимо подставить для координат в функциях Q эллиптические (невозмущенные) значения, то нет нужды проводить различие между эллиптическими и точными значениями, и мы поэтому опустим нулевые нижние индексы. Если мы положим

$$T = \frac{r^3}{\mu p} Q_r = \frac{r^3}{\mu p}\left[2\int dR + r\frac{\partial R}{\partial r}\right],$$
$$Y = \frac{r^2}{\mu p}\frac{\partial R}{\partial v}, \tag{58}$$
$$Z = \frac{r^3}{\mu p}\frac{\partial R}{\partial z},$$

то первое и последнее уравнения из (44) и уравнение (51) примут вид

$$\delta r = \int T\sin[(f) - f]\,df,$$
$$\delta v = \int\left[\int Y\,df - 2\frac{\delta r}{r}\right]df, \tag{59}$$
$$\delta B = \int Z\sin[(f) - f]\,df.$$

Обращаясь к формуле (2) для R, легко найти выражения для Y и Z. Чтобы найти T, положим

$$X = \frac{r^4}{\mu p}\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{60}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\mu p}\,dR = r^{-2}\left[\frac{e}{p}\sin f\cdot X + Y\right]df. \tag{61}$$

Поэтому уравнения для возмущений первого порядка принимают вид

$$\delta r = \int\left[X + 2r^3\int r^{-2}\left(\frac{e}{p}\sin f\cdot X + Y\right)df\right]\sin[(f) - f]\,df,$$
$$\delta v = \int\left[\int Y\,df - 2\frac{\delta r}{r}\right]df, \tag{62}$$
$$\delta B = \int Z\sin[(f) - f]\,df.$$

Второе из этих уравнений можно заменить уравнением (57), но в таком случае будет правильным употребить вместо Y функцию $\int dR$. Если координаты r, r', z, z' исключены из R посредством их выражений через истинные аномалии f, f', то R становится функцией только от f и f' и

$$\int dR = \int\frac{\partial R}{\partial f}\,df. \tag{63}$$

Это уравнение верно также и в том случае, если f' заменено на u' или l'. Однако, чтобы сделать различные выражения интегрируемыми при f в качестве независимой переменной, необходимо исключить l' посредством следующего тождества:

$$l' \equiv \frac{n'}{n}f + c' - \frac{n'}{n}c - \frac{n'}{n}(f - l). \tag{64}$$

Затем мы полагаем

$$\theta' = \frac{n'}{n} f + c' - \frac{n'}{n} c, \tag{65}$$

и поэтому

$$l' = \theta' - \frac{n'}{n}(f - l), \quad \frac{d\theta'}{df} = \frac{n'}{n}. \tag{66}$$

С функцией R в такой форме получим

$$\int dR = R - \frac{n'}{n} \int \frac{\partial R}{\partial \theta'} \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} df \tag{67}$$

и

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = a \frac{\partial R}{\partial a}. \tag{68}$$

Но если применяются уравнения (6), то формулы (2), (4) и (5) показывают, что выражения для X, Y, Z имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos B' \cos (v' - v) - \frac{m'}{\mu p} \frac{r^5}{\Delta^3}, \\ Y &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos B' \sin (v' - v), \\ Z &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \sin B', \end{aligned} \tag{69}$$

в котором

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos B' \cos (v' - v). \tag{70}$$

Когда при рассмотрении возмущений первого порядка используется переменная θ', определяемая равенством (65), периодическое разложение каждой из интегрируемых функций независимо от того, произведено ли предварительно умножение на множитель $\sin [(f) - f]$ или нет, будет иметь следующий вид:

$$\sum_{j, j'} [K^{(c)}_{j, j'} \cos (jf + j'\theta') + K^{(s)}_{j, j'} \sin (jf + j'\theta')], \tag{71}$$

где j и j' — положительные или отрицательные целые числа (включая нуль), однако без потери общности одно из них всегда может быть ограничено только положительными значениями (включая нуль). Когда это выражение интегрируется при f в качестве независимой переменной, то в результате получается

$$\sum_{j, j'} (j, j') [K^{(c)}_{j, j'} \sin (jf + j'\theta') - K^{(s)}_{j, j'} \cos (jf + j'\theta')], \tag{72}$$

где принято следующее обозначение:

$$(j, j') = \frac{1}{j + j' \dfrac{n'}{n}}, \tag{73}$$

за исключением свободного члена, который после интегрирования дает $K^{(c)}_{0, 0} f$. Если это выражение умножено на $\sin [(f) - f]$ до интегрирования. то результат интегрирования имеет следующий вид:

$$\sum_{j, j'} \{ -(j-1, j')(j+1, j') [K^{(c)}_{j, j'} \cos (jf + j'\theta') + K^{(s)}_{j, j'} \sin (jf + j'\theta')] \}, \tag{74}$$

за исключением членов, соответствующих $j = 1$, $j' = 0$, для которых мы получаем

$$\frac{f}{2} (K^{(c)}_{1, 0} \sin f - K^{(s)}_{1, 0} \cos f). \tag{75}$$

Остальные члены, которые пропорциональны $\cos f$ и $\sin f$, могут быть отброшены, так как они объединяются с произвольным выражением, дополняющим этот интеграл.

На этом этапе можно было бы перейти к аналитическому определению возмущений второго порядка, которые представляют собой приращения возмущений первого порядка и получаются вычислением приращений возмущающих сил при допущении, что планеты движутся не просто по эллипсам, а по эллипсам, измененным возмущениями первого порядка. Однако разложения, которые получаются в этом случае, будут неудобны для вычислений, и мы предпочитаем отложить этот вопрос до тех пор, пока не рассмотрим метод, свободный от такого недостатка. Тем временем мы переходим к дальнейшему рассмотрению выражения (75).

8. Вековые возмущения. Характерной особенностью выражения (75) является то, что оно содержит угол f вне знаков функций sin и cos; возмущения, обладающие таким свойством, называются вековыми возмущениями. Эти возмущения неограниченно растут с возрастанием угла f и потому непригодны для представления движения планеты в течение очень большого промежутка времени. Такое неудачное свойство не присуще самой проблеме абсолютных возмущений, а обусловлено тем методом разложения, который мы применили. В свое время были разработаны аналитические методы, не страдающие этим недостатком, однако они до сих пор не применялись к планетной задаче из-за очень большого объема требуемых для этого вычислений. Проблема вековых возмущений будет рассмотрена далее в гл. XIV.

Допустим, что функция T из уравнения (59), разложенная в ряд как периодическая функция от f и θ', содержит члены вида

$$K^{(c)}\cos f + K^{(s)}\sin f,$$

где $K^{(c)}$ и $K^{(s)}$ — постоянные. Умножение на $\sin[(f) - f]$ дает в произведении члены, не зависящие от f, вида

$$\frac{1}{2}K^{(c)}\sin(f) - \frac{1}{2}K^{(s)}\cos(f).$$

Если рассматривать только эти члены, то δr содержит следующие члены:

$$\delta r = \frac{f}{2}\left(K^{(c)}\sin f - K^{(s)}\cos f\right). \tag{76}$$

Но мы имеем $f = nt + c +$ периодические члены. Когда это выражение подставлено вместо первого множителя в правой части (76), то произведение периодических членов на второй множитель порождает только те члены, которые снова являются периодическими. В таком случае выражение

$$\delta r = \frac{1}{2}nt\left(K^{(c)}\sin f - K^{(s)}\cos f\right) \tag{77}$$

содержит все те члены из δr, которые имеют t вне знаков функций sin и cos; оно составляет вековое возмущение r. Остальные члены, будучи чисто периодическими, представляют периодические возмущения. Аналогично, если Z содержит члены вида

$$k^{(c)}\cos f + k^{(s)}\sin f,$$

то вековое возмущение широты можно свести к следующему выражению:

$$\delta B = \frac{1}{2} nt \left(k^{(c)} \sin f - k^{(s)} \cos f\right). \tag{78}$$

Для того чтобы найти вековое возмущение долготы, можно воспользоваться уравнением (56) или (57). В связи с этим обратим внимание на то, что в случаях употребления средних элементов обычно принято выбирать эти элементы таким образом, чтобы освободить возмущение δv, разложенное в ряд как функция t, от членов вида $\alpha + \beta t$, где α и β — постоянные. Разумеется, для того чтобы это осуществить, к функции $\int dR$ в (56) необходимо присоединить такую постоянную, чтобы сделать $\beta = 0$. Тогда ясно, что усеченная форма уравнения (57)

$$\delta v = \frac{2}{p}(1 + e\cos f)\frac{d}{df}\delta r + \frac{e}{p}\sin f \cdot \delta r \tag{79}$$

будет содержать вековые возмущения v при условии, что мы отбросим член вида βt. Подставляя вместо δr в (79) его значение из выражения (77), получим

$$\delta v = nt\left[\left(\cos f + \frac{1}{4} e\cos 2f\right)\frac{K^{(c)}}{p} + \left(\sin f + \frac{1}{4} e \sin 2f\right)\frac{K^{(s)}}{p}\right]. \tag{80}$$

Но множитель $\cos f + \frac{1}{4} e\cos 2f$, если его разложить в периодический ряд по средней аномалии, содержит в качестве постоянного члена

$$\frac{(1-e^2)^{3/2} - 1 - \frac{1}{2}e^2}{2e}.$$

Поэтому, чтобы освободить δv от члена, пропорционального t, мы должны написать

$$\delta v = nt\left\{\left[\frac{1 + \frac{1}{2}e^2 - (1-e^2)^{3/2}}{2e} + \cos f + \frac{1}{4} e\cos 2f\right]\frac{K^{(c)}}{p} + \right.$$
$$\left. + \left[\sin f + \frac{1}{4} e\sin 2f\right]\frac{K^{(s)}}{p}\right\}. \tag{81}$$

Это выражение составляет вековую часть возмущения долготы.

Важно отметить, что эти вековые возмущения первого порядка в трех координатах планеты могут быть полностью учтены путем простого допущения, что четыре элемента промежуточной орбиты: e, $\tilde{\omega}$, i, h (h есть долгота узла) — получают приращения, пропорциональные времени, которые, однако, настолько малы, что можно пренебречь их квадратами и произведениями. Чтобы это доказать, найдем значения следующих частных производных:

$$\frac{\partial r}{\partial e}, \quad \frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}}, \quad \frac{\partial v}{\partial e}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}}, \quad \frac{\partial B}{\partial i}, \quad \frac{\partial B}{\partial h}.$$

Дифференцируя уравнения

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad l = u - e\sin u,$$

мы получаем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos u + ae\sin u\,\frac{\partial u}{\partial e},$$

$$(1 - e\cos u)\,\frac{\partial u}{\partial e} - \sin u = 0.$$

Исключением $\partial u/\partial e$ находим

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\,\frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} = -a\cos f. \tag{82}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial r}{\partial \widetilde{\omega}} = -\frac{dr}{n\,dt} = -\frac{dr}{df}\,\frac{df}{n\,dt} = -\frac{dr}{df}\,\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} =$$

$$= -a\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f. \tag{83}$$

Дифференцирование равенства

$$\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \ln\operatorname{tg}\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-e) - \frac{1}{2}\ln(1+e)$$

дает

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{df}{\sin f} - \frac{de}{1-e^2}. \tag{84}$$

Но

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{a}{r}\,de. \tag{85}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \sin f\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right) = \frac{(2 + e\cos f)\sin f}{1-e^2}. \tag{86}$$

Имеем также

$$\frac{\partial v}{\partial \widetilde{\omega}} = 1 - \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}. \tag{87}$$

Дифференцируя равенство

$$\sin B = \sin i\sin(f+g),$$

где g — угловое расстояние от узла до перигелия, и помня, что здесь B и i имеют порядок возмущающих сил, мы получаем

$$\frac{\partial B}{\partial i} = \sin(f+g), \qquad \frac{\partial B}{\partial h} = -\sin i\cos(f+g). \tag{88}$$

Отсюда очевидно, что вековые возмущения координат r, B, v, заданные уравнениями (77), (78) и (81), можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{\partial r}{\partial e}\,\delta e + \frac{\partial r}{\partial \widetilde{\omega}}\,\delta\widetilde{\omega}, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial e}\,\delta e + \frac{\partial v}{\partial \widetilde{\omega}}\,\delta\widetilde{\omega}, \\ \delta B &= \frac{\partial B}{\partial i}\,\delta i + \frac{\partial B}{\partial h}\,\delta h, \end{aligned} \tag{89}$$

где δe, $\delta\tilde{\omega}$, δi, δh имеют такие значения:

$$
\begin{aligned}
\delta e &= \frac{K^{(s)}}{2a} nt,\\
e\delta\tilde{\omega} &= -\frac{K^{(c)}}{2a}\sqrt{1-e^2}\, nt,\\
\delta i &= \frac{1}{2}\left(k^{(c)}\cos g - k^{(s)}\sin g\right) nt,\\
\sin i\delta h &= \frac{1}{2}\left(k^{(c)}\sin g + k^{(s)}\cos g\right) nt.
\end{aligned}
\tag{90}
$$

Чтобы доказать, что δv не имеет члена вида αt^2, необходимо показать, что dR, входящее в уравнение (56), не имеет постоянного члена. Когда функция R разлагается в периодический ряд по средним аномалиям l и l', она принимает следующий вид:

$$
R = \sum_{j,j'} \left[K_{j,j'}^{(c)}\cos(jl + j'l') + K_{j,j'}^{(s)}\sin(jl + j'l')\right]. \tag{91}
$$

Значение dR получается из этого разложения путем частного дифференцирования по l. Таким образом,

$$
dR = \sum_{j,j'} j\left[-K_{j,j'}^{(c)}\sin(jl + j'l') + K_{j,j'}^{(s)}\cos(jl + j'l')\right] n\,dt. \tag{92}
$$

Постоянный член функции R, для которого $j = 0$, исчезает из этого выражения.

Определение вековых возмущений, коль скоро рассматривается первый порядок возмущающих сил, целиком зависит от установления значений четырех постоянных: $K^{(c)}$, $K^{(s)}$, $k^{(c)}$, $k^{(s)}$. Если предположить, что значения T и Z зависят от двух переменных f и θ', то эти постоянные даются следующими двойными определенными интегралами:

$$
\begin{aligned}
K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} T\cos f\, df\, d\theta',\\
K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} T\sin f\, df\, d\theta',\\
k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Z\cos f\, df\, d\theta',\\
k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Z\sin f\, df\, d\theta'.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Однако здесь будет выгодно возвратиться к независимым переменным l и l'. Мы имеем

$$
\frac{df}{dl} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}, \qquad l' = \theta' - \frac{n'}{n}(f - l)
$$

и, следовательно, мы можем положить $d\theta' = dl'$. Поэтому

$$
\left.
\begin{aligned}
K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \left(2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) r \cos f \, dl \, dl', \\
K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \left(2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) r \sin f \, dl \, dl', \\
k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial z} r \cos f \, dl \, dl', \\
k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial z} r \sin f \, dl \, dl'.
\end{aligned}
\right\} \tag{94}
$$

В этих выражениях мы имеем

$$
R = m'k^2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r'^3} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial z} = m'k^2 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) z'. \tag{95}
$$

Из уравнения

$$
\frac{d^2x'}{dl'^2} + \frac{a'^3}{r'^3} x' = 0
$$

мы получаем выражение

$$
\int \frac{x'}{r'^3} dl' = -\frac{1}{a'^3} \int \frac{d^2x'}{dl'^2} dl' = -\frac{1}{a'^3} \frac{dx'}{dl'},
$$

которое приводит к следующим трем равенствам:

$$
\int_0^{2\pi} \frac{x'}{r'^3} dl' = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{y'}{r'^3} dl' = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{z'}{r'^3} dl' = 0, \tag{96}
$$

так как принимает одинаковые значения при $l' = 0$ и $l' = 2\pi$. Таким образом, в выражениях (94) можно допустить, что

$$
R = \frac{m'k^2}{\Delta}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{k^2 m' z'}{\Delta^3}. \tag{97}
$$

Первое и второе равенства из (94) могут быть еще более упрощены при помощи подстановки $R + m'\gamma$ вместо функции $\int dR$, где γ — постоянная, которую необходимо определить таким образом, чтобы δv не содержало членов, пропорциональных t.

Также мы имеем

$$
r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{m'k^2}{2} \left(\frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta} \right). \tag{98}
$$

Следовательно,

$$
\left.
\begin{aligned}
K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} + 2\gamma \right) r \cos f \, dl \, dl', \\
K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} + 2\gamma \right) r \sin f \, dl \, dl',
\end{aligned}
\right\} \tag{99}
$$

$$
\begin{aligned}
k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k^2m'a}{\mu\sqrt{1-e^2}}\,\frac{z'}{\Delta^3}\,r\cos f\,dl\,dl',\\
k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k^2m'a}{\mu\sqrt{1-e^2}}\,\frac{z'}{\Delta^3}\,r\sin f\,dl\,dl'.
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Сравнение уравнений (56) и (81) показывает, что для определения постоянной γ, если δv не должно содержать членов вида αt, необходимо, чтобы

$$
\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(3\int dR+2r\frac{\partial R}{\partial r}\right)dl\,dl' = \frac{(1-e^2)^{3/2}-1-\frac{1}{2}e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,aK^{(c)}n^2, \tag{100}
$$

или, делая предыдущие подстановки,

$$
\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}m'\left(\frac{2}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}+3\gamma\right)dl\,dl' = \frac{(1-e^2)^{3/2}-1-\frac{1}{2}e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,aK^{(c)}n^2. \tag{101}
$$

Но мы имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\cos f\,dl\,dl' &= -3ae,\\
\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin f\,dl\,dl' &= 0.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Используя эти интегралы и исключая γ из (99), мы получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-e^2)^{3/2}+1-\frac{5}{2}e^2}{2\sqrt{1-e^2}}\,K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m'a}{2\mu\sqrt{1-e^2}}\times\\
&\times\left[\left(\frac{3}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)r\cos f+ae\left(\frac{2}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)\right]dl\,dl',\\
K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m'a}{2\mu\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{3}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)r\sin f\,dl\,dl'.
\end{aligned}
\tag{103}
$$

Путем введения эксцентрической аномалии u эти уравнения могут быть приведены к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-e^2)^{3/2}+1-\frac{5}{2}e^2}{2\sqrt{1-e^2}}\,K^{(c)} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m'a}{\mu}\times\\
&\times\left[\left(\frac{3}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)a\cos u-\frac{ae}{\Delta}\right]dl\,dl',\\
K^{(s)} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{m'a}{\mu}\left(\frac{3}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)a\sin u\,dl\,dl'.
\end{aligned}
\tag{104}
$$

Ограничиваясь интегрированием по l', мы видим, что определение вековых возмущений зависит от следующих трех определенных интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{\Delta}+\frac{r'^2-r^2}{\Delta^3}\right)dl', \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dl'}{\Delta}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z'}{\Delta^3}\,dl'.$$

Разложение в ряды величин, подлежащих интегрированию, откладывается до гл. XV.

9. Введение в метод Брауэра. Метод вычисления общих планетных возмущений, описанный в предшествующих разделах этой главы, мало использовался на практике и никогда не применялся в тех случаях, когда с некоторой степенью полноты вычислялись возмущения второго порядка. Лишняя постоянная интегрирования и необходимость вычисления возмущений радиуса-вектора с большей степенью точности, чем требуется для этой координаты, с тем чтобы получить достаточную точность в возмущениях долготы, представляют собой те недостатки, которые препятствовали широкому применению метода. Кроме того, аналитическая и вычислительная работа по определению возмущений второго порядка при помощи этого метода является очень запутанной и громоздкой.

Брауэр разработал метод вычисления возмущений прямоугольных координат, который свободен от этих недостатков. Фактически оказывается, что этот метод и метод Ганзена (который будет изложен в гл. XIV) являются единственными методами, с которыми необходимо серьезно считаться в тех случаях практических приложений, когда решено с самого начала использовать численные значения элементов и когда требуется точность, сравнимая с точностью наблюдений.

10. Уравнения движения. Как и выше, рассмотрим неподвижную систему прямоугольных координат с началом в Солнце. Пусть масса Солнца равна единице, масса возмущаемой планеты есть m, масса возмущающей планеты — m' и гауссова постоянная — k. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{r^3}&=\frac{\partial R}{\partial z};\end{aligned} \tag{105}$$

где

$$\mu=k^2(1+m),$$

$$R=k^2m'\left\{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{-1/2}-\frac{x'x+y'y+z'z}{r'^3}\right\}. \tag{106}$$

Если для краткости мы положим

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}, \quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}, \quad \dot{z}=\frac{dz}{dt},$$

то уравнения движения можно написать в канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned} \tag{107}$$

где гамильтониан F определяется следующей формулой:

$$F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} - R. \tag{108}$$

Обозначим через x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ функции от времени и эллиптических элементов, соответствующие эллиптической орбите, которая удовлетворяет уравнениям (105) и (107), если функцию R положить равной нулю, и обозначим радиус-вектор в этом эллипсе через r_0. Предположим, что система координат ориентирована таким образом, что плоскость xy совпадает с плоскостью эллипса, ось x направлена в неподвижный перигелий, ось y сдвинута на 90° в направлении движения планеты, предполагаемого прямым, а ось z направлена в сторону полусферы, содержащей небесный северный полюс. Тогда мы имеем $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, и фактические координаты планеты можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x, & y &= y_0 + \delta y, & z &= \delta z, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 + \delta \dot{x}, & \dot{y} &= \dot{y}_0 + \delta \dot{y}, & \dot{z} &= \delta \dot{z}, \end{aligned}$$

где δx, $\delta \dot{x}$ и т. д. суть возмущения. Вычитая уравнения эллиптического движения из уравнений (105), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\delta x + \frac{\mu}{r^3}(x_0 + \delta x) - \mu\frac{x_0}{r_0^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\delta y + \frac{\mu}{r^3}(y_0 + \delta y) - \mu\frac{y_0}{r_0^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\delta z + \frac{\mu}{r^3}\delta z \qquad\qquad &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \tag{109}$$

Необходимо, чтобы δx, δy и δz были малыми величинами порядка возмущающих сил, и это ограничивает выбор промежуточной орбиты. Когда возмущения планеты вычисляются в первый раз, можно использовать оскулирующую орбиту, однако если известны приближенные значения возмущений, то лучше воспользоваться промежуточной орбитой. В любом случае шесть постоянных интегрирования, связанных с решением уравнений (109), должны быть определены в соответствии с выбранной исходной орбитой, чтобы теория была справедливой.

Второй член в левых частях уравнений (109) можно разложить по степеням δx, δy, δz. Когда это выполнено и члены второго и более высоких порядков перенесены в правые части, в результате получаются следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\delta x+\frac{\mu}{r_0^3}\delta x-\frac{3\mu x_0}{r_0^5}(x_0\delta x+y_0\delta y)=G_x,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\delta y+\frac{\mu}{r_0^3}\delta y-\frac{3\mu y_0}{r_0^5}(x_0\delta x+y_0\delta y)=G_y,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\delta z+\frac{\mu}{r_0^3}\delta z\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=G_z.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

В дополнение к членам, входящим в G, которые получаются из разложения в ряды вторых членов левых частей уравнений (109), необходимо разложить частные производные возмущающей функции в ряды Тэйлора по степеням значения R_0 этой возмущающей функции, которое получается в том случае, когда для координат обеих планет подставлены невозмущенные эллиптические значения. Поэтому, если мы ограничиваемся величинами второго порядка относительно возмущающих сил, то

$$
\begin{aligned}
G_x=&\frac{\partial R_0}{\partial x_0}+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0^2}\delta x+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\partial y_0}\delta y+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\partial z_0}\delta z+\\
&+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial x_0'}\delta x'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0'}\delta y'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial z_0'}\delta z'+\\
&+\mu\left[\left(\frac{9}{2}\frac{x_0}{r_0^5}-\frac{15}{2}\frac{x_0^3}{r_0^7}\right)\delta x^2+\left(3\frac{y_0}{r_0^5}-15\frac{x_0^2y_0}{r_0^7}\right)\delta x\delta y+\right.\\
&\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{x_0}{r_0^5}-\frac{15}{2}\frac{x_0y_0^2}{r_0^7}\right)\delta y^2+\frac{3}{2}\frac{x_0}{r_0^5}\delta z^2\right],\\
G_y=&\frac{\partial R_0}{\partial y_0}+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0\,\partial x_0}\delta x+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0^2}\delta y+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0\partial z_0}\delta z+\\
&+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0\,\partial x_0'}\delta x'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0\partial y_0'}\delta y'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0\,\partial z_0'}\delta z'+\\
&+\mu\left[\left(\frac{3}{2}\frac{y_0}{r_0^5}-\frac{15}{2}\frac{x_0^2y_0}{r_0^7}\right)\delta x^2+\left(3\frac{x_0}{r_0^5}-15\frac{x_0y_0^2}{r_0^7}\right)\delta x\delta y+\right.\\
&\left.+\left(\frac{9}{2}\frac{y_0}{r_0^5}-\frac{15}{2}\frac{y_0^3}{r_0^7}\right)\delta y^2+\frac{3}{2}\frac{y_0}{r_0^5}\delta z^2\right],\\
G_z=&\frac{\partial R_0}{\partial z_0}+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\delta x+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\delta y+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0^2}\delta z+\\
&+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0\,\partial x_0'}\delta x'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0\,\partial y_0'}\delta y'+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0\,\partial z_0'}\delta z'.
\end{aligned}
\tag{111}
$$

При вычислении частных производных дифференцирование необходимо выполнять до подстановки численных значений координат, причем координаты возмущающей планеты должны быть отнесены к тем же осям, которые выбраны для возмущенной планеты.

Третье уравнение системы (110) уже рассматривалось выше в этой главе в немного отличной форме, и в дальнейшем мы ограничимся двумя остальными уравнениями.

11. Интегрирование. Чтобы проинтегрировать первые два уравнения из системы (110), рассмотрим следующие линейные дифференциальные уравнения без правой части:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\delta x+\frac{\mu}{r_0^3}\delta x-\frac{3\mu x_0}{r_0^5}(x_0\delta x+y_0\delta y)=0,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\delta y+\frac{\mu}{r_0^3}\delta y-\frac{3\mu y_0}{r_0^5}(x_0\delta x+y_0\delta y)=0.
\end{aligned}
\tag{112}
$$

Общее свойство этого класса дифференциальных уравнений заключается в том, что они обладают следующими частными решениями:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_1}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_1}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_2}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_2}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_3}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_3}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_4}, \end{aligned} \tag{113}$$

если c_1, c_2, c_3, c_4 — любые четыре элемента, которые определяют движение в плоскости эллиптической орбиты. Тогда общее решение уравнений (112) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta x &= C_1 \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, \\ \delta y &= C_1 \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial y_0}{\partial c_4}, \end{aligned} \tag{114}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — четыре постоянные интегрирования. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= C_1 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}, \\ \delta \dot{y} &= C_1 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}. \end{aligned} \tag{115}$$

Мы предположим теперь, что решение первых двух уравнений (110) имеет тот же вид, что и (114) и (115), но с C_1, C_2, C_3, C_4 как функциями от времени вместо постоянных. Тогда дифференцирование (114) дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= C_1 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, \\ \frac{d}{dt} \delta y &= C_1 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_4}. \end{aligned} \tag{116}$$

Вводя условия

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_4} &= 0, \\ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_4} &= 0, \end{aligned} \tag{117}$$

получаем также

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta x &= C_1 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta y &= C_1 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}, \end{aligned} \tag{118}$$

где мы применяем следующие обозначения:

$$\ddot{x}_0 = \frac{d^2x_0}{dt^2}, \qquad \ddot{y}_0 = \frac{d^2y_0}{dt^2}.$$

Теперь подставим выражения (114) для δx и δy и выражения (118) для вторых производных от δx и δy в первые два уравнения из (110). В результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{dC_1}{dt}\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt}\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt}\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt}\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} = G_x, \\ &\frac{dC_1}{dt}\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt}\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt}\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt}\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} = G_y. \end{aligned} \qquad (119)$$

Таким образом, интегрирование первых двух уравнений системы (110), каждое из которых является уравнением второго порядка, сведено к интегрированию четырех уравнений (117) и (119), каждое из которых представляет собой уравнение первого порядка. Зависимыми переменными в этих уравнениях являются C_1, C_2, C_3, C_4, которые входят только в линейных комбинациях своих производных. Решение этих четырех линейных уравнений относительно производных четырех функций C свело бы эту задачу к четырем квадратурам. Это приведение, конечно, возможно, если разрешается считать G_x и G_y известными функциями времени, как подразумевается при обычном процессе последовательных приближений. В системе выражений (111) коэффициенты при δx, δy, z и при их степенях и произведениях известны с самого начала и могут быть разложены в двойные ряды Фурье с коэффициентами, которые являются известными числовыми постоянными, и с аргументами, представляющими собой линейные комбинации выбранных независимых переменных, например, средних аномалий. Если же о δx, δy, z ничего не известно, то в первом приближении их следует положить равными нулю, что ограничивает G_x и G_y их первыми членами. Получающиеся возмущения будут точны до первого порядка относительно возмущающих сил и во втором приближении будут подставлены в выражения (111), что приведет к возмущениям, точным до второго порядка возмущающих сил. Если в силу малости возмущений можно пренебречь невыписанными членами выражений (111), которые содержат кубы δx, δy, z и такие комбинации, как, например, $\delta x^2\delta y$ и т. д., то повторение этого же процесса приведет к возмущениям, точным до третьего порядка возмущающих сил; с другой стороны, если невыписанные члены выражений (111) ощутимы, то их можно легко учесть. Однако может случиться, что приближенные значения δx, δy, z известны с самого начала. В этом случае их можно подставить в выражения (111), и тогда первое приближение приведет к улучшенным значениям этих возмущений, которые будут точны до второго порядка, если погрешности возмущений, использованных в первом приближении, не слишком велики. Таким образом, становится очевидным преимущество этого метода. Почти во всех случаях, когда такой метод применим к членам солнечной системы, приближения могут быть продолжены до какой угодно требуемой степени точности простым повторением одного и того же процесса, потому что почти всегда достаточно тех членов, которые выписаны в выражениях (111), тогда как при использовании других методов вычисление возмущений третьего порядка приводит к исключительно сложным выражениям.

12. Формальное решение. Четыре уравнения (117) и (119) можно считать линейными уравнениями относительно неизвестных величин dC_1/dt, dC_2/dt, dC_3/dt, dC_4/dt, так как все частные производные, умноженные на них, являются известными функциями от времени. Поэтому, если мы обозначим определитель из коэффициентов через J и алгебраическое дополнение какого-нибудь элемента из J — приписыванием звездочки к обычному обозначению определителя, то решение будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{dC_1}{dt} &= \frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1}\right|^*,\\
\frac{dC_2}{dt} &= \frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2}\right|^*,\\
\frac{dC_3}{dt} &= \frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3}\right|^*,\\
\frac{dC_4}{dt} &= \frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}\right|^*.
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Если мы подставим эти значения в выражения (114), то мы получим выражения для δx и δy следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\delta x = {} & \frac{\partial x_0}{\partial c_1}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial x_0}{\partial c_2}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial x_0}{\partial c_3}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial x_0}{\partial c_4}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}\right|^*\right\}dt,\\
\delta y = {} & \frac{\partial y_0}{\partial c_1}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial y_0}{\partial c_2}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial y_0}{\partial c_3}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3}\right|^*\right\}dt +\\
& + \frac{\partial y_0}{\partial c_4}\int\left\{\frac{G_x}{J}\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}\right|^* + \frac{G_y}{J}\left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}\right|^*\right\}dt.
\end{aligned}
\tag{121}
$$

Если необходимо вычислить $\delta\dot{x}$ и $\delta\dot{y}$, то выражения для них можно получить простой заменой x_0 на $\dot{x}_0$ и y_0 на $\dot{y}_0$ в восьми множителях, стоящих вне знаков интеграла.

Решение уравнений движения в представленной форме вызывает то же возражение, что и решение в виде (30), а именно что возмущения получаются в форме малых разностей больших чисел. Способ Ганзена для преодоления этой трудности пригоден также и здесь. Однако, прежде чем идти дальше, необходимо выбрать геометрическую интерпретацию величин c_1, c_2, c_3, c_4, чтобы упростить рассмотрение задачи.

Для этого можно воспользоваться любой системой из четырех канонических элементов, определяющих эллиптическое движение. Для практических вычислений удобно выбрать такую систему, чтобы необходимые частные производные можно было вычислить, минуя деление на эксцентриситет, и именно так будет здесь сделано.

13. Явное решение. Мы выбираем следующую систему элементов: среднюю долготу $w = l + \tilde{\omega}$; $L = \sqrt{\mu a}$, где a — большая полуось, а $\mu = k^2(1+m) = n^2a^3$, причем n — среднее движение в единицу времени t, а также ξ и η, определяемые следующими формулами:

$$\xi = +[2\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{1-e^2})]^{1/2}\cos\tilde{\omega},$$
$$\eta = -[2\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{1-e^2})]^{1/2}\sin\tilde{\omega}.$$

В принятых элементах первые четыре уравнения (107) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}, \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial w},$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \eta}, \tag{122}$$

где

$$F = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R,$$

причем необходимо считать, что гамильтониан F выражен теперь через элементы w, L, ξ, η. Это каноническое преобразование не содержит времени и оставляет гамильтониан неизменным.

Якобиан этого преобразования обладает следующими свойствами:

$$J_C = J\left(\frac{x_0,\ \dot{x}_0,\ y_0,\ \dot{y}_0}{w,\ L,\ \eta,\ \xi}\right) = +1,$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial w_0}\right|^* = +\frac{\partial w_0}{\partial x_0} = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0}, \qquad \left|\frac{\partial y_0}{\partial w_0}\right|^* = +\frac{\partial w_0}{\partial y_0} = +\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial L_0},$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}\right|^* = +\frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \xi_0}, \qquad \left|\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}\right|^* = +\frac{\partial \eta_0}{\partial y_0} = +\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \xi_0},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0}\right|^* = +\frac{\partial w_0}{\partial \dot{x}_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial L_0}, \qquad \left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial w_0}\right|^* = +\frac{\partial w_0}{\partial \dot{y}_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial L_0},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \eta_0}\right|^* = +\frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{x}_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}, \qquad \left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \eta_0}\right|^* = +\frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{y}_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0},$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial L_0}\right|^* = +\frac{\partial L_0}{\partial x_0} = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0}, \qquad \left|\frac{\partial y_0}{\partial L_0}\right|^* = +\frac{\partial L_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial w_0}, \tag{123}$$

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\right|^* = +\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \eta_0}, \qquad \left|\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}\right|^* = +\frac{\partial \xi_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \eta_0},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0}\right|^* = +\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} = +\frac{\partial x_0}{\partial w_0}, \qquad \left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial L_0}\right|^* = +\frac{\partial L_0}{\partial \dot{y}_0} = +\frac{\partial y_0}{\partial w_0},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \xi_0}\right|^* = +\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{x}_0} = +\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}, \qquad \left|\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \xi_0}\right|^* = +\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{y}_0} = +\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}.$$

Равенство первых и вторых частей этих соотношений вытекает непосредственно из характера преобразования. Равенство вторых и третьих частей доказывается в различных учебниках, рассматривающих канонические преобразования.

Теперь мы свяжем эллиптические значения w_0, L_0, ξ_0, η_0 переменных w, L, ξ, η с постоянными c_1, c_2, c_3, c_4 эллиптической орбиты. Поскольку R обращается в нуль в эллиптическом движении, мы имеем

$$F_0 = -\frac{\mu^2}{2L_0^2}$$

и

$$\frac{dw_0}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial L_0} = \frac{\mu^2}{L_0^3} = \mu^{1/2}a^{-3/2} = n, \quad \frac{dL_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi_0}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w_0 &= nt + k_1, & L_0 &= k_2, \\ \eta_0 &= k_3, & \xi_0 &= k_4, \end{aligned} \tag{124}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, суть постоянные, и

$$n = \mu^2 k_2^{-3}, \qquad \frac{\partial n}{\partial k_2} = -3\mu^2 k_2^{-4}.$$

Поэтому мы можем положить $c_1 = k_1$, $c_2 = k_2$, $c_3 = k_3$, $c_4 = k_4$, или

$$\begin{aligned} w_0 &= nt + c_1, & L_0 &= c_2, \\ \eta_0 &= c_3, & \xi_0 &= c_4. \end{aligned} \tag{125}$$

Сравним теперь якобиан J_C с якобианом

$$J_c = \left(\frac{x_0,\ \dot{x}_0,\ y_0,\ \dot{y}_0}{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4}\right).$$

Любую функцию f от переменных x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ можно рассматривать как функцию от переменных w, L, ξ, η или от t и постоянных c_1, c_2, c_3, c_4. Мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_1} &= \frac{\partial f}{\partial w_0}, & \frac{\partial f}{\partial c_2} &= \frac{\partial f}{\partial L_0} - 3\mu^2 c_2^{-4} t \frac{\partial f}{\partial w_0}, \\ \frac{\partial f}{\partial c_3} &= \frac{\partial f}{\partial \eta_0}, & \frac{\partial f}{\partial c_4} &= \frac{\partial f}{\partial \xi_0}. \end{aligned} \tag{126}$$

Следовательно, в якобиане J_c элементы первого, третьего и четвертого столбцов тождественны элементам в соответствующих столбцах якобиана J_C. Элементы второго столбца якобиана J_c получаются прибавлением элементов первого столбца, умноженных на $-3\mu^2 c_2^{-4} t$, к элементам второго столбца якобиана J_C. Поэтому эти два якобиана равны, и

$$J_c = J_C = +1,$$

а алгебраические дополнения якобиана J_c тождественны соответствующим алгебраическим дополнениям якобиана J_C, за исключением алгебраических дополнений элементов первого столбца. Для них мы имеем, согласно соотношениям (126) и (123),

$$\left|\frac{\partial x_0}{\partial c_1}\right|^* = \left|\frac{\partial x_0}{\partial w_0}\right|^* + 3\mu^2 c_2^{-4} t \left|\frac{\partial x_0}{\partial L_0}\right|^* = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0} - 3\mu^2 c_2^{-4} t \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1}\right|^* = \left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0}\right|^* + 3\mu^2 c_2^{-4} t \left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0}\right|^* = -\frac{\partial x_0}{\partial L_0} + 3\mu^2 c_2^{-4} t \frac{\partial x_0}{\partial w_0}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial x_0}{\partial c_2}\right| = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \omega_0}, &&\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2}\right|^* = +\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0},\\
&\left|\frac{\partial x_0}{\partial c_3}\right|^* = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \xi_0}, &&\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3}\right|^* = -\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0},\\
&\left|\frac{\partial x_0}{\partial c_4}\right|^* = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \eta_0}, &&\left|\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}\right|^* = +\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}.
\end{aligned}
\tag{127}
$$

Соответствующие восемь уравнений для другой координаты могут быть получены из этих уравнений при помощи подстановки y_0 вместо x_0 и $\dot{y}_0$ вместо $\dot{x}_0$.

14. Выражения для возмущений. Выражения для возмущений получаются при помощи подстановки уравнений (127) в (121). Для удобства обозначений мы разделяем возмущения на две части, обозначая члены, которые не содержат t явным образом в виде множителя, приписыванием нижнего индекса 1, а члены, содержащие t в явном виде, приписыванием нижнего индекса 2.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \delta_1 x + \delta_2 x,\\
\delta y &= \delta_1 y + \delta_2 y.
\end{aligned}
$$

Мы также вносим множители, стоящие вне знаков интеграла в (121), под знаки интеграла и заключаем их в скобки, чтобы указать, что t, входящее в их выражения, необходимо при интегрировании считать постоянным, как это мы делали ранее. Тогда мы получаем

$$
\begin{aligned}
\delta_1 x = \int \Bigg\{ &\left[\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial L_0}\right) - \frac{\partial x_0}{\partial L_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\right) + \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\right) - \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}\right)\right] G_x +\\
+ &\left[\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial L_0}\right) - \frac{\partial y_0}{\partial L_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\right) + \frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\right) - \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}\right)\right] G_y \Bigg\}\, dt,\\
\delta_1 y = \int \Bigg\{ &\left[\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial L_0}\right) - \frac{\partial x_0}{\partial L_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0}\right) + \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}\right) - \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}\right)\right] G_x +\\
+ &\left[\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial L_0}\right) - \frac{\partial y_0}{\partial L_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0}\right) + \frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}\right) - \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}\right)\right] G_y \Bigg\}\, dt.
\end{aligned}
\tag{128}
$$

Выражения в квадратных скобках можно разложить в двойные ряды Фурье, аргументы которых являются линейными комбинациями l и λ, причем это λ считается при интегрировании постоянным, но после него заменяется на l. Они играют ту же роль, что и выражения N в уравнениях (33) и (41).

Что же касается $\delta_2 x$ и $\delta_2 y$, если мы положим

$$
K = \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} G_x + \frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} G_y, \tag{129}
$$

то

$$
\delta_2 x = 3\mu^2 L_0^{-4} \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \left[\int tK\,dt - t \int K\,dt \right].
$$

Но

$$\int tKdt = \int td\left[\int Kdt\right] = t\int Kdt - \int\int Kdtdt$$

и, следовательно,

$$\delta_2 x = -3\mu^2 L_0^{-4}\frac{\partial x_0}{\partial w_0}\int\int Kdtdt.$$

Аналогично

$$\delta_2 y = -3\mu^2 L_0^{-4}\frac{\partial y_0}{\partial w_0}\int\int Kdtdt. \tag{130}$$

Если о возмущениях вначале ничего не известно, так что необходимо ограничить G_x и G_y их первыми членами, то $\delta_2 x$ и $\delta_2 y$ принимают очень простой вид. В этом случае мы имеем, поскольку $\mu^2 L_0^{-4} = n^2 a/\mu$,

$$\begin{aligned} \delta_2 x &= -\frac{3n^2 a}{\mu}\frac{\partial x_0}{\partial l}\int\int\frac{\partial R_0}{\partial l}dtdt, \\ \delta_2 y &= -\frac{3n^2 a}{\mu}\frac{\partial y_0}{\partial l}\int\int\frac{\partial R_0}{\partial l}dt\,dt. \end{aligned} \tag{131}$$

Частные производные, входящие в эти выражения, могут быть очень легко вычислены, если x_0, y_0 и R_0 разложены в ряды Фурье по средним аномалиям.

В любом случае при вычислении возмущений выше первого порядка необходимо использовать полные выражения (130).

Заметим здесь, что двойное интегрирование в (131) не может дать члены вида βt^2, где β есть постоянная, так как это могло бы произойти лишь в том случае, если бы производная $\partial R_0/\partial l$ содержала постоянный член; если же функция R_0 разложена в виде двойного ряда Фурье по l и l', то очевидно, что постоянный член этого разложения исчезает после дифференцирования. Однако интегрирования в (130), которые должны быть применены для возмущений выше первого порядка, дадут, вообще говоря, член вида βt^2, так как G_x и G_y вообще содержат постоянные члены.

Если требуется получить возмущения компонент скорости $\delta\dot{x}$ и $\delta\dot{y}$, то необходимо лишь заменить x_0 и y_0 на $\dot{x}_0$ и $\dot{y}_0$ всюду, где они встречаются в уравнениях (128), (129) и (130).

15. Квадратные скобки. Квадратные скобки, входящие в уравнения (128), содержать суммы произведений восьми частных производных, а именно частных производных от x_0 и y_0 по каждому из четырех элементов промежуточной орбиты, причем с самого начала используются постоянные численные значения a, n, e и $\tilde{\omega}$. Для этих восьми частных производных можно найти аналитические выражения, однако, по-видимому, самым легким путем для их вычисления будет применение гармонического анализа к частным значениям, вычисленным для равноотстоящих значений независимой переменной. При вычислениях также будет удобно умножить отдельные ряды на такие множители, которые сделают коэффициенты функциями только от эксцентриситета и безразмерными. Поэтому вместо рядов, входящих в уравнения (128), мы вычисляем

$$\frac{1}{a}\frac{\partial q}{\partial w_0},\quad na\frac{\partial q}{\partial L_0},\quad \frac{(\mu a)^{1/4}}{a}\frac{\partial q}{\partial \eta_0},\quad \frac{\mu a)^{1/4}}{a}\frac{\partial q}{\partial \xi_0},$$

где q означает либо x_0, либо y_0. Также мы будем вычислять не x_0 и y_0, а x_0/a и y_0/a.

Мы имеем

$$\begin{gathered}
\frac{1}{a}\frac{\partial q}{\partial w_0}=\frac{1}{a}\frac{\partial q}{\partial l},\\
na\frac{\partial q}{\partial L_0}=2\frac{\partial q}{\partial a}-\frac{\cos\varphi\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{a}\frac{\partial q}{\partial e},\\
\frac{(\mu a)^{1/4}}{a}\frac{\partial q}{\partial \eta_0}=\frac{1}{2a\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{\partial q}{\partial l}-\frac{\partial q}{\partial\tilde\omega}\right),\\
\frac{(\mu a)^{1/4}}{a}\frac{\partial q}{\partial \xi_0}=\frac{\cos\varphi}{a\cos\frac{\varphi}{2}}\frac{\partial q}{\partial e},
\end{gathered}\tag{132}$$

где $\sin\varphi=e$.

Мы имеем также

$$\frac{1}{a}\frac{\partial x_0}{\partial e}=-1-\frac{a}{r}\sin^2 u,\quad \frac{1}{a}\frac{\partial y_0}{\partial e}=-\frac{e}{\cos\varphi}\sin u+\frac{a}{r}\cos\varphi\sin u\cos u,$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial a}=\cos u-e,\qquad \frac{\partial y_0}{\partial a}=\cos\varphi\sin u,$$

где в частных производных по a отброшены члены, умноженные на время.

Кроме того,

$$\frac{\partial x_0}{\partial l}-\frac{\partial x_0}{\partial\tilde\omega}=\frac{\partial x_0}{\partial l}+y_0,\qquad \frac{\partial y_0}{\partial l}-\frac{\partial y_0}{\partial\tilde\omega}=\frac{\partial y_0}{\partial l}-x_0.$$

16. Постоянные интегрирования. Полные выражения для возмущений были получены нами без какого бы то ни было рассмотрения вопроса о постоянных интегрирования; легко найти, что эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta x&=c_x+c_{0x}t+c_{1x}\cos l+c_{2x}\cos 2l+c_{3x}\cos 3l+\ldots+\\
&\quad+s_{1x}\sin l+s_{2x}\sin 2l+s_{3x}\sin 3l+\ldots,\\
\delta y&=c_y+c_{0y}t+c_{1y}\cos l+c_{2y}\cos 2l+c_{3y}\cos 3l+\ldots+\\
&\quad+s_{1y}\sin l+s_{2y}\sin 2l+s_{3y}\sin 3l+\ldots,
\end{aligned}\tag{133}$$

где c и s — числовые коэффициенты.

Эти выражения охватывают все члены возмущений, аргументы которых не зависят от положения возмущающей планеты, за исключением вековых членов и членов, умноженных на t^2 или t^3, которые появляются в возмущениях второго и более высоких порядков. Мы предположили здесь, что независимой переменной является время, а не истинная аномалия или эксцентрическая аномалия, так как это почти всегда будет иметь место на практике.

Известно, что в нашем распоряжении имеются четыре постоянные интегрирования, которые должны быть связаны с четырьмя независимыми элементами эллиптического движения в соответствии с принципами определения этих элементов. При этом мы не сталкиваемся с тем затруднением, которое встречается в методе, описанном в разделах, предшествующих разд. 9, и заключается в том, что из-за присутствия лишней постоянной постоянные интегрирования очень сложным образом связаны с вековыми возмущениями. Симметричный характер представленных разложений избавляет нас от этого неудобства. Однако вместо одного неудобства появляется другое, которое состоит в том, что соотношения между элементами и возмущениями прямоугольных координат несколько сложны. Однако эта трудность легко преодолевается путем преобразования возмущений (133) в возмущения истинной долготы в орбите. Обозначая эту долготу через v, получаем с точностью до членов первого порядка (это все, что когда-либо потребуется)

$$\delta v = \frac{1}{r_0^2}\,(x_0 \delta y - y_0 \delta x).$$

После разложения по l выражение для δv принимает следующий вид:

$$\delta v = C + C_0 t + C_1 \cos l + C_2 \cos 2l + C_3 \cos 3l + \ldots + S_1 \sin l + \\ + S_2 \sin 2l + S_3 \sin 3l + \ldots , \qquad (134)$$

где C и S — снова числовые коэффициенты.

Рассмотрим случай средних элементов, определенных таким образом, чтобы в соответствии с общепринятой практикой постоянные C, C_0, C_1 и S_1 обратились в нуль. Чтобы это осуществить, мы начинаем с выражения конечного приращения истинной долготы v в виде функции от произвольных приращений четырех элементов: w, n, e и $\tilde{\omega}$. Для общности мы используем буквенное разложение с точностью до третьего порядка эксцентриситета, но на практике обычно следует предпочесть численное разложение, если только эксцентриситет e не очень мал. Обозначая среднюю долготу в основную эпоху через w_{00} и полагая для удобства $w_0 - \tilde{\omega} = l$, имеем

$$v = w_{00} + nt + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin(w_0 - \tilde{\omega}) + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right)\sin 2(w_0 - \tilde{\omega}) + \\ + \frac{13}{12}e^3 \sin 3(w_0 - \tilde{\omega}),$$

откуда

$$\Delta v = \Delta w_{00} + t\Delta n - e\Delta\tilde{\omega}\left[\left(2 - \frac{1}{4}e^2\right)\cos l + \left(\frac{5}{2}e - \frac{11}{12}e^3\right)\cos 2l + \frac{39}{12}l^2 \cos 3l\right] + \\ + \Delta e\left[\left(2 - \frac{3}{4}e^2\right)\sin l + \left(\frac{5}{2}e - \frac{11}{6}e^3\right)\sin 2l + \frac{39}{12}e^2 \sin 3l\right]. \qquad (135)$$

Положим теперь

$$\Delta w_{00} = -C, \quad \Delta n = -C_0, \quad \Delta e = -\frac{S_1}{2 - \frac{3}{4}e^2}, \quad e\Delta\tilde{\omega} = \frac{C_1}{2 - \frac{1}{4}e^2}$$

и тогда, складывая (134) и (135), получим для этих возмущений следующее выражение:

$$\delta v = \left(C_2 - \frac{\frac{5}{2}e - \frac{11}{12}e^3}{2 - \frac{1}{4}e^2}\,C_1\right)\cos 2l + \left(C_3 - \frac{\frac{39}{12}e^3}{2 - \frac{1}{4}e^2}\,C_1\right)\cos 3l + \ldots + \\ + \left(S_2 - \frac{\frac{5}{2}e - \frac{11}{6}e^3}{2 - \frac{3}{4}e^2}\,S_1\right)\sin 2l + \left(S_3 - \frac{\frac{39}{12}e^3}{2 - \frac{3}{4}e^2}\,S_1\right)\sin 3l + \ldots . \qquad (136)$$

Новые значения возмущений, которые необходимо использовать вместо выражений (133), получаются подстановкой разложения (136) в следующие формулы:

$$\delta x = -r_0 \sin f_0 \cdot \Delta v, \quad \delta y = +r_0 \cos f_0 \cdot \Delta v,$$

где $r_0 \sin f_0$ и $r_0 \cos f_0$ разложены в ряды Фурье по дугам, кратным l. При таком способе действий коэффициенты c_x, c_{1x}, s_{1x}, c_y, c_{1y}, s_{1y} в нуль не обратятся, но значительно уменьшатся, а остальные коэффициенты в выражениях (133) примут новые значения.

Две постоянные, возникающие при интегрировании уравнения для δz, могут быть выбраны согласно условию, чтобы в выражении для δz коэффициенты при $\sin l$ и $\cos l$ обращались в нуль.

Этим полностью завершается рассмотрение постоянных интегрирования. Хотя при каждом последовательном приближении к значениям возмущений постоянные должны определяться заново, тем не менее во всех случаях пригоден один и тот же процесс, так как постоянные всегда представляют собой малые числа, квадратами которых можно пренебречь.

Можно было бы принять и другие определения средних элементов. Мы делаем это в следующей главе, в которой средние элементы будут выбраны таким образом, чтобы обратились в нуль некоторые возмущения средней долготы вместо истинной, как было сделано здесь. Этот выбор всегда можно сделать произвольным образом, и наиболее целесообразный порядок действий зависит от формы, в которой выражаются возмущения. В данном случае мы могли бы сделать выбор таким образом, чтобы обусловить обращение в нуль определенных коэффициентов, например в выражении для δx, однако сделанный нами выбор обладает преимуществом сохранения некоторой симметрии в выражениях для δx и δy и, по-видимому, лишен недостатков.

Из предыдущего очевидно, что в тех случаях, когда мы выходим за пределы эллиптического невозмущенного движения и начинаем апроксимировать с некоторой степенью точности действительное движение небесного тела, строгое определение элементов становится возможным только при условии учета возмущений. Так как возмущения можно представить в различной форме, то и элементы будут принимать значения, слегка отличающиеся друг от друга. Поэтому элементы утрачивают свой геометрический смысл и, строго говоря, должны рассматриваться только как параметры, по которым строится теория.

17. Возмущающая функция и ее производные. Если мы отбросим нижний индекс нуль у эллиптических значений координат, условившись, что в этом разделе используются только эллиптические значения, и положим

$$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

то, так как $z = 0$, мы получим

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x'x + y'y}{r'^3} \right), \tag{137}$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. В выражении (137) координаты возмущающей планеты должны быть отнесены к тем же осям, что и координаты возмущаемой планеты.

Для целей вычислений выгодно заменить возмущающую функцию R и ее производные безразмерными величинами. Поскольку R имеет размерность, обратную длине, то мы можем это сделать, умножая ее на любую длину. Оказывается, что если использовать для этой цели большую полуось a' возмущающей планеты, то постоянный член функции $a'R$, когда она разложена в ряд, будет порядка массы m', что удобно при вычислениях. По тем же причинам мы предпочитаем x/a вместо x, a/r вместо $1/r$ и т. д. Тогда, полагая $\alpha = a/a'$ при условии $a < a'$, мы имеем

$$
\begin{aligned}
a'R &= k^2m'\left[\frac{a'}{\Delta} - \alpha\left(\frac{x}{a}\frac{x}{a'} + \frac{y}{a}\frac{y'}{a'}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right],\\
a'^2\frac{\partial R}{\partial x} &= k^2m'\left[\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right) - \frac{x'}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right],\\
a'^2\frac{\partial R}{\partial y} &= k^2m'\left[\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\left(\frac{y'}{a'} - \alpha\frac{y}{a}\right) - \frac{y'}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right],\\
a'^2\frac{\partial R}{\partial z} &= k^2m'\left[\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\frac{z'}{a'} - \frac{z'}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right],\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} &= k^2m'\left[\left(3\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\right],\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} &= 3k^2m'\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{y'}{a'} - \alpha\frac{y}{a}\right)\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right),\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z} &= 3k^2m'\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{z'}{a'}\right)\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right),\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial x'} &= k^2m'\left[-3\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right)^2 +\right.\\
&\qquad\left. + \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3 + 3\left(\frac{x'}{a'}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 - \left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right],\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y'} &= k^2m'\left[-3\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{y'}{a'} - \alpha\frac{y}{a}\right)\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right) + 3\frac{x'}{a'}\frac{y'}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\right],\\
a'^3\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z'} &= k^2m'\left[-3\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5\left(\frac{z'}{a'}\right)\left(\frac{x'}{a'} - \alpha\frac{x}{a}\right) + 3\frac{x'}{a'}\frac{z'}{a'}\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\right].
\end{aligned}
\tag{138}
$$

Остальные частные производные легко могут быть выведены из этих выражений, причем необходимо помнить, что z нельзя полагать равным нулю до выполнения дифференцирования. Если использовать подобные числовые множители в членах функций G, умножаемых на μ, то мы найдем, что возмущения легко получаются в следующем виде:

$$\delta x/a, \quad \delta y/a, \quad \delta z/a.$$

Все множители, входящие в выражения (138), легко могут быть разложены в ряды Фурье при помощи гармонического анализа частных значений, за исключением отношения a'/Δ и его нечетных степеней, которые сходятся очень медленно и которым будет посвящена гл. XV.

Замечания. Литература

Метод вычисления возмущений сферических координат, изложенный в этой главе, был, по-видимому, создан Энке и изложен им в «Berliner Jahrbuch» на 1857 год. Он был использован Ньюкомом в его первой теории движения Урана в 1872 г. и позже в его теории движения четырех внутренних планет (Astron. Papers of the Amer. Ephemeris, 3, 395, 1891), которая до настоящего времени составляет основу эфемерид Солнца, Меркурия, Венеры и Марса. Однако этот метод не очень удобен для систематических вычислений возмущений выше первого порядка. Именно до некоторой степени недостаточное рассмотрение Ньюкомом возмущений второго порядка (см. там же, 5, 49, 297, 1895) в основном ответственно за недостатки, обнаруженные в настоящее время в упомянутых эфемеридах.

В методе Энке постоянные интегрирования более многочисленны, чем это необходимо для решения задачи, и потому требуют постоянного внимания. Метод Энке был применен к малой планете (8) Флора Брюновым с некоторыми промахами, что стало предметом горячей полемики между Энке и Ганзеном в «Astronomische Nachrichten», начиная с № 1002 (1855), и в других изданиях. Аналогичные промахи были допущены Ньюкомом для четырех внутренних планет. Ему удалось, однако, избежать серьезных последствий, сделав вековые возмущения предметом отдельного исследования, вместо того чтобы определять их из уравнений Энке.

Метод Брауэра был применен (только с точностью до первого порядка) к движению малой планеты (185) Эвника Дэйвисом (Astron. J., 56, 188, 1952).