Глава XIV

МЕТОД ГАНЗЕНА

1. Введение. Среди многих вкладов, внесенных Ганзеном в решение проблемы обсолютных возмущений, три результата играют столь важную роль, что метод, включающий в себя любой из них, мог бы по праву называться методом Ганзена. Сочетание же всех трех выдающихся достижений в едином методе делает его настолько отличным от методов предшественников Ганзена, что придает ему исключительно отпугивающий с первого взгляда вид, которого он не заслуживает. Этим внешним видом и недостаточной ясностью изложения и объясняется мнимая трудность метода. Что же касается вычисления возмущений первого порядка относительно возмущающих сил, то метод Ганзена превосходит все остальные методы по экономии труда; не ясно, будет ли это верно также для возмущений более высоких порядков, но во всяком случае его единственным соперником является метод Брауэра вычисления возмущений в прямоугольных координатах. Кроме того, благодаря быстроте сходимости используемых рядов метод Ганзена в большей степени, чем многие другие, применим к орбитам с большими эксцентриситетами и наклонностями.

Лаплас [1]) вычислил неравенства долгого периода таким образом, как если бы они должны были быть прибавлены к средней долготе, а неравенства короткого периода так, как если бы их необходимо было прибавить к истинной долготе. Преимущества первого пути очевидны; одно неравенство долгого периода в средней долготе порождает несколько неравенств в истинной долготе, причем два наибольших из них имеют период, почти совпадающий с периодом обращения планеты, тогда как остальные неравенства будут еще более короткого периода. Однако Лаплас не показал, каким образом оба эти пути решения могут быть согласованы друг с другом. Это вопрос значительной трудности, и фактически никогда не было сделано попыток строгого вычисления возмущений выше первого порядка по методу Лапласа.

Ганзен первым оценил те преимущества, которые получатся в результате прибавления всех возмущений как долгого, так и короткого периодов к средней долготе, или, что то же, к средней аномалии. В этом случае уравнение центра, вычисленное по формуле эллиптического движения, дает непосредственно истинную возмущенную долготу в орбите, тогда как радиус-вектор и широта, полученные по эллиптическим формулам с использованием возмущенной средней аномалии,

---

[1]) P. S. Laplace, Mécanique céleste, English translation by N. Bowditch, with commentary, Hilliard, Gray, Little and Williams, Boston, 1829.

потребуют лишь небольших поправочных членов, для того чтобы быть точными. Применение Ганзеном этого принципа к движению Сатурна, возмущаемому Юпитером, представляет собой самый ранний пример точного вычисления возмущений второго порядка. Этот же метод был позднее использован Хиллом для построения теории движения Юпитера и Сатурна, которая является единственным случаем, когда взаимодействие двух планет апроксимировалось с точностью до третьего порядка относительно возмущающих сил.

Двумя другими важными достижениями Ганзена, о которых здесь шла речь, являются: а) особый метод интегрирования, при котором определенные функции от независимой переменной, стоящие вне знака интеграла, обозначаются специальными символами и вносятся под знак интеграла, благодаря чему устраняются малые разности больших чисел, и б) использование единственной функции W для нахождения всех возмущений в плоскости оскулирующей орбиты.

2. Принцип метода. Мы можем начать с изучения движения планеты в оскулирующей плоскости, т. е. в плоскости, которая проходит через начало координат и в любой момент времени содержит радиус-вектор и вектор скорости этой планеты. Наклон этой плоскости к любой неподвижной плоскости непрерывно меняется, и сама плоскость может быть поворачиваться относительно радиуса-вектора планеты сначала в одном направлении, а затем в обратном.

Имея дифференциальные уравнения, определяющие движение планеты в оскулирующей плоскости, мы можем затем рассмотреть движение самой этой плоскости, получая уравнения, которые дают широту планеты над неподвижной плоскостью и не зависят от движения в оскулирующей плоскости. Наконец, путем преобразования координат можно показать, каким образом может быть получена долгота (отнесенная к неподвижному направлению в неподвижной плоскости) прибавлением двух очень малых поправок к долготе в оскулирующей орбите. Для большей ясности изложения мы предпочитаем, однако, изменить этот порядок и сначала рассмотреть преобразования координат.

3. Системы координат. Выберем неподвижную плоскость отсчета, проходящую через Солнце, и примем в ней неподвижную прямую за начало счета долгот. Гелиоцентрическое положение планеты можно определить посредством ее долготы L, широты B и радиуса-вектора r. Равным образом положение планеты можно также определить наклонностью I оскулирующей орбиты к неподвижной плоскости отсчета, долготой θ соответствующего восходящего узла, аргументом широты и радиусом-вектором.

Пусть v означает долготу планеты, отсчитываемую в мгновенной плоскости орбиты от некоторой начальной точки, выбранной произвольно, и пусть σ означает долготу узла, отсчитываемую от этой же начальной точки. Тогда аргумент широты равен $v-\sigma$, а L и B определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L-\theta) &= \cos (v-\sigma), \\ \cos B \sin (L-\theta) &= \cos I \sin (v-\sigma), \\ \sin B &= \sin I \sin (v-\sigma). \end{aligned} \tag{1}$$

Положение прямой отсчета в мгновенной плоскости орбиты, от которой отсчитываются v и σ, можно определить таким образом, чтобы движение плоскости орбиты не зависело от v, накладывая следующее условие:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \cos I \frac{d\theta}{dt}, \tag{2}$$

которое дает

$$\sigma = \sigma_0 + \int_0^t \cos I \, d\theta,$$

где σ_0 — аддитивная постоянная интегрирования, для которой мы принимаем $\sigma_0 = \theta_0$.

Непосредственное применение уравнений (1) для определения положения планеты потребовало бы вычисления сначала I и θ по методу вариации произвольных постоянных; подстановка этих величин в (2) дала бы σ. Таким образом, вместе с v и r потребовалось бы пять величин для определения трех координат. Однако можно уменьшить это количество путем соответствующего преобразования. Подставим вместо I и σ величины I_0 и σ_0 — значения I и σ в начальный момент времени. Тогда I и σ могут быть найдены прибавлением к I_0 и σ_0 определенных величин порядка возмущающих сил. Пусть s означает поправку к правой части третьего уравнения из системы (1), и пусть $sA \sin w$ и $-sA \cos w$ означают поправки к первому и второму уравнениям, где A и w пока остаются неопределенными. Кроме того, допустим, что в левых частях уравнений (1) мы можем вместо θ подставить $\theta_0 + \Gamma$; при этом не следует понимать под Γ переменную часть θ, а просто считать, что уравнения допускают это преобразование. Собственно говоря, Γ является функцией как от I, так и от θ. Тогда (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos (v - \theta_0) + sA \sin w, \\ \cos B \sin (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos I_0 \sin (v - \theta_0) - sA \cos w, \\ \sin B &= \sin I_0 \sin (v - \theta_0) + s. \end{aligned} \tag{3}$$

Мы требуем, чтобы A, w и Γ были независимы от v. Чтобы показать возможность этого, начнем с введения двух новых переменных p и q, определяемых посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned} p &= \sin I \sin (\sigma - \theta_0), \\ q &= \sin I \cos (\sigma - \theta_0) - \sin I_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Умножим обе части первого уравнения на $\cos (v - \theta_0)$, а обе части второго уравнения — на $\sin (v - \theta_0)$; это дает

$$p \cos (v - \theta_0) = \sin I \sin (\sigma - \theta_0) \cos (v - \theta_0),$$
$$q \sin (v - \theta_0) = \sin I \cos (\sigma - \theta_0) \sin (v - \theta_0) - \sin I_0 \sin (v - \theta_0).$$

Вычитая первое полученное уравнение из второго, находим

$$q \sin (v - \theta_0) - p \cos (v - \theta_0) = \sin I \sin (v - \sigma) - \sin I_0 \sin (v - \theta_0).$$

Однако из сравнения третьего уравнения (1) с третьим уравнением (3) легко видеть, что правая часть только что записанного уравнения тождественно совпадает с поправкой s, откуда

$$s = q\sin(v-\theta_0) - p\cos(v-\theta_0). \tag{5}$$

Это значение s необходимо подставить в первое и второе уравнения (3); чтобы упростить запись результата, мы полагаем

$$\Upsilon = v-\theta_0,\quad \Theta = \theta-\theta_0-\Gamma,\quad \Sigma = \sigma-\theta_0,$$

откуда

$$s = q\sin\Upsilon - p\cos\Upsilon.$$

Подставляя в первое и второе уравнения (3) Υ вместо $v-\theta_0$, $L-\theta+\Theta$ вместо $L-\theta_0-\Gamma$ и только что полученное значение s, мы имеем

$$\begin{aligned}&\cos B\,[\cos(L-\theta)\cos\Theta - \sin(L-\theta)\sin\Theta] =\\ &\qquad = (1-pA\sin w)\cos\Upsilon + qA\sin w\sin\Upsilon,\\ &\cos B\,[\sin(L-\theta)\cos\Theta + \cos(L-\theta)\sin\Theta] =\\ &\qquad = (\cos I_0 - qA\cos w)\sin\Upsilon + pA\cos w\cos\Upsilon.\end{aligned}$$

Но так как $v-\sigma = \Upsilon-\Sigma$, то, согласно уравнениям (1), мы имеем

$$\begin{aligned}&\cos(\Upsilon-\Sigma)\cos\Theta - \cos I\sin(\Upsilon-\Sigma)\sin\Theta =\\ &\qquad = (1-pA\sin w)\cos\Upsilon + qA\sin w\sin\Upsilon,\\ &\cos(\Upsilon-\Sigma)\sin\Theta + \cos I\sin(\Upsilon-\Sigma)\cos\Theta =\\ &\qquad = (\cos I_0 - qA\cos w)\sin\Upsilon + pA\cos w\cos\Upsilon,\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\Sigma\cos\Theta + \cos I\sin\Sigma\sin\Theta)\cos\Upsilon + (\sin\Sigma\cos\Theta - \cos I\cos\Sigma\sin\Theta)\sin\Upsilon =\\ &\qquad = (1-pA\sin w)\cos\Upsilon + qA\sin w\sin\Upsilon,\\ &(\cos\Sigma\sin\Theta - \cos I\sin\Sigma\cos\Theta)\cos\Upsilon + (\sin\Sigma\sin\Theta + \cos I\cos\Sigma\cos\Theta)\sin\Upsilon =\\ &\qquad = (\cos I_0 - qA\cos w)\sin\Upsilon + pA\cos w\cos\Upsilon.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если A, w и Γ (или Θ) должны быть независимы от v (или Υ), то множители при $\cos\Upsilon$ и $\sin\Upsilon$ в этих уравнениях должны в отдельности обратиться в нуль, что приводит к следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned}pA\sin w &= 1 - \cos\Sigma\cos\Theta - \cos I\sin\Sigma\sin\Theta,\\ qA\sin w &= \sin\Sigma\cos\Theta - \cos I\cos\Sigma\sin\Theta,\\ qA\cos w &= \cos I_0 - \sin\Sigma\sin\Theta - \cos I\cos\Sigma\cos\Theta,\\ pA\cos w &= \cos\Sigma\sin\Theta - \cos I\sin\Sigma\cos\Theta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти уравнения определяют четыре неизвестных: $A\sin w$, $A\cos w$, $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$. Если значения, полученные для $\sin\Theta$ и $\cos\Theta$, удовлетворяют соотношению

$$\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1,$$

то будет доказана возможность преобразования (3). Чтобы показать это, исключим $A\sin w$ и $A\cos w$ из уравнений (7), что дает следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\cos I\,(q\sin\Sigma - p\cos\Sigma)\sin\Theta + (q\cos\Sigma + p\sin\Sigma)\cos\Theta = q,\\ &(q\cos\Sigma + p\sin\Sigma)\sin\Theta - \cos I\,(q\sin\Sigma - p\cos\Sigma)\cos\Theta = p\cos I_0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Но мы имеем

$$p = \sin I \sin \Sigma, \quad q = \sin I \cos \Sigma - \sin I_0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} q \sin \Sigma - p \cos \Sigma &= \qquad\quad - \sin I_0 \sin \Sigma, \\ p \sin \Sigma + q \cos \Sigma &= \sin I - \sin I_0 \cos \Sigma. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда уравнения (8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\cos I \sin I_0 \sin \Sigma \sin \Theta + (\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \cos \Theta = \sin I_0 - \sin I \cos \Sigma, \\ &(\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \sin \Theta - \sin I_0 \cos I \sin \Sigma \cos \Theta = -\sin I \cos I_0 \sin \Sigma. \end{aligned} \tag{10}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \lambda \cos \mu &= \sin I_0 \cos \Sigma - \sin I, \\ \lambda \sin \mu &= \cos I \sin I_0 \sin \Sigma, \end{aligned} \tag{11}$$

приводим уравнения (10) к виду

$$\begin{aligned} \lambda \cos (\Theta - \mu) &= \sin I_0 - \sin I \cos \Sigma, \\ \lambda \sin (\Theta - \mu) &= \qquad\quad - \sin I \cos I_0 \sin \Sigma, \end{aligned} \tag{12}$$

Если мы должны получить

$$\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1,$$

то необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов правых частей соотношений (11) была тождественно равна сумме квадратов правых частей уравнений (12), что как раз и имеет место. Поэтому возможность выполнения требуемого преобразования доказана.

Остается найти значения $A \sin \varpi$ и $A \cos \varpi$. Если мы умножим первое уравнение из (11) на первое уравнение из (12), затем второе уравнение из (11) на второе уравнение из (12) и вычтем получающиеся при этом уравнения, то, умножая затем первое уравнение из (11) на второе уравнение из (12) и второе уравнение из (11) на первое уравнение из (12) и складывая получающиеся уравнения, получим окончательно следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cos \Theta &= (\sin I_0 - \sin I \cos \Sigma)(\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) + \\ &\quad + \sin I_0 \cos I_0 \sin I \cos I \sin^2 \Sigma, \\ \lambda^2 \sin \Theta &= (\sin I_0 - \sin I \cos \Sigma) \sin I_0 \cos I \sin \Sigma - \\ &\quad - (\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \sin I \cos I_0 \sin \Sigma. \end{aligned} \tag{13}$$

Но, возводя оба уравнения (11) в квадрат и складывая их вместе, получаем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma)^2 + \sin^2 I_0 \cos^2 I \sin^2 \Sigma = \\ &= \sin^2 I + \sin^2 I_0 \cos^2 I - 2 \sin I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin^2 I_0 \sin^2 I \cos^2 \Sigma = \\ &= (1 - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma)^2 - \cos^2 I_0 \cos^2 I = \\ &= (1 - \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma)(1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma). \end{aligned}$$

Обе правые части уравнений (13) делятся на

$$1 - \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma;$$

следовательно, если мы положим

$$\varkappa = 1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma, \tag{14}$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{(1+\cos I_0 \cos I) \cos \Sigma - \sin I_0 \sin I}{\varkappa}, \\ \sin \Theta &= \frac{(\cos I_0 + \cos I) \sin \Sigma}{\varkappa}. \end{aligned} \tag{15}$$

Если эти значения подставить в (7), то мы получим

$$\begin{aligned} A \sin w &= \frac{\sin I \sin \Sigma}{\varkappa} = \frac{p}{\varkappa}, \\ A \cos w &= \frac{\sin I_0 \cos I + \cos I_0 \sin I \cos \Sigma}{\varkappa} = \operatorname{tg} I_0 + \frac{q}{\varkappa \cos I_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь можно написать уравнения (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos (v - \theta_0) + \frac{p}{\varkappa} s, \\ \cos B \sin (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos I_0 \sin (v - \theta_0) - \left(\operatorname{tg} I_0 + \frac{q}{\varkappa \cos I_0} \right) s, \\ \sin B \qquad\qquad &= \sin I_0 \sin (v - \theta_0) + s. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассматривая последние слагаемые первых двух из этих уравнений, легко видеть, что если выбрать неподвижную плоскость отсчета совпадающей в начальный момент времени с оскулирующей плоскостью, то $\varkappa$ будет порядка 2; произведения ps и qs суть порядка квадрата возмущающей силы и, кроме того, умножены на $\sin I$. Следовательно, соответствующим выбором неподвижной плоскости отсчета эти последние слагаемые сделаны почти неощутимыми; поэтому становится очевидной особенная польза этого необычного преобразования.

Мы еще должны определить Γ. Дифференцируя соотношения (15), мы получаем

$$\begin{aligned} \sin \Theta (d\theta - d\Gamma) &= \frac{\cos I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin I_0 \cos I}{\varkappa} dI + \\ &+ \frac{(1 + \cos I_0 \cos I) \sin \Sigma}{\varkappa} d\sigma + \frac{\cos \Theta}{\varkappa} d\varkappa, \\ \cos \Theta (d\theta - d\Gamma) &= -\frac{\sin I \sin \Sigma}{\varkappa} dI + \\ &+ \frac{(\cos I_0 + \cos I) \cos \Sigma}{\varkappa} d\sigma - \frac{\sin \Theta}{\varkappa} d\varkappa. \end{aligned} \tag{18}$$

Умножая первое из этих уравнений на $\sin \Theta$, а второе — на $\cos \Theta$ и складывая, получим

$$\begin{aligned} d\theta - d\Gamma &= \frac{(\cos I_0 + \cos I)(\cos I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin I_0 \cos I)}{\varkappa^2} \sin \Sigma \, dI + \\ &+ \frac{\sin I_0 \sin^2 I - (1 + \cos I_0 \cos I) \sin I \cos \Sigma}{\varkappa^2} \sin \Sigma \, dI + \\ &+ \frac{(1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma)(\cos I_0 + \cos I)}{\varkappa^2} d\sigma = \\ &= \frac{\sin I_0 \sin \Sigma}{\varkappa} dI + \frac{\cos I_0 + \cos I}{\varkappa} d\sigma. \end{aligned} \tag{19}$$

Если в этом уравнении мы заменим $d\theta$ его значением $d\sigma/\cos I$, то мы найдем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{\sin I_0 \sin \Sigma}{\varkappa} \frac{dI}{dt} + \frac{\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma}{\varkappa \cos I} \sin I \frac{d\sigma}{dt}. \tag{20}$$

Но уравнения (4) после дифференцирования дают

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \cos I \sin \Sigma \frac{dI}{dt} + \sin I \cos \Sigma \frac{d\sigma}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= \cos I \cos \Sigma \frac{dI}{dt} - \sin I \sin \Sigma \frac{d\sigma}{dt}, \end{aligned} \tag{21}$$

откуда

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{dt} = -\sin I_0 \cos I \sin \Sigma \frac{dI}{dt} + (\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma) \sin I \frac{d\sigma}{dt}. \tag{22}$$

Поэтому

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{\varkappa \cos I} \cdot \frac{q\,dp - p\,dq}{dt}. \tag{23}$$

Из уравнений (1) ясно, что Γ обращается в нуль, когда $t = 0$ и $\theta = \sigma = \theta_0$; следовательно, после интегрирования уравнения (23) аддитивная постоянная обращается в нуль, и мы имеем

$$\Gamma = \int_0^t \frac{q\,dp - p\,dq}{\varkappa \cos I}. \tag{24}$$

Это выражение можно привести к виду, более удобному для вычислений. Если мы введем h посредством следующей формулы:

$$h = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}},$$

где k — гауссова постоянная, m — масса планеты, а p — параметр орбиты, и если мы обозначим через $\mathscr{W}$ компоненту возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты, то из метода вариации произвольных постоянных известно, что

$$\begin{aligned} \sin I \frac{d\theta}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \sin(v - \sigma) \cdot \mathscr{W}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos(v - \sigma) \cdot \mathscr{W}. \end{aligned} \tag{25}$$

В этих выражениях следует подразумевать, что h и r принимают свои мгновенные значения.

При подстановке этих значений в уравнения (21) получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos I \sin(v - \theta_0) \cdot \mathscr{W}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos I \cos(v - \theta_0) \cdot \mathscr{W}, \end{aligned} \tag{26}$$

и поэтому, в силу соотношения (5), выражение (24) принимает вид

$$\Gamma = \int_0^t \frac{hrs}{\mu\varkappa} \mathscr{W}\, dt. \tag{27}$$

Поскольку как $\mathscr{W}$, так и s порядка возмущающей силы, то очевидно, что Γ порядка квадрата возмущающей силы, а также порядка квадрата наклонности. Это делает величину Γ почти неощутимой. Пренебрегая кубом возмущающей силы в выражении (27), мы можем считать k в этом выражении постоянным и вместо $\varkappa$ выбрать $2\cos^2 I_0$; тогда мы имеем весьма приближенно

$$\Gamma = \frac{h}{2\mu \cos^2 I_0} \int_0^t rs\mathscr{W}\, dt. \tag{28}$$

Если мы продифференцируем соотношение (5), учитывая принцип метода вариации произвольных постоянных, согласно которому первые производные от координат можно брать, не меняя элементы, то в результате получим

$$\frac{ds}{dv} = q\cos(v-\theta_0) + p\sin(v-\theta_0). \tag{29}$$

Объединяя это уравнение с (5), получаем

$$\begin{aligned} p &= -s\cos(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\sin(v-\theta_0), \\ q &= s\sin(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\cos(v-\theta_0). \end{aligned} \tag{30}$$

Эти значения p и q можно использовать в первом и втором уравнениях (17), когда произведения ps и qs достигают заметной величины. Обычно также точность будет достаточной, если положить $\varkappa = 2\cos^2 I_0$, или разложить $1/\varkappa$ в ряд вида

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{2\cos^2 I_0} + \frac{\sin I_0}{4\cos^4 I_0} q + \ldots . \tag{31}$$

Если мы выберем плоскость орбиты в момент начала счета времени в качестве неподвижной плоскости отсчета, то $I_0 = 0$ и θ_0 становится неопределенным, и так как $\varkappa = 2\cos^2(I/2)$, то уравнения (17) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \cos B\cos(L-\theta_0-\Gamma) &= \cos(v-\theta_0) + \frac{p}{2\cos^2\frac{I}{2}} s, \\ \cos B\sin(L-\theta_0-\Gamma) &= \sin(v-\theta_0) - \frac{q}{2\cos^2\frac{I}{2}} s, \\ \sin B &= s. \end{aligned} \tag{32}$$

Если мы умножим первое уравнение из (32) на $\cos(v-\theta_0)$, второе — на $\sin(v-\theta_0)$ и сложим получающиеся при этом уравнения, а затем умножим первое уравнение на $\sin(v-\theta_0)$, а второе — на $\cos(v-\theta_0)$ и вычтем полученные уравнения друг из друга, то в результате найдем следующие два уравнения:

$$\cos B \cos (L - v - \Gamma) = 1 + \frac{p \cos (v - \theta_0) - q \sin (v - \theta_0)}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s =$$

$$= 1 - \frac{s^2}{2 \cos^2 \frac{I}{2}},$$

$$\cos B \sin (L - v - \Gamma) = - \frac{p \sin (v - \theta_0) + q \cos (v - \theta_0)}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s = \tag{33}$$

$$= - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s \frac{ds}{dv}.$$

Пренебрегая величинами четвертого порядка относительно возмущающих сил, получим из этих уравнений

$$L = v + \Gamma - \frac{1}{2} s \frac{ds}{dv}. \tag{34}$$

Таким образом величина $\Gamma - \frac{1}{2} s \frac{ds}{dv}$ представляет собой приведение от плоскости мгновенной орбиты к неподвижной плоскости отсчета. Это уравнение, вероятно, является достаточно точным, чтобы представлять движение любого объекта в солнечной системе с точностью до тысячной доли секунды дуги, по крайней мере в течение нескольких столетий.

4. Уравнения для v и r. В предыдущем разделе было показано, каким образом координаты планеты подвергаются влиянию движения плоскости орбиты; теперь мы переходим к определению переменных v и r, откладывая до следующего раздела определение поправки s.

Мы начинаем с выбора вспомогательного эллипса в плоскости мгновенной орбиты, один из фокусов которого совпадает с началом координат. Обозначим среднюю аномалию в этом эллипсе через $n_0 z$, эксцентриситет — через e_0, а большую полуось — через a_0, причем $n_0^2 a_0^3 = \mu$, $\mu = k^2(1+m)$. Всюду в этой теории n_0, a_0, e_0 являются абсолютно постоянными величинами. Пусть теперь во вспомогательном эллипсе E_0 означает эксцентрическую аномалию, f_0 — истинную аномалию, r_0 — радиус-вектор; мы имеем

$$\begin{aligned} n_0 z &= E_0 - e_0 \sin E_0, \\ r_0 \cos f_0 &= a_0 \cos E_0 - a_0 e_0, \\ r_0 \sin f_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0. \end{aligned} \tag{35}$$

Пусть теперь π_0 есть долгота перигелия вспомогательного эллипса, отсчитываемая от начальной точки, определенной уравнением (2); π_0 также является абсолютной постоянной. Тогда, если мы обозначим через v долготу любой точки на этом эллипсе, отсчитываемую от начальной точки, то мы получим

$$v = f_0 + \pi_0. \tag{36}$$

До сих пор единственная связь между вспомогательным эллипсом и действительным положением планеты заключалась в том, что этот эллипс лежит в плоскости мгновенной орбиты. Введем теперь условие, чтобы точка с истинной аномалией f_0 лежала на действительном радиусе-векторе планеты. Тогда v представляет собой долготу планеты от начальной точки, а r_0 и f_0 являются радиусом-вектором и истинной аномалией той точки эллипса, в которой истинный радиус-вектор планеты пересекает этот эллипс. Пусть действительный радиус-вектор планеты r, и положим

$$r = r_0(1+\nu), \tag{37}$$

т. е. $1+\nu$ равно отношению радиуса-вектора к его отрезку, отсекаемому вспомогательным эллипсом.

Когда z и ν станут известными функциями времени и постоянных, положение планеты в мгновенной плоскости орбиты также будет известным. Поэтому решение задачи о движении в мгновенной плоскости состоит в определении z, ν и в определении смысла, который необходимо приписать постоянным n_0, a_0, e_0, π_0 и произвольным постоянным, которые появляются при интегрировании уравнений для z и ν.

Пусть теперь n, a, e, χ означают оскулирующие элементы планеты, причем первые три имеют обычный смысл, а χ есть дуга от начальной точки до мгновенного перигелия. Введем также h посредством формулы $h = k\sqrt{1+m}/\sqrt{p}$, как это было сделано в предыдущем разделе, и обозначим через h_0 эту же функцию от элементов вспомогательного эллипса.

Известно, что

$$r^2\frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}. \tag{38}$$

Тогда из этого уравнения, а также предшествующих уравнений имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{a(1-e^2)}{r} = 1+e\cos f, && \frac{a_0(1-e_0^2)}{r_0} = 1+e_0\cos f_0,\\
&r^2\frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2} = \frac{\mu}{h}, && r_0^2\frac{df_0}{dz} = n_0a_0^2\sqrt{1-e_0^2} = \frac{\mu}{h_0},\\
&\frac{dr}{dt} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f = he\sin f, && \frac{dr_0}{dz} = \frac{n_0a_0l_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\sin f_0 = h_0e_0\sin f_0,\\
&v = f_0+\pi_0 = f+\chi,\\
&r = r_0(1+\nu).
\end{aligned} \tag{39}$$

Из уравнений

$$f = f_0 - \chi + \pi_0$$

и

$$\frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2}$$

мы выводим следующее уравнение:

$$\frac{r_0a}{ra_0} = \frac{r_0 + r_0\cos f_0\cdot e\cos(\chi-\pi_0) + r_0\sin f_0\cdot e\sin(\chi-\pi_0)}{a_0(1-e^2)}.$$

Но мы имеем

$$r_0 = a_0(1-e_0^2) - r_0e_0\cos f_0$$

Подставляя это значение r_0 в предыдущее уравнение и полагая

$$\begin{aligned} e\cos(\chi-\pi_0) &= e_0+\xi(1-e_0^2), \\ e\sin(\chi-\pi_0) &= \eta(1-e_0^2), \end{aligned} \tag{40}$$

получаем

$$(1-e^2)=(1-e_0^2)\left[1-2e_0\xi-(1-e_0^2)(\xi^2+\eta^2)\right]. \tag{41}$$

Тогда

$$\frac{r_0a}{ra_0}=\frac{1+\xi\dfrac{r_0}{a_0}\cos f_0+\eta\dfrac{r_0}{a_0}\sin f_0}{1-2e_0\xi-(1-e_0^2)(\xi^2+\eta^2)}. \tag{42}$$

Дифференцирование уравнения для v из (39) дает

$$\frac{dv}{dt}=\frac{df_0}{dt}=\frac{df_0}{dz}\frac{dz}{dt}. \tag{43}$$

Почленное деление двух уравнений, написанных во второй строке в (39), дает

$$\frac{dz}{dt}=\frac{h_0}{h}\frac{r_0^2}{r^2}=\frac{h_0}{h(1+\nu)^2}. \tag{44}$$

Если мы положим

$$n=n_0(1+\beta)$$

и подставим значение r_0a/ra_0, определяемое уравнением (42), в уравнение (44), то мы получим

$$\frac{dz}{dt}=\frac{(1+\beta)\left(1+\xi\dfrac{r_0}{a_0}\cos f_0+\eta\dfrac{r_0}{a_0}\sin f_0\right)^2}{\left[1-2e_0\xi-(1-e_0^2)(\xi^2+\eta^2)\right]^{3/2}}. \tag{45}$$

Аналогичным путем, поскольку $a/a_0=(1+\beta)^{-2/3}$, мы получаем

$$1+\nu=\frac{1-2e_0\xi-(1-e_0^2)(\xi^2+\eta^2)}{(1+\beta)^{2/3}\left(1+\xi\dfrac{r_0}{a_0}\cos f_0+\eta\dfrac{r_0}{a_0}\sin f_0\right)}. \tag{46}$$

Комбинация уравнений (45) и (46) дает следующее уравнение:

$$(1+\nu)^{3/2}\frac{dz}{dt}=\left(1+\xi\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+\eta\frac{r_0}{a_0}\sin f_0\right)^{1/2}.$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат и умножая результат на $2h/h_0$, получаем

$$2\frac{h}{h_0}(1+\nu)^3\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2\frac{h}{h_0}+2\frac{h}{h_0}\xi\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+2\frac{h}{h_0}\eta\frac{r_0}{a_0}\sin f_0.$$

Положим

$$W=2\frac{h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1+2\frac{h}{h_0}\xi\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+2\frac{h}{h_0}\eta\frac{r_0}{a_0}\sin f_0. \tag{47}$$

Тогда

$$2\frac{h}{h_0}(1+\nu)^3\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=W+\frac{h_0}{h}+1.$$

Но из уравнения (44) имеем

$$\frac{h}{h_0}(1+\nu)^2\frac{dz}{dt}=1,$$

и поэтому

$$2(1+\nu)\frac{dz}{dt}=\overline{W}+\frac{h_0}{h}+1.$$

Вычитая из этого уравнения следующее уравнение, также полученное из (44),

$$(1+2\nu)\frac{dz}{dt}=\frac{h_0}{h}\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2},$$

находим

$$\frac{dz}{dt}=1+\overline{W}+\frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2. \tag{48}$$

Однако снова из (44) следует

$$\frac{h_0}{h}=(1+\nu)^2\frac{dz}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{dz}{dt}=1+\overline{W}+\nu^2\frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1+\overline{W}}{1-\nu^2}=1+\frac{\overline{W}+\nu^2}{1-\nu^2}. \tag{49}$$

Вскоре будет показано, что ν можно определить из $\overline{W}$ очень простым способом, который, однако, связан с дифференцированием по времени. Известно, что при получении первой производной по t от любой функции времени t и оскулирующих элементов мы рассматриваем эти оскулирующие элементы постоянными, считая переменным только t. Но если W представлено в виде периодического ряда с одной независимой переменной, то возникает затруднение, так как в этом случае элементы, которые необходимо считать постоянными, становятся связанными сложным образом с временем. Очевидно, члены функции $\overline{W}$, включающие в себя оскулирующие элементы h, ξ, η, можно было бы оставить в символической форме в виде множителей рядов, подлежащих дифференцированию. Однако в формулах и при вычислительной работе достигается значительное сокращение, если мы условимся представить $\overline{W}$ в виде функции от некоторой дополнительной независимой переменной, например τ, которая представляет собой время, когда оно входит в явной форме, т. е. в r_0 и f_0, тогда как оскулирующие элементы представляются в виде функций от t; функция $\overline{W}$, выраженная, таким образом, как функция от обеих переменных, t и τ, обозначается через W. После дифференцирования по τ можно заменить τ на t, и горизонтальная черточка над любым символом используется для того, чтобы показать, что это выполнено. Если F означает какую-нибудь функцию от координат и если Λ означает эту же функцию, представленную как функция от τ и t, причем члены, содержащие t, представляют оскулирующие элементы, то в символической форме мы имеем

$$\frac{dF}{dt}=\overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau}\right)}. \tag{50}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$F=\text{const}+\int\overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau}\right)}dt. \tag{51}$$

Возвращаясь теперь к вопросу об уравнении для определения ν, обозначим величины r, f, z и ν, рассматриваемые как функции от τ вместо t, соответственно через ϱ, ω, ζ, υ. Поэтому вместо уравнения (49) мы будем иметь следующее:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + \frac{W + \upsilon^2}{1 - \upsilon^2}, \tag{52}$$

в котором

$$W = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\,\xi\,\frac{\varrho_0}{a_0}\cos\omega_0 + 2\frac{h}{h_0}\,\eta\,\frac{\varrho_0}{a_0}\sin\omega_0. \tag{53}$$

В этом выражении ϱ_0 и ω_0 — те же самые функции от ζ, что и r_0 и f_0 от z. Аналогично уравнение (44) даст

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{h_0}{h(1+\upsilon)^2}. \tag{54}$$

Поскольку уравнение (54) можно написать в следующем виде:

$$\ln\frac{d\zeta}{d\tau} = \ln\frac{h_0}{h} - 2\ln(1+\upsilon),$$

то, дифференцируя это уравнение по τ, мы получаем

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{1}{2}\,\frac{(d^2\zeta/d\tau^2)}{(d\zeta/d\tau)}\,(1+\upsilon). \tag{55}$$

Полагая τ вместо t, приводим уравнение (48) к виду

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + W + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\right)^2 \tag{56}$$

и, дифференцируя это уравнение по τ, получаем

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{dW}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{d\tau} + 2\,\frac{h_0}{h}\,\frac{\upsilon}{(1+\upsilon)^3}\,\frac{d\upsilon}{d\tau}. \tag{57}$$

Почленное деление этого уравнения на уравнение (54) дает

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = \frac{dW}{d\zeta} + \frac{2\upsilon}{1+\upsilon}\,\frac{d\upsilon}{d\tau}.$$

Если этот результат подставить в правую часть уравнения (55), то мы найдем следующее уравнение:

$$\frac{d\upsilon}{d\tau} = -\frac{1}{2}\,\frac{dW}{d\zeta}.$$

Применяя к этому уравнению обозначение, употребленное в уравнении (50), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)}. \tag{58}$$

Наконец, интегрируя уравнения (49) и (58), умножая уравнение (49) на n_0 и прибавляя величины c_0 и C в качестве произвольных постоянных, мы имеем

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \frac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2}\, n_0\, dt, \tag{59}$$

$$\nu = C - \frac{1}{2}\int \overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)}\, dt. \tag{60}$$

Эти уравнения являются строгими. Мы видели, что функция W среди других переменных содержит ζ, и смысл этого символа (или z) заключается в том, что величина $n_0\zeta$ означает возмущенную среднюю аномалию. Следовательно, когда мы ограничиваемся величинами первого порядка относительно возмущающих сил, то в уравнении для W можно писать τ вместо ζ. При этом ограничении уравнения, определяющие z и ν, принимают следующий простой вид:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \bar{W}_0 n_0 \, dt, \tag{61}$$

$$\nu = C - \frac{1}{2} \int \overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)} dt, \tag{62}$$

где

$$W_0 = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\xi\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega + 2\frac{h}{h_0}\eta\frac{\varrho}{a_0}\sin\omega, \tag{63}$$

причем ϱ и ω обозначают эллиптические значения, зависящие от невозмущенной средней аномалии. При том же ограничении допустимо также заменить в последних двух членах выражения (63) отношение h/h_0 единицей; уравнение сохраняется в том же виде, так как оно будет служить для дальнейших приближений.

В тех случаях, когда должны быть рассмотрены величины порядка квадрата и более высоких степеней относительно возмущающих сил, мы не можем более полагать $\zeta = \tau$, а должны писать $\zeta = \tau + \delta\zeta$, где $\delta\zeta$ является функцией от τ и t, такой, что когда τ заменяется на t, то мы имеем $\delta z = z - t$. Поскольку при выполнении интегрирований, которые приводят к значениям z и ν, функция W и ее производные записываются с черточками, показывающими, что τ заменено на t, то легко видеть, что нам необходимо знать не $\delta\zeta$, а только соответствующую этой функции функцию δz. Если мы рассматриваем W как функцию от ζ, то применением теоремы Тэйлора мы получаем

$$W = W_0 + \frac{dW_0}{d\tau}\delta\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\delta\zeta^2 + \ldots,$$

где W_0 определяется выражением (63). Если τ заменено на t, то это уравнение принимает вид

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)}\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\right)}\delta z^2 + \ldots .$$

Мы имеем также

$$\overline{\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)} = \overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)} + \overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\right)}\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^3W_0}{d\tau^3}\right)}\delta z^2 + \ldots .$$

Поэтому строго уравнения (61) и (62) запишутся так:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \left[\nu^2 + \bar{W}_0 + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)}\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\right)}\delta z^2 + \ldots\right]\frac{n_0\,dt}{1-\nu^2}, \tag{64}$$

$$\nu = C - \frac{1}{2}\int\left[\overline{\left(\frac{dW_0}{d\tau}\right)} + \overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2}\right)}\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^3W_0}{d\tau^3}\right)}\delta z^2 + \ldots\right]dt. \tag{65}$$

Если мы обозначим $n_0 t + c_0$ через l, $n_0\tau + c_0$ через λ и допустим, что $n_0 z = l + n_0\delta z$, то уравнения (64) и (65) можно написать в следующем виде:

$$n_0\delta z = \int \left[\nu^2 + \overline{W}_0 + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\lambda}\right)} n_0\delta z + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\lambda^2}\right)} n_0^2\delta z^2 + \ldots \right] \frac{dl}{1-\nu^2}, \tag{66}$$

$$\nu = C - \frac{1}{2}\int \left[\overline{\left(\frac{dW_0}{d\lambda}\right)} + \overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\lambda^2}\right)} n_0\delta z + \overline{\left(\frac{d^3W_0}{d\lambda^3}\right)} n_0^2\delta z^2 + \ldots \right] dl, \tag{67}$$

в котором они оказываются наиболее удобными для практического применения.

5. Выражение для W_0. Найдем теперь выражение для функции W_0 через составляющие возмущающей силы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$. Если мы продифференцируем выражение (63) по t, то получим

$$\frac{dW_0}{dt} = 2\frac{d}{dt}\frac{h}{h_0} - \frac{d}{dt}\frac{h_0}{h} + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{h_0}\xi\right)\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{h_0}\eta\right)\frac{\varrho}{a_0}\sin\omega. \tag{68}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = \mathcal{R}, \\ &\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) = r\mathcal{S}. \end{aligned} \tag{69}$$

В силу уравнений (39) второе из этих уравнений можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{h} = -\frac{r}{\mu}\mathcal{S}, \tag{70}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{h_0}{h} = -\frac{h_0}{\mu}r\mathcal{S}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{h}{h_0} = -\frac{h^2}{\mu h_0}r\mathcal{S}. \tag{71}$$

Чтобы получить производные от $h\xi$ и $h\eta$, мы используем уравнения метода вариации произвольных постоянных, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{de}{dt} = \frac{a^2n\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left[\sin f\cdot\mathcal{R} + (\cos E + \cos f)\,\mathcal{S}\right], \\ &e\frac{d\chi}{dt} = \frac{a^2n\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left[-\cos f\cdot\mathcal{R} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\cdot\mathcal{S}\right]. \end{aligned} \tag{72}$$

Из уравнений (40) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{1-e_0^2}\left[\cos(\chi-\pi_0)\frac{de}{dt} - e\sin(\chi-\pi_0)\frac{d\chi}{dt}\right], \\ &\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{1-e_0^2}\left[\sin(\chi-\pi_0)\frac{de}{dt} + e\cos(\chi-\pi_0)\frac{d\chi}{dt}\right]. \end{aligned} \tag{73}$$

Подставляя уравнения (72) в эти уравнения и полагая $f+\chi-\pi_0=f_0$, согласно (39), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = \frac{a^2n\sqrt{1-e^2}}{\mu(1-e_0^2)}\Big\{&\sin f_0\cdot\mathcal{R} + \Big[\cos f_0 + \cos E\cos(\chi-\pi_0) - \\ &- \frac{r}{p}\sin f\sin(\chi-\pi_0)\Big]\mathcal{S}\Big\}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{a^2n\sqrt{1-e^2}}{\mu(1-e_0^2)}\Big\{&-\cos f_0\cdot\mathcal{R} + \Big[\sin f_0 + \cos E\sin(\chi-\pi_0) + \\ &+ \frac{r}{p}\sin f\cos(\chi-\pi_0)\Big]\mathcal{S}\Big\}. \end{aligned} \tag{74}$$

Если мы умножим эти уравнения на h и прибавим $\xi\, dh/dt$ к первому уравнению и $\eta\, dh/dt$ — ко второму, то после деления на постоянную h_0 мы получаем следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{h_0}\xi\right)=\frac{1}{h_0(1-e_0^2)}\left\{\sin f_0\cdot\mathcal{R}+\left[\cos f_0+\cos E\cos(\chi-\pi_0)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{r}{p}\sin f\sin(\chi-\pi_0)-\frac{h^2}{\mu}(e\cos(\chi-\pi_0)-e_0)\,r\right]\mathcal{S}\right\},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{h_0}\eta\right)=\frac{1}{h_0(1-e_0^2)}\left\{-\cos f_0\cdot\mathcal{R}+\left[\sin f_0+\cos E\sin(\chi-\pi_0)+\right.\right. \tag{75}$$
$$\left.\left.+\frac{r}{p}\sin f\cos(\chi-\pi_0)-\frac{h^2}{\mu}e\sin(\chi-\pi_0)\,r\right]\mathcal{S}\right\}.$$

Но поскольку $h^2/\mu=1/p$, то эти уравнения приводятся к такому виду:

$$\frac{1}{h_0}\frac{d}{dt}(h\xi)=\frac{1}{h_0(1-e_0^2)}\left[\sin f_0\cdot\mathcal{R}+\left(\cos f_0+\frac{\cos f_0+e_0}{1+e\cos f}\right)\mathcal{S}\right],$$
$$\frac{1}{h_0}\frac{d}{dt}(h\eta)=\frac{1}{h_0(1-e_0^2)}\left[-\cos f_0\cdot\mathcal{R}+\left(\sin f_0+\frac{\sin f_0}{1+e\cos f}\right)\mathcal{S}\right]. \tag{76}$$

Если мы умножим первое из этих уравнений на $2\varrho/a_0\cos\omega$, а второе — на $2\varrho/a_0\sin\omega$ и сложим произведения, то мы получим

$$\frac{2}{h_0}\frac{d}{dt}(h\xi)\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega+\frac{2}{h_0}\frac{d}{dt}(h\eta)\frac{\varrho}{a_0}\sin\omega=2\frac{h_0}{\mu}\varrho\sin(f_0-\omega)\cdot\mathcal{R}+$$
$$+2\frac{h_0}{\mu}\left[\varrho\cos(f_0-\omega)+\varrho\,\frac{\cos(f_0-\omega)+e_0\cos\omega}{1+e\cos f}\right]\mathcal{S}, \tag{77}$$

откуда находим

$$\frac{dW_0}{dt}=2\frac{h_0}{\mu}\varrho\sin(f_0-\omega)\cdot\mathcal{R}+\frac{h_0}{\mu}\left[2\frac{\varrho}{r}\cos(f_0-\omega)-1-2\frac{h^2}{h_0^2}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\varrho}{r}\frac{\cos(f_0-\omega)+e_0\cos\omega}{1+e\cos f}\right]r\mathcal{S}. \tag{78}$$

Если в этом выражении мы умножим член $-2h^2/h_0^2$ на

$$1-\frac{\varrho}{a_0(1-e_0^2)}+\frac{\varrho e_0\cos\omega}{a_0(1-e_0^2)},$$

то уравнение (78) может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{dW_0}{dt}=2\frac{h_0}{\mu}\varrho\sin(f_0-\omega)\cdot\mathcal{R}+\frac{h_0}{\mu}\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(f_0-\omega)-1+\right.$$
$$\left.+2\frac{h^2\varrho}{h_0^2a_0(1-e_0^2)}[\cos(f_0-\omega)-1]\right\}r\mathcal{S}. \tag{79}$$

Это и есть то уравнение, которое определяет W_0. Несмотря на его кажущуюся сложность, оно легко может быть решено, как только возмущающие силы приведены к требуемой форме, так как при вычислении самого W_0 мы всегда можем ограничиться эллиптическими значениями, вычисляя множители возмущающих сил, а затем эти множители могут быть выражены в виде неполных рядов. Полное уравнение (79) потребуется только в том случае, когда мы вычисляем возмущения, зависящие от квадратов и произведений возмущающих сил, и тогда оно будет дифференцироваться снова. Прежде чем приступить в дальнейшем к разложению W_0, найдем уравнение для определения s. Однако вместо того, чтобы определять непосредственно s, мы предпочитаем определить функцию $u/\cos I$. где u определяется равенством

$$u = \frac{r_0}{a_0} s. \tag{80}$$

6. Уравнение для u. Помня, что $v = f_0 + \pi_0$, мы выводим из соотношения (5) следующее уравнение:

$$u = \frac{r_0}{a_0} q \sin(f_0 + \pi_0 - \theta_0) - \frac{r_0}{a_0} p \cos(f_0 + \pi_0 - \theta_0). \tag{81}$$

Введем в этом уравнении всюду τ вместо t, за исключением двух элементов: p и q, и обозначим получившуюся при этом функцию через R (не следует смешивать с R, которым обозначена возмущающая функция). Дифференцируя эту функцию по t, мы получим

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{\varrho_0}{a_0} \sin(\omega_0 + \pi_0 - \theta_0) - \frac{dp}{dt} \frac{\varrho_0}{a_0} \cos(\omega_0 + \pi_0 - \theta_0). \tag{82}$$

Исключая из этого уравнения dq/dt и dp/dt посредством (26), имеем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{hr}{\mu} \cos I \cdot \frac{\varrho_0}{a_0} \sin(\omega_0 - f_0) \cdot \mathscr{W}. \tag{83}$$

После интегрирования этого уравнения мы находим u из следующего выражения:

$$u = \overline{R}, \tag{84}$$

где горизонтальная черта над функцией R указывает, что τ необходимо заменить на t.

Другое выражение для функции R можно получить при помощи теоремы (51):

$$u = \int \overline{\left(\frac{dR}{d\tau}\right)} dt. \tag{85}$$

Как и в случае уравнения для определения W, когда мы ограничиваемся возмущениями первого порядка относительно возмущающих сил, мы можем подставить эллиптические значения для координат в правой части уравнения (83). Мы полагаем

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{hr}{\mu} \cos I \frac{\varrho}{a_0} \sin(\omega - f_0) \cdot \mathscr{W}. \tag{86}$$

Тогда

$$u = \overline{R}_0 = \int \overline{\left(\frac{dR_0}{d\tau}\right)} dt. \tag{87}$$

Если необходимо рассмотреть члены второго и более высоких порядков, то в уравнении (83) следует использовать более точные значения координат. Поскольку эти члены возникают из переменных ϱ_0 и ω_0, то, применяя теорему Тэйлора, мы имеем

$$R = R_0 + \frac{dR_0}{d\tau} \delta\zeta + \frac{1}{2} \frac{d^2R_0}{d\tau^2} \delta\zeta^2 + \dots . \tag{88}$$

Когда τ заменено на t, мы будем иметь

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{\left(\frac{dR_0}{d\lambda}\right)} n_0\delta z + \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{d^2R_0}{d\lambda^2}\right)} (n_0\delta z)^2 + \dots . \tag{89}$$

Кроме того, дифференцирование выражения (88), если мы ограничиваемся членами второго порядка, дает

$$\frac{dR}{d\tau}=\frac{dR_0}{d\tau}+\frac{d^2R_0}{d\tau^2}\delta\zeta+\frac{dR_0}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta\zeta,$$

откуда выражение (87) для u принимает следующий вид:

$$u=\int\left[\left(\overline{\frac{dR_0}{d\tau}}\right)\left(1+\frac{d}{dt}\delta z\right)+\left(\overline{\frac{d^2R_0}{d\tau^2}}\right)n_0\delta z\right]dt. \tag{90}$$

В методе Ганзена возмущения получаются посредством функций W_0 и R_0, определяемых соответственно формулами (79) и (86). Прежде чем идти дальше, необходимо выбрать независимую переменную для последующего использования. Этот выбор может быть произведен в широких пределах, однако на практике обычно используются только две независимые переменные: время и эксцентрическая аномалия возмущаемой планеты. По первой переменной интегрирование выполняется легче, что представляет значительное преимущество, если необходимо рассматривать возмущения второго порядка. С другой стороны, применяемые ряды сходятся быстрее, когда они выражены через эксцентрическую аномалию в качестве аргумента. Мы дадим два варианта формул (79) и (86), соответствующие каждому из указанных путей решения.

7. Время как независимая переменная. Известно, каким образом можно выразить составляющие возмущающей силы $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{W}$ в виде частных производных от возмущающей функции. Однако вместо последней мы предпочитаем использовать другую функцию Ω, получаемую делением возмущающей функции на μ; это позволяет нам избавиться от делителя μ, встречающегося в уравнениях и представляющего излишнее усложнение. Таким образом, мы будем иметь

$$\frac{1}{\mu}\mathcal{R}=\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

$$\frac{1}{\mu}\mathcal{S}=\frac{\partial\Omega}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\mu}\mathcal{W}=\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

где z — расстояние от плоскости отсчета, которое после дифференцирования можно положить равным нулю.

Мы видели, что в формулах (79) и (86) можно ограничиться простыми эллиптическими значениями для величин, входящих в множители при возмущающих силах. Для облегчения записи мы, кроме того, отбрасываем нижние индексы, приписанные элементам; l означает теперь $nt+c$, где t — время, а n и c — постоянные. Пусть $T=dW_0/dl$ и $U=dR_0/dl$; мы имеем

$$T=\frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\varrho}{r}\sin(f-\omega)\cdot r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{2\varrho}{r}\cos(f-\omega)-\right.$$

$$\left.-1+\frac{2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial f}, \tag{91}$$

$$U=\frac{\cos I}{\sqrt{1-e^2}}r\varrho\sin(\omega-f)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Требуется преобразовать первое из этих уравнений так, чтобы заменить $\partial\Omega/\partial f$ на $\partial\Omega/\partial l$, поскольку последняя производная очень легко может быть получена дифференцированием периодического разложения Ω по l. Мы полагаем

$$T = Aa\frac{\partial\Omega}{\partial l} + Bar\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \quad U = Ca^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}\cos I \tag{92}$$

и переходим к определению A, B и C как функций от l и r. Замечая, что из полярного уравнения эллипса мы имеем

$$\frac{\varrho}{a(1-e^2)} = 1 - e\frac{\varrho\cos\omega}{a(1-e^2)},$$

легко видеть, что T состоит из трех частей, первая из которых не зависит от τ, тогда как остальные две части умножены на $\varrho\cos\omega$ и $\varrho\sin\omega$. Чтобы показать это, положим

$$T = \frac{d\Xi}{dl} + \frac{d\Upsilon}{dl}\left(\frac{\varrho}{a}\cos\omega + \frac{3}{2}e\right) + \frac{d\Psi}{dl}\frac{\varrho}{a}\sin\omega. \tag{93}$$

Тогда, сравнивая это выражение с первым уравнением из (91), мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{dl} &= -3\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{ae\cos f}{r} + \frac{e\cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial f} + \frac{ae\sin f}{r}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right],\\
\frac{d\Upsilon}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{a\cos f}{r} + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial f} + \frac{a\sin f}{r}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right],\\
\frac{d\Psi}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{a\sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial f} - \frac{a\cos f}{r}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right].
\end{aligned} \tag{94}$$

Но, согласно теории эллиптического движения, мы имеем

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dl} &= \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} = \frac{ae\cos f}{r\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\cos f}{(1-e^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}},\\
\frac{dr}{dl} &= \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}},\\
\frac{df}{dl} &= \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f,\\
\frac{dr}{de} &= -a\cos f.
\end{aligned} \tag{95}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{dl} &= -3a\frac{\partial\Omega}{\partial l},\\
\frac{d\Upsilon}{dl} &= \frac{2}{e}\left(a\frac{\partial\Omega}{\partial l} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right),\\
\frac{d\Psi}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial l}.
\end{aligned} \tag{96}$$

Однако вычисление этих выражений требует разложения функции Ω с точностью до порядка, который превосходит на единицу порядок членов, удерживаемых в возмущениях. Поэтому мы преобразуем T еще раз посредством следующего уравнения:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial l} = \frac{\partial\Omega}{\partial f}\frac{df}{dl} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dl}.$$

Вводя вместо вторых множителей в этом выражении их значения из (95), мы получаем

$$\frac{\partial\Omega}{\partial f}=\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial l}-\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}r\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{97}$$

Посредством этого уравнения мы исключаем $\partial\Omega/\partial f$ из второго уравнения (96) и получаем

$$\frac{d\Upsilon}{dl}=\frac{2}{1-e^2}\left[\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2e}a\frac{\partial\Omega}{\partial l}+\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]. \tag{98}$$

То же преобразование, проделанное с третьим уравнением (96), дает

$$\frac{d\Psi}{dl}=\frac{2}{1-e^2}\left\{\left[\frac{r}{a}\sin f+\frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right]a\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{a\sqrt{1-e^2}\cos f}{r}+\frac{e\sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}}+\frac{re\sin^2 f}{a(1-e^2)^{3/2}}\right]ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}.$$

Но

$$1=\frac{r}{a(1-e^2)}+\frac{er\cos f}{a(1-e^2)}.$$

Умножая член $a\sqrt{1-e^2}\cos f/r$ предыдущего уравнения на этот множитель, мы приводим весь этот член к следующему виду:

$$-\left[\frac{r\cos f}{a(1-e^2)^{3/2}}+\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}+\frac{er}{a(1-e^2)^{3/2}}\right]ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Теперь мы имеем

$$re\cos f+r-a(1-e^2)=0.$$

Если мы умножим это уравнение на $[e/a(1-e^2)^{3/2}]\,ar\,\partial\Omega/\partial r$ и сложим произведение с предыдущим выражением, то последнее примет следующий вид:

$$-\left(\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}}+2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right)ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Кроме того, мы имеем уравнение

$$\frac{d}{dl}\left[\frac{r}{a}\sin f+\frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right]=\frac{a\sqrt{1-e^2}\cos f}{r}+\frac{\cos f}{\sqrt{1-e^2}}+$$
$$+\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2 f+2\frac{er\sin^2 f}{a(1-e^2)^{3/2}}=$$
$$=\frac{2r\cos f+3ae}{a\sqrt{1-e^2}},$$

полученное тем же путем, что и выше. Поэтому

$$\frac{d\Psi}{dl}=\frac{2}{1-e^2}\left\{\left[\int\frac{2r\cos f+3ae}{a\sqrt{1-e^2}}\,dl\right]a\frac{\partial\Omega}{\partial l}-\frac{r\cos f+2ae}{a\sqrt{1-e^2}}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}. \tag{99}$$

Интеграл здесь должен быть взят таким образом, чтобы результат обращался в нуль при $l=0$.

Подставим первое уравнение из (96) и уравнения (98) и (99) в (93). Тогда легко видеть, что выражения для A, B и C имеют вид

$$
\begin{aligned}
A &= -3 + \frac{1}{1-e^2}\Big[\Big(2\frac{\varrho}{a}\cos\omega + 3e\Big)\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} + \\
&\qquad + 2\frac{\varrho\sin\omega}{a\sqrt{1-e^2}}\int\Big(2\frac{r}{a}\cos f + 3e\Big)dl\Big], \\
B &= \frac{1}{1-e^2}\Big[\Big(2\frac{\varrho}{a}\cos\omega + 3e\Big)\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} - 2\frac{\varrho\sin\omega}{a\sqrt{1-e^2}}\Big(\frac{r}{a}\cos f + 2e\Big)\Big], \\
C &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\frac{\varrho}{a}\sin(\omega - f).
\end{aligned}
\tag{100}
$$

При разложении T и U в ряды из периодических членов, аргументы которых состоят из линейных комбинаций λ, l, l' (штрихованные величины относятся к возмущающей планете), мы должны вычислять непосредственно только члены, содержащие $\pm\lambda$, и в случае T — члены, не зависящие от λ. Остальные члены, содержащие более высокие кратности λ, и в случае U члены, не зависящие от λ, могут быть легко дополнены после интегрирования в функциях W_0 и R_0. Этот способ пригоден при вычислении возмущений не только первого порядка, но и всех последующих порядков.

Коэффициенты A, B, C зависят от следующих функций:

$$\frac{r^2}{a^2}, \quad \frac{r}{a}\cos f, \quad \frac{r}{a}\sin f, \quad \frac{\varrho}{a}\cos\omega, \quad \frac{\varrho}{a}\sin\omega.$$

Периодические разложения этих функций по l и λ уже были выведены в гл. II. Если мы положим

$$P_j = \frac{1}{j}[J_{j-1}(je) - J_{j+1}(je)], \quad Q_j = \frac{1}{j}[J_{j-1}(je) + J_{j+1}(je)] \tag{101}$$

при условии, что

$$P_0 = -3e, \quad Q_0 = 0,$$

когда $j = 0$, то в этом случае

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} &= -\frac{5}{2}e + \frac{2}{1}Q_1\cos l + \frac{2}{2}Q_2\cos 2l + \frac{2}{3}Q_3\cos 3l + \ldots, \\
\int\Big(2\frac{r}{a}\cos f + 3e\Big)dl &= \frac{2}{1}P_1\sin l + \frac{2}{2}P_2\sin 2l + \frac{2}{3}P_3\sin 3l + \ldots, \\
\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} &= Q_1\sin l + Q_2\sin 2l + Q_3\sin 3l + \ldots, \\
\frac{r}{a}\cos f + 2e &= \frac{1}{2}e + P_1\cos l + P_2\cos 2l + P_3\cos 3l + \ldots .
\end{aligned}
\tag{102}
$$

В соответствии с утверждением, сделанным выше относительно этих функций от τ, достаточно положить

$$2\frac{\varrho}{a}\cos\omega + 3e = 2P_1\cos\lambda, \quad 2\frac{\varrho\sin\omega}{a\sqrt{1-e^2}} = 2Q_1\sin\lambda. \tag{103}$$

Подставляя (102) и (103) в выражения (100), мы получаем

$$A = -3 + \frac{2}{1-e^2}\left[-\frac{5}{2}eP_1\cos\lambda + \sum_1^\infty \frac{1}{j}(P_1Q_j \mp Q_1P_j)\cos(jl\pm\lambda)\right],$$

$$B = \frac{1}{1-e^2}\left[-eQ_1\sin\lambda + \sum_1^\infty (P_1Q_j \mp Q_1P_j)\sin(jl\pm\lambda)\right], \tag{104}$$

$$C = -\frac{1}{2}\sum_0^\infty (P_1Q_j \mp Q_1P_j)\sin(jl\pm\lambda).$$

Чтобы найти члены в W_0 и R_0, содержащие $\pm k\lambda$ в аргументах, по членам, имеющим в аргументах $\pm\lambda$, мы усматриваем из предыдущих уравнений, что в T и U коэффициенты последних являются линейными функциями от P_1 и Q_1 и что в случае $-\lambda$ мы должны только переменить знак у Q_1, чтобы получить соответствующий коэффициент. Также очевидно, что для $\pm k\lambda$ мы должны только написать P_k вместо P_1 и Q_k вместо Q_1. Эти соотношения между коэффициентами, очевидно, не изменяются при интегрировании этих функций по t, так как λ не зависит от этой переменной. Поэтому, поскольку они верны для T и U, они в равной степени будут верны и для W_0 и R_0. Чтобы сделать суть дела более ясной, допустим, что W_0 или R_0 представлено в виде следующей суммы:

$$\sum \alpha^{(k)} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(k\lambda + \beta t), \tag{105}$$

где α — числа, а βt означает ту часть аргумента, которая содержит l и l'. Тогда, если k означает целое положительное число, большее единицы, и если L и M — два неопределенных пока коэффициента, то мы будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= LP_k + MQ_k,\\ \alpha^{(-k)} &= LP_k - MQ_k,\\ \alpha^{(1)} &= LP_1 + MQ_1,\\ \alpha^{(-1)} &= LP_1 - MQ_1. \end{aligned} \tag{106}$$

Из третьего и четвертого соотношений мы выводим

$$L = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)}}{2P_1}, \quad M = \frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(-1)}}{2Q_1}. \tag{107}$$

Если эти значения подставить в первое и второе соотношения из (106) и для краткости положить

$$\eta^{(k)} = \frac{P_k}{2P_1} + \frac{Q_k}{2Q_1}, \qquad \theta^{(k)} = \frac{P_k}{2P_1} - \frac{Q_k}{2Q_1}, \tag{108}$$

то

$$\alpha^{(\pm k)} = \eta^{(k)}\alpha^{(\pm 1)} + \theta^{(k)}\alpha^{(\mp 1)}. \tag{109}$$

Кроме того, в случае R_0 мы можем вычислить $\alpha^{(0)}$ по $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(-1)}$; поскольку $Q_0 = 0$, то очевидно, что, полагая $\eta^{(0)} = P_0/2P_1$, мы получим

$$\alpha^{(0)} = \eta^{(0)}(\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)}). \tag{110}$$

Поскольку $\eta^{(k)}$ является величиной $|k-1|$-го порядка, а $\theta^{(k)}$ — величиной $|k+1|$-го порядка относительно эксцентриситета, то часто оказывается возможным пренебречь вторым членом правой части соотношения (109). Поскольку обе функции, $\varrho/a\cos\omega$ и $\varrho/a\sin\omega$, имеют эллиптические значения, которые остаются неизменными на протяжении всех приближений, то отсюда вытекает, что это упрощение пригодно для возмущений не только первого порядка, но и всех последующих порядков.

8. Постоянные интегрирования — время как независимая переменная. После интегрирования функции T необходимо дополнить функцию W_0 включением некоторых постоянных интегрирования. Чтобы определить эти постоянные, заметим, что интеграл от функции (93) можно представить в следующем виде:

$$W_0=k_0+\int\frac{d\Xi}{dl}\,dl+c_1\left(\frac{\varrho}{a}\cos\omega+\frac{3}{2}e\right)+\left(\frac{\varrho}{a}\cos\omega+\frac{3}{2}e\right)\int\frac{d\Upsilon}{dl}\,dl+$$
$$+c_2\frac{\varrho}{a}\sin\omega+\frac{\varrho}{a}\sin\omega\int\frac{d\Psi}{dl}\,dl=$$
$$=k_0+c_1\left(\frac{\varrho}{a}\cos\omega+\frac{3}{2}e\right)+c_2\frac{\varrho}{a}\sin\omega+\int T\,dl, \tag{111}$$

где k_0, c_1, c_2 — постоянные. Мы имеем

$$\frac{\varrho}{a}\cos\omega+\frac{3}{2}e=P_1\cos\lambda+P_2\cos 2\lambda+P_3\cos 3\lambda+\ldots,$$
$$\frac{\varrho}{a}\sin\omega=(Q_1\sin\lambda+Q_2\sin 2\lambda+Q_3\sin 3\lambda+\ldots)\sqrt{1-e^2}\,.$$

и если мы положим

$$k_1=c_1P_1,\quad k_2=c_2Q_1\sqrt{1-e^2},$$

то величины, которые должны быть прибавлены к $\int T dl$, чтобы дополнить W_0, принимают следующий вид:

$$k_0+k_1\left(\cos\lambda+\frac{P_2}{P_1}\cos 2\lambda+\frac{P_3}{P_1}\cos 3\lambda+\ldots\right)+$$
$$+k_2\left(\sin\lambda+\frac{Q_2}{Q_1}\sin 2\lambda+\frac{Q_3}{Q_1}\sin 3\lambda+\ldots\right). \tag{112}$$

Если в этом выражении мы заменим τ на t и затем проинтегрируем, то получим соответствующие члены в $n_0\delta z$, которые имеют вид

$$k_0n_0t+k_1\left(\sin l+\frac{1}{2}\frac{P_2}{P_1}\sin 2l+\frac{1}{3}\frac{P_3}{P_1}\sin 3l+\ldots\right)-$$
$$-k_2\left(\cos l+\frac{1}{2}\frac{Q_2}{Q_1}\cos 2l+\frac{1}{3}\frac{Q_3}{Q_1}\cos 3l+\ldots\right). \tag{113}$$

На этом этапе очевидно, что численное значение k_0 зависит от смысла, придаваемого величине n_0, и что k_0 должно быть выбрано таким образом, чтобы смысл n_0 оставался неизменным. Здесь мы отклонимся на некоторое время от основной темы, чтобы обсудить смысл элементов.

В тех случаях, когда необходимо вычислить абсолютные возмущения какого-либо объекта по методу, в котором численные значения каких-нибудь элементов предполагаются известными с самого начала, желательно знать эти значения со всей возможной степенью точности;

иначе погрешности в принятах численных значениях элементов могут вызвать значительные ошибки в выражениях для возмущений. Обычно принято начинать вычисления с оскулирующими элементами, так как эти элементы определены с динамической точки зрения строго и могут быть вычислены без особого труда. Однако если возмущения уже вычислены, то вообще говоря целесообразно связать их с какими-нибудь средними элементами, а не с оскулирующими элементами. Благодаря такому приему численные значения возмущений будут меньше, а их выражения несколько упростятся. Интуитивно средние элементы можно примерно представить следующим образом: они почти совпадают со средними значениями оскулирующих элементов за большое число обращений объекта. Операционно их можно определить различными способами в зависимости от тех методов, которые применяются для вычисления возмущений. В данном случае естественно дать им следующее определение. Средняя долгота в орбите для эпохи выбирается таким образом, чтобы $n_0\delta z$ не содержало постоянного члена. Среднее движение во вспомогательном эллипсе выбирается так, чтобы $n_0\delta z$ не содержало члена, пропорционального времени. Эксцентриситет и перигелий вспомогательного эллипса выбираются таким образом, чтобы $n_0\delta z$ не содержало чисто периодических членов с аргументами $\sin l$ и $\cos l$. Наклонность и узел в эпоху выбираются так, чтобы $u/\cos I$ не содержала чисто периодических членов с аргументами $\sin l$ и $\cos l$.

Разность между любым средним элементом и соответствующим ему оскулирующим элементом является величиной порядка возмущающих сил. Поэтому возмущения, предназначенные для использования с оскулирующими элементами, отличаются от возмущений, соответствующих средним элементам, по крайней мере на квадрат возмущающих сил.

Мы можем представить себе два пути перехода от оскулирующих элементов к средним элементам. Определив возмущения, соответствующие оскулирующим элементам, мы можем взять шесть членов, написанных выше, и вычислить изменения в элементах, необходимые для обращения их в нуль. Строго говоря, затем следовало бы проверить, не являются ли эти изменения в элементах настолько большими, чтобы произвести изменения в возмущениях. С другой стороны, мы можем с самого начала считать элементы, которые в действительности являются оскулирующими, средними элементами и после получения возмущений сравнить теорию с наблюдениями; новые элементы, полученные при помощи дифференциального исправления, будут фактически средними элементами. При строгом подходе необходимо снова проверить, не являются ли изменения в элементах настолько большими, чтобы вызвать изменения в возмущениях. В тех случаях, когда требуется высокая точность, может оказаться затруднительным выбрать какой-либо из этих двух способов; любой из них включает в себя последовательные приближения. Однако если для рассматриваемого объекта достаточны возмущения первого порядка, то обычно предпочитают второй способ, так как в любом случае необходимо проверять теорию при помощи сравнения с наблюдениями.

Теперь мы покажем, каким образом можно определить постоянные k_0, k_1, k_2, во-первых, в предположении, что элементы являются оскулирующими в момент времени $t=0$, и, во-вторых, в предположении, что они являются средними элементами. В первом случае необходимо, чтобы величина $n_0\delta z$, а также ее первая производная $\overline{W}_0$ обращались в нуль в указанную эпоху. Это требует, чтобы в функции W_0 коэффициенты при $\sin\lambda$, $\cos\lambda$ и членах, не зависящих от λ, в отдельности обращались в нуль. В связи с этим напомним, что любой член в функции W_0 вида

$$\alpha^{(\pm 1)}\sin(\pm\lambda+\beta t)$$

может быть представлен в виде

$$\alpha^{(\pm 1)}\sin\beta t\cos\lambda\pm\alpha^{(\pm 1)}\cos\beta t\sin\lambda,$$

и любой член

$$\alpha^{(\pm 1)}\cos(\pm\lambda+\beta t)$$

можно написать в виде

$$\alpha^{(\pm 1)}\cos\beta t\cos\lambda\mp\alpha^{(\pm 1)}\sin\beta t\sin\lambda.$$

Представляя функцию W_0 таким способом, мы вычисляем для момента времени $t=0$ сумму всех членов, независимых от λ, сумму всех членов, умноженных на $\sin\lambda$, и сумму всех членов, умноженных на $\cos\lambda$. Затем мы полагаем каждую из постоянных k_0, k_1, k_2 в отдельности равной соответственно этим трем суммам, взятым со знаком минус.

Во втором случае мы желаем определить k_0, k_1, k_2 таким образом, чтобы намеченные члены в $n_0\delta z$ тождественно обратились в нуль. Рассматривая сперва k_0, легко видеть, что постоянные члены в $\overline{W}_0$ порождаются членами в функции W_0 со следующими аргументами: $\cos(\lambda-l)$, $\cos(-\lambda+l)$, $\cos(2\lambda-2l)$, $\cos(-2\lambda+2l)$, $\cos(3\lambda-3l)$ и т. д. — и никакими иными. Поэтому мы суммируем коэффициенты всех этих членов и полагаем k_0 равным этой сумме, взятой со знаком минус. Что касается k_1, то члены в $\overline{W}_0$ с аргументом $\cos l$ возникают из членов в функции $\overline{W}_0$, имеющих аргумент $\cos(\pm l)$, а также из всех остальных косинусоидальных членов, содержащих только кратности λ и l, причем кратность λ, сложенная с кратностью l, в сумме дает единицу. Сложим все коэффициенты членов такого рода и обозначим их сумму через Σ_1; таким образом, мы имеем в $\overline{W}_0$ член $\Sigma_1\cos l$, а в $n_0\delta z$ — член $\Sigma_1\sin l$. Но в $n_0\delta z$ имеется также еще один член с тем же аргументом, порождаемый членом с аргументом $\sin\lambda$ в T. Обозначим этот член через $s\sin\lambda$. В таком случае мы имеем в W_0 член $sn_0t\sin\lambda$, в $\overline{W}_0$ член $sn_0t\sin l$ и в $n_0\delta z$ члены $-sn_0t\cos l+s\sin l$. Отсюда следует, что мы должны положить

$$k_1=-(s+\Sigma_1).$$

Мы определяем k_2 при помощи аналогичного процесса, помня, что при суммировании коэффициентов синусоидальных членов любые отрицательные аргументы должны быть сделаны положительными переменой знака коэффициента. Если обозначим член в T с аргументом $\cos\lambda$ через $c\cos\lambda$, а коэффициент при $\sin l$ в $\overline{W}_0$ через Σ_2, то найдем

$$k_2=-(c-\Sigma_2).$$

В случае R_0 мы находим при помощи процесса, аналогичного процессу для W_0, что эта функция должна быть дополнена выражением

$$k_3\left(\frac{1}{2}\frac{P_0}{P_1}+\cos\lambda+\frac{P_2}{P_1}\cos 2\lambda+\frac{P_3}{P_1}\cos 3\lambda+\ldots\right)+$$
$$+k_4\left(\sin\lambda+\frac{Q_2}{Q_1}\sin 2\lambda+\frac{Q_3}{Q_1}\sin 3\lambda+\ldots\right).$$

Постоянные k_3 и k_4 определяются аналогично, как и k_1 и k_2, но с упрощением: не появляются величины, обозначенные выше через c и s, так как не требуется дальнейшего интегрирования.

Мы должны еще рассмотреть аддитивную постоянную интегрирования, которая появляется при интегрировании $\overline{W}_0$. Из уже сказанного мы можем заключить, что должны вычислить для момента времени $t=0$ функцию $n_0\delta z$ с оскулирующими элементами и положить указанную постоянную равной этому значению, взятому со знаком минус, тогда как в случае средних элементов мы полагаем эту постоянную просто равной нулю.

Теперь мы определили шесть постоянных интегрирования, и известно, что никакие другие постоянные не могут существовать независимо от этих шести. Однако в уравнении (62) для ν мы до сих пор имеем постоянную интегрирования, обозначенную там через C (не смешивать с функцией C, на которую умножается возмущающая сила в выражении для U). Поскольку эта постоянная должна быть функцией от остальных шести, то, очевидно, должно существовать некоторое уравнение, определяющее ν без дополнительного интегрирования. Для того чтобы найти это уравнение, мы замечаем, что уравнение (63) можно использовать для вывода значения h/h_0 через W_0. Если мы обозначим через X_0 часть функции W_0, не зависящую от λ, а через X_1 — часть, умноженную на $\cos\lambda$, то

$$X_0 = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\,\xi\left(-\frac{3}{2}e_0\right),$$

$$X_1 = 2\frac{h}{h_0}\,\xi(P_1),$$

откуда

$$2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = X_0 + \frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}X_1. \tag{114}$$

В этом уравнении мы подставляем вместо h_0/h его значение из (44) и получаем следующее уравнение:

$$\frac{2}{(1+\nu)^2\left(1+\frac{d}{dt}\delta z\right)} - (1+\nu)^2\left(1+\frac{d}{dt}\delta z\right) - 1 = X_0 + \frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}X_1. \tag{115}$$

Это уравнение, когда известно $d/dt\delta z$, дает ν без дополнительного интегрирования. Чтобы привести его к виду, удобному для вычислений, мы прибавим к обеим частям такую величину, чтобы левая часть стала равной -6ν; тогда, деля обе части на -6, мы получаем

$$\nu = -\frac{1}{6}\left(X_0 + \frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}X_1\right) - \frac{1}{2}\left[(1+\nu)^2\frac{d}{dt}\delta z + \nu^2\right] + \\ + \frac{\left[(1+\nu)^2\frac{d}{dt}\delta z + 2\nu + \nu^2\right]^2}{3(1+\nu)^2\left(1+\frac{d}{dt}\delta z\right)}. \tag{116}$$

Это уравнение является точным. Если мы можем ограничиться членами первого порядка относительно возмущающих сил, то оно приводится к следующему виду:

$$\nu = -\frac{1}{6}\left(X_0 + \frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}X_1\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta z \tag{117}$$

или, если должны быть включены члены второго порядка, к уравнению вида

$$\nu=-\frac{1}{6}\left(X_0+\frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}X_1\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta z+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{dt}\delta z+\frac{1}{2}\nu\right)^2+\frac{3}{4}\nu^2. \tag{118}$$

Так как мы уже видели, что постоянная часть выражения X_0 равна k_0, постоянная часть X_1 равна k_1 и что в случае средних элементов, рассмотренном выше, $d/dt\delta z$ не содержит постоянной части, то отсюда следует, что в этом же случае постоянная часть ν равна

$$C=-\frac{1}{6}\left(k_0+\frac{3}{2}\frac{e_0}{P_1}k_1\right), \tag{119}$$

тогда как в случае оскулирующих элементов постоянная C должна быть дополнена путем прибавления к правой части выражения (119) половины постоянной части $d/dt\delta z$, взятой с обратным знаком.

Уравнение (117) можно почти так же легко применить для определения полного значения ν, как и другие, и оно приспособлено лучше других уравнений для нахождения членов, умноженных на n_0t.

9. Эксцентрическая аномалия в качестве независимой переменной. Под эксцентрической аномалией как независимой переменной следует понимать переменную, которая связана с t посредством некоторых постоянных элементов, точные значения которых пока остаются неопределенными, но будут определены в конце таким образом, чтобы сделать этот выбор независимой переменной возможно более выгодным. Обозначим эту переменную через E_0 и соответствующий радиус-вектор — через r_0. Тогда, используя нижний индекс нуль для обозначения названных выше постоянных элементов, мы можем написать следующие уравнения

$$n_0t+c_0=E_0-e_0\sin E_0,\quad n_0dt=\frac{r_0}{a_0}dE_0.$$

В связи с этим определим T и U формулами

$$T=\frac{dW_0}{dE_0}\quad\text{и}\quad U=\frac{dR_0}{dE_0}.$$

Тогда

$$T=\frac{h_0r_0}{a_0n_0}\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(f_0-\omega)-1+\frac{2h^2\varrho}{h_0^2a_0(1-e_0^2)}[\cos(f_0-\omega)-1]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial f}+$$
$$+2\frac{h_0r_0}{a_0n_0}\frac{\varrho}{r}\sin(f_0-\omega)r\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{120}$$

$$U=\frac{r_0}{a_0n_0}hr\frac{\varrho}{a_0}\sin(\omega-f_0)\frac{\partial\Omega}{\partial z}\cos I.$$

В том случае, когда мы ограничиваемся первым порядком возмущающих сил, первое из этих выражений приводится к следующему виду:

$$T=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{2\varrho\cos(f-\omega)-r+\frac{2\varrho r}{a(1-e^2)}\left[\cos(f-\omega)-1\right]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial f}+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\varrho\sin(f-\omega)r\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{121}$$

в котором нижний индекс нуль подразумевается. Так как, согласно теории эллиптического движения,

$$\frac{df}{dE}=\frac{\sin f}{\sin E}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}, \qquad \frac{dr}{dE}=\frac{er\sin f}{\sqrt{1-e^2}},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial E}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial f}+\frac{er\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{122}$$

Посредством этого уравнения мы исключаем $\partial\Omega/\partial f$ из уравнения (121). Таким образом получаем

$$T=Ma\frac{\partial\Omega}{\partial E}+Nar\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{123}$$

где

$$\begin{aligned} M&=\frac{1}{a^2(1-e^2)}\left\{2r\varrho\cos(f-\omega)-r^2+\frac{2r^2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-\omega)-1]\right\},\\ N&=\frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\left\{2\varrho\sin(f-\omega)-\left\{2\varrho\cos(f-\omega)-r+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{2r\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\frac{er\sin f}{a(1-e^2)}\right\}. \end{aligned} \tag{124}$$

Мы исключаем r, f, ϱ и ω из этих уравнений посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a}\cos f&=\cos E-e, & \frac{\varrho}{a}\cos\omega&=\cos\varepsilon-e,\\ \frac{r}{a}\sin f&=\sqrt{1-e^2}\sin E, & \frac{\varrho}{a}\sin\omega&=\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon,\\ \frac{r}{a}&=-1-e\cos E, & \frac{\varrho}{a}&=1-e\cos\varepsilon, \end{aligned}$$

где ε означает ту же функцию от τ, что и E от t. При преобразовании N замечаем, что

$$\frac{er^2\sin f}{a^2(1-e^2)^{3/2}}=\frac{(1-e\cos E)\,e\sin E}{1-e^2},$$

$$\frac{2\varrho r}{a^2(1-e^2)^{3/2}}[\cos(f-\omega)-1]\frac{er\sin f}{a(1-e^2)}=-\frac{2}{1-e^2}[\cos(\varepsilon-E)-1]\,e\sin E,$$

$$\begin{aligned} \frac{2\varrho\sin(f-\omega)}{a\sqrt{1-e^2}}-\frac{2\varrho\cos(f-\omega)}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{er\sin f}{a(1-e^2)}&=2\frac{\sin E}{(1-e^2)}\frac{\varrho}{a}\cos\omega-2\frac{\cos E}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\varrho}{a}\sin\omega=\\ &=2\frac{\sin E}{1-e^2}(\cos\varepsilon-e)-2\cos E\sin\varepsilon. \end{aligned}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} M&=\frac{1}{1-e^2}\left[-3\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)+2e\cos E-\frac{1}{2}e^2\cos 2E+e^2\cos(\varepsilon+E)-\right.\\ &\qquad\left.-3e\cos\varepsilon+(4-e^2)\cos(\varepsilon-E)-e\cos(\varepsilon-2E)\right],\\ N&=\frac{1}{1-e^2}\left[e\sin E-\frac{1}{2}e^2\sin 2E+e^2\sin(\varepsilon+E)-\right.\\ &\qquad\left.-e\sin\varepsilon-(2-e^2)\sin(\varepsilon-E)+e\sin(\varepsilon-2E)\right]. \end{aligned} \tag{125}$$

Таким образом, мы видим, что M и N являются конечными функциями от ε и E.

Когда приближение ограничивается первым порядком относительно возмущающих сил, то второе из выражений (120) приводится к следующему виду:

$$U = \frac{r^2 \varrho}{a\sqrt{1-e^2}} \sin(\omega - f) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos I.$$

Вводя множитель Q таким образом, чтобы это уравнение приняло вид

$$U = Qa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos I, \tag{126}$$

находим, что

$$Q = e\sin E - \frac{1}{2} e^2 \sin 2E + \frac{1}{2} e^2 \sin(\varepsilon + E) - \frac{3}{2} e \sin \varepsilon + \\ + \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \sin(\varepsilon - E) - \frac{1}{2} e \sin(\varepsilon - 2E). \tag{127}$$

Итак, Q, подобно M и N, выражается в конечном виде через ε и E.

10. Постоянные интегрирования — эксцентрическая аномалия как независимая переменная. В случае оскулирующих элементов порядок вычисления постоянных интегрирования в точности совпадает с порядком, описанным уже для того случая, когда независимой переменной является время, а вместо множителей $\cos\lambda$ и $\sin\lambda$ появляются $\cos\varepsilon$ и $\sin\varepsilon$. В случае средних элементов постоянные k определяются аналогичным путем, что и ранее, однако величины, прибавляемые к интегралам для дополнения значений W_0 и R_0, выглядят несколько проще; они сводятся к следующим значениям:

$$k_0 + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon \tag{128}$$

и

$$k_3(\cos\varepsilon - e) + k_4 \sin\varepsilon. \tag{129}$$

11. Возмущающая функция и ее производные. Точные выражения, выведенные в этой главе для возмущений, могут быть проинтегрированы лишь путем последовательных приближений. Мы только что получили удобные уравнения для первого приближения, в котором возмущения получаются из функций T и U, причем все входящие в эти функции переменные ограничены своими эллиптическими значениями. Во втором приближении мы определим приращения δT и δU, которые после прибавления к T и U дадут значения этих функций, получающиеся в том случае, если к эллиптическим (невозмущенным) значениям переменных прибавить возмущения первого порядка. По приращениям δT и δU будут определены возмущения второго порядка.

В гл. XV будет показано, каким образом величины

$$\Omega, \ \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \ r\frac{\partial \Omega}{\partial z} \ \text{и} \ \frac{\partial \Omega}{\partial l} \ \text{или} \ \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

могут быть выражены бесконечными рядами. Очевидно, что при вычислении возмущений второго порядка понадобятся вторые частные производные от Ω. Рассмотрим теперь этот вопрос подробно.

Пусть x, y, z обозначают прямоугольные координаты возмущаемой планеты, отнесенные к любой системе осей, а x', y', z' — координаты возмущающей планеты, отнесенные к тем же осям. Тогда известно, что

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right), \tag{130}$$

где

$$\Delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Расположим оси x и y в мгновенной плоскости орбиты возмущаемой планеты и обозначим координаты в этом случае через X_1, Y_1, Z, где Z — исчезающе малая величина. Тогда частная производная от Ω по z имеет следующее выражение:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z', \tag{131}$$

и при вычислении остальных производных от Ω мы можем принять для Ω следующую формулу:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{X_1x'+Y_1y'}{r'^3}\right), \tag{132}$$

где теперь

$$\Delta^2 = (X_1-x')^2 + (Y_1-y')^2 + z'^2.$$

Возмущающая функция не зависит от выбора начала координат, и поэтому мы можем выбрать это начало по нашему усмотрению. Наиболее простые выражения, соответствующие использованию переменных Ганзена, получаются при выборе в качестве прямой, от которой отсчитываются долготы, линии узлов мгновенной орбиты возмущающей планеты относительно мгновенной орбиты возмущаемой планеты в момент времени $t=0$. Пусть взаимная наклонность этих двух плоскостей орбит обозначена через $\mathcal{J}$, и пусть φ — дуга, идущая в направлении движения от оси X до узла, а ψ — дуга от оси X' до того же узла в том же направлении. Тогда прямоугольные координаты, отнесенные к плоскости мгновенной орбиты возмущаемой планеты и к узлу как к началу счета долгот, равны

$$\begin{aligned} X_1 &= r\cos(v-\varphi), & x' &= r'\cos(v'-\psi),\\ Y_1 &= r\sin(v-\varphi), & y' &= r'\cos\mathcal{J}\sin(v'-\psi),\\ Z &= 0, & z' &= -r'\sin\mathcal{J}\sin(v'-\psi). \end{aligned} \tag{133}$$

Требуется заменить v и v' на f_0 и f_0'. Мы имеем

$$v = f_0 + \pi_0, \quad v' = f_0' + \pi_0'$$

и полагаем

$$\pi_0 - \varphi = \Pi, \quad \pi_0' - \psi = \Pi'.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_1 &= r\cos(f_0+\Pi), & x' &= r'\cos(f_0'+\Pi'),\\ Y_1 &= r\sin(f_0+\Pi), & y' &= r'\cos\mathcal{J}\sin(f_0'+\Pi'),\\ Z &= 0, & z' &= -r'\sin\mathcal{J}\sin(f_0'+\Pi'). \end{aligned} \tag{134}$$

Если мы подставим эти значения в выражение (132) и положим

$$H = \cos(f_0+\Pi)\cos(f_0'+\Pi') + \cos\mathcal{J}\sin(f_0+\Pi)\sin(f_0'+\Pi'), \tag{135}$$

то получим

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right) \qquad (136)$$

и

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H. \qquad (137)$$

Это — уравнение, которое в тригонометрии на плоскости определяет сторону треугольника через остальные две стороны и косинус угла, заключенного между ними, откуда легко видеть, что H есть косинус угла между двумя радиусами-векторами.

Частным дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial f} &= -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'H', \\ r\frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{m'}{1+m}\left[\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'H - \frac{r^2}{\Delta^3}\right], \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin \mathcal{Y} \sin (f'_0 + \Pi'), \end{aligned} \qquad (138)$$

где

$$H' = -\frac{\partial H}{\partial f_0} = \sin (f_0 + \Pi) \cos (f'_0 + \Pi') - \cos \mathcal{Y} \cos (f_0 + \Pi) \sin (f'_0 + \Pi'). \qquad (139)$$

Таким образом, частные производные от Ω, связанные с определением T и U, выражаются как функции от семи переменных: r, r', f_0, f'_0, $\mathcal{Y}$, Π и Π'. В первом приближении допустимо считать последние три величины постоянными, благодаря чему они легко получаются из начальных элементов обеих планет при помощи формул сферической тригонометрии для использования в уравнениях (138). Если для возмущений первого порядка применяются выражения (92), то вместо первого уравнения из (138) мы имеем уравнение для $\partial\Omega/\partial l$, которое можно получить непосредственным дифференцированием ряда, выражающего функцию Ω.

Теперь мы найдем δT и δU, применяя к выражениям (91) теорему Тэйлора. Однако сначала мы заметим, что поскольку $r = r_0(1+\nu)$, $r' = r'_0(1+\nu')$, а r_0 и f_0 — функции от $n_0 z = l + n_0\delta z$, то, очевидно, мы можем вычислить частные производные по $n\delta z$, $n'\delta z'$, ν, ν' (отбрасывая нижний индекс у n) вместо того, чтобы брать их по r, r', f_0, f'_0. Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{\partial T}{\partial l} n\delta z + \frac{\partial T}{\partial l'} n'\delta z' + \frac{\partial T}{\partial \nu}\nu + \frac{\partial T}{\partial \nu'}\nu' + \frac{\partial T}{\partial h}\delta h + \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial \mathcal{Y}}\delta\mathcal{Y} + \frac{\partial T}{\partial \Pi}\delta\Pi + \frac{\partial T}{\partial \Pi'}\delta\Pi', \\ \delta U &= \frac{\partial U}{\partial l} n\delta z + \frac{\partial U}{\partial l'} n'\delta z' + \frac{\partial U}{\partial \nu}\nu + \frac{\partial U}{\partial \nu'}\nu' + \frac{\partial U}{\partial h}\delta h + \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial \mathcal{Y}}\delta\mathcal{Y} + \frac{\partial U}{\partial \Pi}\delta\Pi + \frac{\partial U}{\partial \Pi'}\delta\Pi' + \frac{\partial U}{\partial I}\delta I. \end{aligned} \qquad (140)$$

Члены выражений для δT и δU, которые зависят от $\delta\mathcal{Y}$, $\delta\Pi$ и $\delta\Pi'$, могут быть сделаны вместо этого зависимыми от u, u', du/dE, и это полезно сделать, поскольку последние три величины уже имеются в нашем распоряжении после первого приближения. Мы можем воспользоваться выражениями (135) — (139), так как $\mathcal{Y}$, Π и Π' входят только таким образом в функции T и U. Обозначим приращение функции Ω, порождаемое только приращениями величин $\mathcal{Y}$, Π и Π', символом δ'. Тогда

$$\delta'\Omega = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mathcal{Y}}\,\delta\mathcal{Y} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \Pi}\,\delta\Pi + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \Pi'}\,\delta\Pi'. \tag{141}$$

Это выражение необходимо теперь привести к следующему виду:

$$\delta'\Omega = Au + B\frac{du}{dE} + Cu',$$

где символы A, B, C не следует смешивать с выражениями в предыдущих разделах, обозначенными теми же буквами.

Если мы определим два угла, Φ и Ψ, формулами

$$\Phi = \pi_0 - \sigma - \Pi, \quad \Psi = \pi_0' - \sigma' - \Pi', \tag{142}$$

то, согласно формулам сферической тригонометрии, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\sin\mathcal{Y}\sin\Phi = \sin I'\sin(\theta-\theta'),\\
&\sin\mathcal{Y}\cos\Phi = \cos I'\sin I - \sin I'\cos I\cos(\theta-\theta'),\\
&\sin\mathcal{Y}\sin\Psi = \sin I\sin(\theta-\theta'),\\
&\sin\mathcal{Y}\cos\Psi = -\cos I\sin I' + \sin I\cos I'\cos(\theta-\theta'),
\end{aligned} \tag{143}$$

откуда при помощи (2) можно вывести следующие выражения:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{Y} &= \cos\Phi\,dI + \frac{\sin I\sin\Phi}{\cos I}\,d\sigma - \cos\Psi\,dI' - \frac{\sin I'\sin\Psi}{\cos I'}\,d\sigma',\\
d\Pi &= \operatorname{ctg}\mathcal{Y}\left(\sin\Phi\,dI - \frac{\sin I\cos\Phi}{\cos I}\,d\sigma\right) -\\
&\quad - \operatorname{cosec}\mathcal{Y}\left(\sin\Psi\,dI' - \frac{\sin I'\cos\Psi}{\cos I'}\,d\sigma'\right),\\
d\Pi' &= \operatorname{cosec}\mathcal{Y}\left(\sin\Phi\,dI - \frac{\sin I\cos\Phi}{\cos I}\,d\sigma\right) -\\
&\quad - \operatorname{ctg}\mathcal{Y}\left(\sin\Psi\,dI' - \frac{\sin I'\cos\Psi}{\cos I'}\,d\sigma'\right).
\end{aligned} \tag{144}$$

Из уравнений (4) мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
dI &= \frac{\sin(\sigma-\theta_0)}{\cos I}\,dp + \frac{\cos(\sigma-\theta_0)}{\cos I}\,dq,\\
d\sigma &= \frac{\cos(\sigma-\theta_0)}{\sin I}\,dp - \frac{\sin(\sigma-\theta_0)}{\sin I}\,dq,
\end{aligned} \tag{145}$$

которые после подстановки в выражения (144) вместе с аналогичными соотношениями для dI' и $d\sigma'$ дают

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{Y} &= \frac{q_1}{\cos I} - \frac{q_1'}{\cos I'},\\
\delta\Pi &= \operatorname{ctg}\mathcal{Y}\,\frac{p_1}{\cos I} - \operatorname{cosec}\mathcal{Y}\,\frac{p_1'}{\cos I'},\\
\delta\Pi' &= \operatorname{cosec}\mathcal{Y}\,\frac{p_1}{\cos I} - \operatorname{ctg}\mathcal{Y}\,\frac{p_1'}{\cos I'},
\end{aligned} \tag{146}$$

где

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\delta p\cos\Phi_0 + \delta q\sin\Phi_0,\\
q_1 &= \delta p\sin\Phi_0 + \delta q\cos\Phi_0,\\
p_1' &= -\delta p'\cos\Psi_0 + \delta q'\sin\Psi_0,\\
q_1' &= \delta p'\sin\Psi_0 + \delta q'\cos\Psi_0,
\end{aligned} \tag{147}$$

а Φ_0 и Ψ_0 — значения Φ и Ψ при $\sigma=\theta_0$ и $\sigma'=\theta_0'$. Величины p_1 и q_1 можно выразить через u и du/dE. Поскольку здесь мы не должны проводить различие между r и r_0, f и f_0, то имеем уравнение вида

$$u=\delta q\frac{r}{a}\sin(f+\pi_0-\theta_0)-\delta p\frac{r}{a}\cos(f+\pi_0-\theta_0),$$

которое в силу соотношений (147) можно написать в следующем виде:

$$u=q_1\frac{r}{a}\sin(f+\Pi)+p_1\frac{r}{a}\cos(f+\Pi). \tag{148}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dE}r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\cos E=\frac{r\cos f}{\sqrt{1-e^2}}+\frac{re}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\frac{d}{dE}r\cos f=-a\sin E=-\frac{r\sin f}{\sqrt{1-e^2}},$$

то имеем

$$\frac{du}{dE}=q_1\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}[\cos(f+\Pi)+e\cos\Pi]-$$
$$-p_1\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}[\sin(f+\Pi)+e\sin\Pi]. \tag{149}$$

Путем исключения получаем из уравнений (148) и (149)

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{u}{1-e^2}[\cos(f+\Pi)+e\cos\Pi]-\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{du}{dE}\sin(f+\Pi),\\ q_1&=\frac{u}{1-e^2}[\sin(f+\Pi)+e\sin\Pi]+\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{du}{dE}\cos(f+\Pi). \end{aligned} \tag{150}$$

Частным дифференцированием выражения (136) мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\mathcal{Y}}&=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'\sin\mathcal{Y}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),\\ \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\Pi}&=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'[\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')-\\ &\qquad-\cos\mathcal{Y}\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')],\\ \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\Pi'}&=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'[\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')-\\ &\qquad-\cos\mathcal{Y}\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')]. \end{aligned} \tag{151}$$

Подставляя эти выражения, а также (146) в (141), находим

$$\begin{aligned} \delta'\Omega&=-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'\sin\mathcal{Y}\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{p_1}{\cos I}-\\ &-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'\sin\mathcal{Y}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{q_1}{\cos I}+\\ &+\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'\sin\mathcal{Y}\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\frac{p_1'}{\cos I'}+\\ &+\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'\sin\mathcal{Y}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{q_1'}{\cos I'}. \end{aligned} \tag{152}$$

Из уже полученного выражения для $\partial\Omega/\partial z$ легко видеть, что выражение (152) равносильно следующему:

$$\begin{aligned}\delta'\Omega = \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\, r\cos(f+\Pi)\frac{p_1}{\cos I} + \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\, r\sin(f+\Pi)\frac{q_1}{\cos I} + \\ + \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z'}\, r'\cos(f'+\Pi')\frac{p_1'}{\cos I'} + \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z'}\, r'\sin(f'+\Pi')\frac{q_1'}{\cos I'}.\end{aligned} \tag{153}$$

Если мы подставим в это выражение значение au, определяемое формулой (148), и соответствующее значение $a'u'$, то получим

$$\delta'\Omega = a\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\frac{u}{\cos I} + a'\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}. \tag{154}$$

Дифференцируя это выражение по f и r, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial f}\delta'\Omega &= a\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial f\,\partial z}\frac{u}{\cos I} + a\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\frac{du}{df}\frac{1}{\cos I} + a'\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial f\,\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}, \\ r\frac{\partial}{\partial r}\delta'\Omega &= ar\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial r\,\partial z}\frac{u}{\cos I} + a\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}r\frac{du}{dr}\frac{1}{\cos I} + a'r\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial r\,\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}.\end{aligned} \tag{155}$$

Но из (148) находим

$$r\frac{du}{dr} = u,$$

$$a\frac{du}{df} = q_1 r\cos(f+\Pi) - p_1 r\sin(f+\Pi),$$

или, исключая p_1 и q_1 при помощи (150),

$$a\frac{du}{df} = -\frac{re\sin f}{1-e^2}u + \frac{r}{\sqrt{1-e^2}}\frac{du}{dE}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial f}\delta'\Omega &= \left(a\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial f\,\partial z} - \frac{re\sin f}{1-e^2}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\right)\frac{u}{\cos I} + \frac{r}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\frac{1}{\cos I}\frac{du}{dE} + \\ &\quad + a'\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial f\,\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}, \\ r\frac{\partial}{\partial r}\delta'\Omega &= \left(ar\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial r\,\partial z} + a\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z}\right)\frac{u}{\cos I} + a'r\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial r\,\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}.\end{aligned} \tag{156}$$

Из третьего уравнения (138) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\delta'\Omega = \frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin\mathfrak{J}\cdot r'\sin(f'+\Pi')\Delta\delta'\Delta - \\ - \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos\mathfrak{J}\cdot r'\sin(f'+\Pi')\,\delta\mathfrak{J} - \\ - \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\sin\mathfrak{J}\cdot r'\cos(f'+\Pi')\,\delta\Pi'.\end{aligned} \tag{157}$$

Но, очевидно,

$$\Delta\delta'\Delta = -rr'\delta'H,$$

и, следовательно,

$$\delta'\Omega = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\Delta\delta'\Delta.$$

Сравнивая это выражение с выражением (154), получаем

$$\Delta\delta'\Delta = \sin\mathfrak{J}\cdot ar'\sin(f'+\Pi')\frac{u}{\cos I} - \sin\mathfrak{J}\cdot a'r\sin(f+\Pi)\frac{u'}{\cos I'}. \tag{158}$$

Подставляя (158) и первое и третье выражения (146) в (157), находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta'\Omega=\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{J}\cdot ar'^2\sin^2(f'+\Pi')\frac{u}{\cos I}-$$
$$-\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{J}\cdot a'rr\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\frac{u'}{\cos I'}-$$
$$-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos\mathcal{J}\cdot r'\sin(f'+\Pi')\left(\frac{q_1}{\cos I}-\frac{q_1'}{\cos I'}\right)-$$
$$-\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin\mathcal{J}\cdot r'\cos(f'+\Pi')\left(\operatorname{cosec}\mathcal{J}\frac{p_1}{\cos I}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{ctg}\mathcal{J}\frac{p_1'}{\cos I'}\right). \qquad (159)$$

Дифференцированием выражения для Ω получаем

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{J}\cdot r'^2\sin^2(f'+\Pi')-\frac{m'}{1+m}\frac{1}{\Delta^3},$$
$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial z'}=-\frac{m'}{1+m}\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{J}\cdot rr'\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')+$$
$$+\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos\mathcal{J},$$

в силу чего, если мы подставим значения p_1, q_1, p_1', q_1', определяемые (150), выражение (159) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta'\Omega=\left(a\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}-\frac{a}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{e\sin f}{r(1-e^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)\frac{u}{\cos I}-$$
$$-\frac{1}{r\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\frac{du}{dE}\frac{1}{\cos I}+a'\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial z'}\frac{u'}{\cos I'}. \qquad (160)$$

Остается рассмотреть еще $\cos I$. Однако если мы выберем плоскость мгновенной орбиты возмущаемой планеты в начальную эпоху за основную плоскость отсчета, то начальное значение I обратится в нуль, а I будет очень малой величиной в течение значительного промежутка времени до и после этой эпохи. Поэтому мы оставляем $\cos I$ в алгебраической форме до самого конца, после чего его можно либо положить равным единице, либо разложить в ряд, согласно теореме Тэйлора, смотря по необходимости.

В разложениях для первого приближения мы видели, что может оказаться выгодным исключить производную $\partial\Omega/\partial f$, заменяя ее на $\partial\Omega/\partial l$ или $\partial\Omega/\partial E$ в соответствии с используемой независимой переменной, причем любая из последних двух производных может быть получена непосредственным дифференцированием ряда, представляющего функцию Ω. Этот способ будет применен также во втором приближении. В этом случае, очевидно, понадобятся следующие производные:

$$r^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2},\quad r'\frac{\partial\Omega}{\partial r'},\quad rr'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial r'},\quad r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z},\quad r'\frac{\partial^2\Omega}{\partial r'\,\partial z},$$
$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial z'},\quad r\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\,\partial z'},\quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial z'}$$

в дополнение к производным, использованным в первом приближении.

Однако Ω и ее производные являются однородными функциями от r и r' и в применяемые формулы, производные от Ω по r и r', входят не сами, а только в комбинации с r или r' в качестве множителей. Следовательно, при помощи известных соотношений между частными производными однородных функций производные по r' легко могут быть получены из производных по r. Из девяти производных, приведенных выше, только шесть должны быть вычислены непосредственно. Это производные

$$r^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}, \quad r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \quad r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\,\partial z'}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial z'}.$$

Дифференцируя второе и третье уравнения из (138), мы получаем

$$\begin{aligned}
r^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}+r\frac{\partial \Omega}{\partial r}&=\frac{m'}{1+m}\left[\frac{3}{\Delta^5}(r^2-rr'H)^2+\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)rr'H-2\frac{r^2}{\Delta^3}\right],\\
r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\,\partial z}&=\frac{m'}{1+m}\,\frac{3}{\Delta^5}(r^2-rr'H)\sin\mathcal{Y}\cdot r'\sin(f'+\Pi'),\\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}&=\frac{m'}{1+m}\left[\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{Y}\cdot r'^2\sin^2(f'+\Pi')-\frac{1}{\Delta^3}\right],\\
\frac{\partial \Omega}{\partial z'}&=\frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin\mathcal{Y}\cdot r\sin(f+\Pi),\\
r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\,\partial z'}&=-\frac{m'}{1+m}\,\frac{3}{\Delta^5}(r^2-rr'H)\sin\mathcal{Y}\cdot r\sin(f+\Pi)+\frac{\partial \Omega}{\partial z'},\\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial z'}&=-\frac{m'}{1+m}\left[\frac{3}{\Delta^5}\sin^2\mathcal{Y}\cdot rr'\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos\mathcal{Y}\right].
\end{aligned} \tag{161}$$

При использовании метода Ганзена, как и в случае других методов вычисления абсолютных возмущений, требуется произвести некоторые простые преобразования применяемых рядов при помощи введения постоянных множителей таким образом, чтобы все коэффициенты стали безразмерными величинами, а также чтобы главные члены в различных рядах были приведены к одному и тому же порядку величины. Поэтому, например, выгодно произвести следующие замены:

$$a'/\Delta \text{ вместо } 1/\Delta, \quad (a'/\Delta)^3 \text{ вместо } 1/\Delta^3,$$
$$r/a \text{ вместо } r, \qquad r'/a' \text{ вместо } r'.$$

С этими изменениями и при $\alpha=a/a'$, если считать $a'>a$, следующие выражения дают все те производные возмущающей функции, которые должны быть вычислены для получения возмущений первого и второго порядков. Также для краткости мы положим m' вместо $m'/1+m$. Кроме того, если требуется вести вычисления, выбрав в качестве единицы секунду дуги вместо радиана, то m' необходимо умножить на 206264″,8.

$$\begin{aligned}
a\Omega&=m'\alpha\left[\frac{a'}{\Delta}-\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{r}{a}H\right],\\
ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}&=m'\alpha\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\left(\alpha^2\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{a'}{\Delta}-\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{r}{a}H\right],\\
a^2\frac{\partial \Omega}{\partial z}&=m'\alpha^2\sin\mathcal{Y}\left[\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3\frac{r'}{a'}\sin(f'+\Pi')-\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin(f'+\Pi')\right],\\
ar^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}&=m'\alpha\left[\frac{3}{4}\left(\alpha^2\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5-\frac{r'^2}{a'^2}\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{4}\frac{a'}{\Delta}-\alpha\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{r}{a}H\right],
\end{aligned}$$

$$a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z} = -\frac{3}{2} m' \alpha^2 \sin \mathcal{Y} \left[\left(\alpha^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \right] \frac{r'}{a'} \sin(f' + \Pi'),$$

$$a^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = -m' a^3 \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 - 3 \sin^2 \mathcal{Y} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \frac{r'^2}{a'^2} \sin^2(f' + \Pi') \right], \tag{162}$$

$$aa' \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = m' \alpha^2 \sin \mathcal{Y} \left[-\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right] \frac{r}{a} \sin(f + \Pi),$$

$$aa' r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z'} = m' \alpha^2 \sin \mathcal{Y} \left[\frac{3}{2} \left(\alpha^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right] \times$$
$$\times \frac{r}{a} \sin(f + \Pi),$$

$$a^2 a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z\, \partial z'} = m' \alpha^2 \cos \mathcal{Y} \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 - \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 - \right.$$
$$\left. - 3 \sin \mathcal{Y} \operatorname{tg} \mathcal{Y} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \frac{r'}{a'} \frac{r}{a} \sin(f' + \Pi') \sin(f + \Pi) \right].$$

Можно отметить, что если $\mathcal{Y}$ не очень велико, то едва ли когда-нибудь понадобится вычислять шестое и девятое из этих выражений; даже рассматривая действие Юпитера на Сатурн, можно пренебречь членами, умноженными на $\sin \mathcal{Y}$.

12. Возмущения второго порядка. Как и в случае возмущений первого порядка, прежде чем приступать к явному разложению δT и δU, необходимо надлежащим образом выбрать независимую переменную. Эксцентрическая аномалия неудобна для применения при вычислениях возмущений второго порядка из-за многочисленных преобразований, которые необходимо проделать, прежде чем станет возможным интегрирование. Поэтому мы останавливаемся на средней аномалии, отсылая читателя к работам Ганзена для случая, когда используется эксцентрическая аномалия.

Мы видели в предыдущем разделе, что δT и δU можно привести к следующему виду:

$$\delta T = A' n \delta z + B' \nu + C' \delta \frac{h}{h_0} + D' \frac{u}{\cos I} + E' \frac{d}{dt} \frac{u}{\cos I} +$$
$$+ F' n' \delta z' + G' \nu' + H' \frac{u'}{\cos I'},$$
$$\delta U = A'' n \delta z + B'' \nu + C'' \delta \frac{h}{h_0} + D'' \frac{u}{\cos I} + E'' \frac{d}{dt} \frac{u}{\cos I} + \tag{163}$$
$$+ F'' n' \delta z' + G'' \nu' + H'' \frac{u'}{\cos I'}.$$

Член в δU, умноженный на δI, отброшен, так как он почти никогда не имеет какого-либо практического значения. Первые множители выписанных членов снабжены штрихами, для того чтобы избежать путаницы с величинами, которые были обозначены в первом приближении через A, B и C и будут использованы в дальнейшем. Наконец, вместо d/dE мы написали d/dt в двух членах, содержащих E' и E'', так как производную по времени получить легче, чем другие производные.

Следует заметить, что вторые множители первых пяти членов в δT и δU охватывают все возмущения первого порядка планеты, возмущаемой всеми остальными планетами, и что вторые множители последних трех членов охватывают все возмущения первого порядка возмущающей планеты. Если имеется более одной возмущающей планеты, то каждая из них дает еще три члена, в точности сходных с уже выписанными членами. Мы ограничиваемся здесь единственной возмущающей планетой, поскольку легко видно, как поступить в том случае, когда их больше.

Теперь остается найти выражения для первых множителей в выражениях (163). Обращая внимание сначала на δT, видим, что они имеют вид

$$A' = \frac{\partial T}{\partial l}, \quad F' = \frac{\partial T}{\partial l'}$$

и могут быть найдены непосредственным дифференцированием ряда для T.

Что касается B', то мы имеем

$$B' = r\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Но T было получено в следующем виде:

$$T = Aa\frac{\partial \Omega}{\partial l} + Bar\frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Допустим, что $B' = V + X$, где V обозначает часть B', получающуюся из функции T, в которой мы r считаем переменной величиной, а через X обозначена часть B', получающаяся из функции T, в которой мы считаем переменными A и B. В таком случае мы имеем

$$V = A\frac{\partial}{\partial l}ar\frac{\partial \Omega}{\partial r} + Bar\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

причем множитель при A может быть получен непосредственным дифференцированием, а множитель при B был дан в предыдущем разделе. Чтобы найти X, берем выражение (79), откуда

$$X = -\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left[2\frac{\varrho}{r}\cos(f-\omega)\frac{\partial \Omega}{\partial f} + 2\frac{\varrho}{r}\sin(f-\omega)r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right].$$

Но мы имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial l} - \frac{er\sin f}{a(1-e^2)}r\frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

и поэтому

$$X = -\frac{2r\varrho}{a^2(1-e^2)}\cos(f-\omega)a\frac{\partial \Omega}{\partial l} -$$
$$-\frac{2\varrho}{a(1-e^2)^{3/2}}[\sin(f-\omega) - e\sin\omega]ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Дифференцируя выражение (79) по h/h_0, получаем

$$C' = -\frac{4\varrho}{(1-e^2)^{3/2}}[\cos(f-\omega) - 1]\frac{\partial \Omega}{\partial f};$$

замечая, что

$$\overline{T} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial f},$$

отсюда находим

$$C' = 2[T + X + \overline{T}].$$

Множитель $\delta(h/h_0)$ можно определить из следующего уравнения:

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\left(\frac{d}{dt}\delta z + 2\nu\right).$$

Множители D', E', H' могут быть получены аналогичным образом, как и V. Мы имеем

$$D' = Aa^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial l\, \partial z} + B\left(a^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z} + a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right),$$

$$E' = Aa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

$$H' = Aaa' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial l\, \partial z'} + Baa' r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z'},$$

и

$$G' = -V - T.$$

Коэффициент X можно разложить аналогично множителям A и B. Если мы положим

$$X = M'a \frac{\partial \Omega}{\partial l} + N'ar \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

то найдем

$$M' = -\frac{P_0}{1-e^2}\left(\frac{1}{2}P_0 + P_1 \cos l + P_2 \cos 2l + P_3 \cos 3l + \ldots\right) - \\ - \sum_0^\infty \left(\frac{P_i P_j}{1-e^2} \pm Q_i Q_j\right) \cos(\lambda \mp jl),$$

$$N' = -\frac{P_0}{1-e^2}(P_1 \sin l + 2P_2 \sin 2l + 3P_3 \sin 3l + \ldots) + \\ + \sum_0^\infty j\left(Q_i Q_j \pm \frac{P_i P_j}{1-e^2}\right) \sin(\lambda \mp jl).$$

Очевидно,

$$N' = -\frac{\partial M'}{\partial l}.$$

Обращая теперь внимание на δU, находим

$$A'' = \frac{\partial U}{\partial l}, \quad B'' = Y + U,$$

где

$$Y = \frac{h}{n} r^2 \frac{Q}{a} \sin(\omega - f) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z} \cos I = \\ = Ca^2 r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r\, \partial z} \cos I,$$

причем C — множитель, использованный в первом приближении для U, Мы имеем также

$$C'' = U$$

и, пренебрегая величинами третьего порядка относительно I и второго порядка относительно возмущающих сил, получаем

$$D'' = Ca^2\left[a\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{e\sin f}{r(1-e^2)}\frac{\partial \Omega}{\partial f} - \frac{a}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right]\cos I =$$
$$= C\left[a^3\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{er\sin f}{(1-e^2)^{3/2}}\frac{\partial \Omega}{\partial l} - \frac{1+2e\cos f+e^2}{(1-e^2)^2}ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right]\cos I,$$
$$E'' = -C\frac{a^2}{r\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial f} = C\frac{a}{r}\overline{T}.$$

Кроме того, мы имеем

$$F'' = \frac{\partial U}{\partial l'},$$
$$G'' = -(Y+2U),$$
$$H'' = Ca^2a'\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z\,\partial z'}\cos I.$$

Таким образом, второе выражение (163) можно написать в следующем более простом виде:

$$\delta U = A''n\delta z + F''n'\delta z' + Y(\nu-\nu') + U\left(\nu - 2\nu' + \delta\frac{h}{h_0}\right) +$$
$$+ D''\frac{u}{\cos I} + E''\frac{d}{dt}\frac{u}{\cos I} + H''\frac{u'}{\cos I'}.$$

Выразив δT и δU в виде тригонометрических рядов, мы получаем δW_0 посредством формулы

$$\delta W_0 = \int \delta T n\,dt,$$

а также вычисляем

$$-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\delta W_0\right)}.$$

Определение постоянных интегрирования выполняется по тем же правилам, что и при первом приближении. Однако дополнительные члены к δW_0 несколько более сложны, чем дополнительные члены к W_0, и может понадобиться сохранить эти постоянные в буквенном виде до тех пор, пока не будет выполнено второе интегрирование, после чего эти постоянные можно определить легче.

Мы обозначаем члены второго порядка, которые необходимо прибавить к $n\delta z$ и ν, через $n\delta^2 z$ и $\delta\nu$; они определяются следующими уравнениями:

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}n\delta^2 z = \overline{\delta W}_0 + \overline{\left(\frac{\partial W_0}{\partial\lambda}\right)}n\delta z + \nu^2,$$
$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\delta\nu = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\delta W_0\right)} - \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial\lambda^2}\right)}n\delta z.$$

Для возмущений широты второго порядка уравнения имеют вид

$$\delta R_0 = \int \delta U n\,dt,$$
$$\delta\left(\frac{u}{\cos I}\right) = \overline{\delta R}_0 + \overline{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}R_0\right)}n\delta z.$$

Следует помнить, что для всех переменных, входящих в первые множители выражений для δT и δU, нужно воспользоваться эллиптическими (невозмущенными) значениями.

Как только получено выражение для $(a'/\Delta)^5$, возмущения второго порядка можно вычислить с затратой труда, сравнимой с той, которая необходима для получения возмущений первого порядка. Тем не менее легко сообразить, что если приближения должны быть проведены до третьего порядка, то потребуется намного большее количество труда из-за большого числа необходимых производных возмущающей функции. Может показаться, что вычисления можно было бы сократить, совершенно избегая разложений в ряды Тэйлора и используя вместо них при вычислении возмущающей функции возмущенные значения координат. Однако переменные Ганзена не годятся для такого метода, так как получаются очень сложные алгебраические выражения. Для возмущений порядка выше второго, по-видимому, более всего подходит метод вычисления возмущений в прямоугольных координатах.

Замечания. Литература

Применение методов, изложенных в гл. XI—XIV, ограничено орбитами с умеренным эксцентриситетом; для эксцентриситетов, превышающих, например, 0,3, очень медленная сходимость рядов заставляет отказаться от их применения. Вероятно, этот практический предел можно значительно расширить, применяя быстродействующие вычислительные машины. Однако было бы очень желательно иметь методику, которая была бы применима к любому эллипсу. Такой метод был придуман Ганзеном, который описывает его в Suppl. aux Compt. Rend. acad. sci. (1), применяя к комете Энке, имеющей эксцентриситет, равный 0,84. Ганзен называет этот метод методом частных аномалий. Принцип его заключается в разбиении исходного эллипса на небольшое число частичных дуг и выборе внутри каждой такой дуги некоторой независимой переменной, тесно связанной с обычными переменными таким образом, чтобы ряд, представляющий возмущения, быстро сходился внутри данной частичной дуги, становясь, однако, непригодным вне ее. Ганзен получает столько же отдельных рядов для возмущений, сколько имеется частичных дуг. Затем, чтобы найти координаты для любого момента времени, значение времени подставляется в соответствующий ряд. Этот метод неприменим в своем первоначальном виде к тем случаям, когда вследствие тесного сближения с большой планетой характер орбиты совершенно меняется, однако даже здесь этот метод можно применить дважды: один раз до этого изменения и второй — после него. Большой интерес представило бы применение этого метода к такому случаю, как, например, действие Юпитера на движение малой планеты (3) Юнона, и сравнение полученных при этом результатов с результатами, достигнутыми при помощи метода, изложенного в этой главе. Может оказаться, что улучшенная сходимость компенсирует большее число рядов.