Глава XV

ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

1. Введение. Пусть m и m' — две материальные точки, которые предполагаются движущимися по эллиптическим орбитам относительно общего центрального тела; для определенности допустим, что точка m' более удалена от центрального тела, чем m. Тогда возмущающая функция для действия точки m' на m может быть написана в следующем виде:

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right)$$

или для действия m на m'

$$R' = k^2 m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right),$$

где x, y, z, x', y', z' — прямоугольные координаты, отнесенные к какой-нибудь неподвижной системе осей с фиксированными направлениями в пространстве и началом в центральном теле, r и r' — расстояния от центрального тела и

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

т. е. Δ означает расстояние между m и m'.

Как правило, в случае вычисления абсолютных возмущений не обязательно вводить численное значение постоянной k^2, которая появляется благодаря присутствию $\mu = k^2(1 + m)$ или $k^2(1 + m')$ в числителе выражений для возмущений. Поэтому мы приходим к функции Ω, определяемой посредством следующей формулы:

$$R = \mu\Omega,$$

которая дает

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right)$$

и

$$\Omega' = \frac{m}{1+m'} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right).$$

В полярных координатах мы имеем

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H\right),$$

$$\Omega' = \frac{m}{1+m'}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'}{r^2}\cos H\right),$$

где

$$\Delta^2 = r'^2 - 2rr' \cos H + r^2,$$
$$\cos H = \cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') + \cos \mathcal{Y} \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi') =$$
$$= \cos(f - f' + \Pi - \Pi') - 2\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{Y} \sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'), \quad (1)$$

f и f' — истинные аномалии, Π и Π' — угловые расстояния от восходящего узла орбиты тела m' на орбите тела m до перигелиев, $\mathcal{Y}$ — взаимная наклонность и H — угол между r и r'. Заметим, что выражение для Δ^2 представляет собой просто теорему косинусов для плоского треугольника с вершинами в центральном теле и обеих рассматриваемых материальных точках.

Если отношение r'/r намного больше единицы для любых допустимых значений r и r', то Δ намного превосходит r, и $1/\Delta$, будучи очень малой величиной, может быть разложено в быстро сходящийся ряд; эти условия выполняются для спутника, возмущаемого Солнцем. В противном случае, например, когда одна планета возмущает движение другой, разложение в ряд для $1/\Delta$ может сходиться крайне медленно; этому случаю и посвящена настоящая глава. Мы будем предполагать, что разложение в ряд величины $1/\Delta$ законно всегда в тех случаях, когда оно вообще выполнимо, исключая, таким образом, любой случай, в котором Δ может обратиться в нуль в результате пересечения орбит. В то время как можно установить необходимые и достаточные условия для сходимости ряда, представляющего $1/\Delta$, такого же рода условия для сходимости рядов, представляющих сами возмущения, неизвестны; для практических целей законность этих разложений можно считать установленной опытным путем.

Член $1/\Delta$ известен под названием главной части возмущающей функции. Другой член называется непрямым членом; он выражает действие возмущающей планеты на Солнце. Он возникает из-за того, что мы продолжаем использовать гелиоцентрические координаты, и обратился бы в нуль, если бы мы согласились выбрать начало координат в центре масс Солнца и возмущающего тела. Рассмотрим сначала член $1/\Delta$, который представляет наибольшие затруднения при разложении, причем, как это уже было отмечено в предыдущих главах, предпочитаем иметь дело с a'/Δ, где a' — большая полуось внешней орбиты, для того чтобы величины, входящие в разложение, были безразмерными и имели удобный порядок. Мы умножаем уравнения для Ω или R на a'. Тогда, если α означает отношение a/a', мы имеем

$$\frac{\Delta^2}{a'^2} = \left(\alpha\frac{x}{a} - \frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\alpha\frac{y}{a} - \frac{y'}{a'}\right)^2 + \left(\alpha\frac{z}{a} - \frac{z'}{a'}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - 2\alpha\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\cos H + \alpha^2\frac{r^2}{a^2}. \quad (2)$$

Задача состоит в разложении a'/Δ в ряд, члены которого могут быть рассмотрены друг за другом при последовательных операциях вычисления возмущений. Применяемые ряды являются почти исключительно тригонометрическими рядами, в которых коэффициент каждого члена умножается на синус или косинус линейной комбинации аномалий обеих планет с линейными комбинациями остальных углов, также входящими в аргументы, или же без них. Литература на эту тему весьма обширна. Наиболее часто применяемыми независимыми переменными являются средняя, эксцентрическая или истинная аномалии обеих планет. Мы будем рассматривать здесь главным образом средние аномалии, так как они лучше всего подходят для получения окончательных результатов в численной форме.

Возможны два общих метода решения этой задачи: численный метод и буквенный метод. При численном методе мы приступаем по возможности непосредственно к получению ряда следующего вида:

$$\frac{a'}{\Delta}=\sum[C_{j,k}\cos(jl'+kl)+S_{j,k}\sin(jl'+kl)],$$

где C и S — числа, l' и l — средние аномалии обеих планет, а j и k могут принимать все положительные и отрицательные целочисленные значения, включая и нуль, хотя одно из них всегда можно ограничить неотрицательными значениями. При численном методе необходимо также, чтобы получить определенные производные от a'/Δ, разложить в ряды некоторые из нечетных степеней этого отношения; для возмущений первого порядка потребуется по крайней мере третья степень, а для возмущений второго порядка — по крайней мере пятая.

При буквенном методе, с его предельной общностью, аргументами становятся линейные комбинации из всех угловых элементов орбиты, а коэффициентами — функции остальных элементов. Поэтому, если мы выберем в качестве элементов уже знакомые a, e, i, l, π, θ, то мы можем написать

$$\frac{a'}{\Delta}=\sum F_{j,k,m,j',k',m'}(\alpha,\ e,\ i,\ e',\ i')\cos(jl+k\pi+m\theta+j'l'+k'\pi'+m'\theta').$$

Однако эта форма разложения применяется редко или никогда не применяется вследствие очень большой сложности функций от α, входящих в нее. Принято начинать сперва с численного значения α, которое обычно представляет собой наиболее точно известный элемент. Кроме того, плоскость орбиты возмущаемой планеты обычно выбирают в качестве плоскости отсчета, а восходящий узел орбиты внешней планеты на орбите внутренней — за начало счета долгот. Тогда, если J — взаимная наклонность, а Π и Π' — долготы перигелиев от этого нового начала, то мы можем написать:

$$\frac{a'}{\Delta}=\sum G_{j,k,j',k'}(\alpha,\ e,\ e',\ J)\cos(jl+k\Pi+j'l'+k'\Pi').$$

Эта форма очень удобна для получения производных от a'/Δ по всем элементам, за исключением α, для которого необходимо принять специальное условие. Этот ряд обладает важным свойством, впервые упоминаемым Даламбером и состоящим в том, что самая низкая степень e, e' или $\sin^2\frac{1}{2}J$, входящая в любой коэффициент, равна $j+j'$. Это свойство делает сходимость по степеням e, e' и $\sin^2\frac{1}{2}J$ весьма быстрой, если эти три величины достаточно малы. Однако сходимость этого ряда может быть очень медленной, если α начинает стремиться к единице. В этом случае для того же малого значения $j+j'$ может понадобиться большое число членов. Этот ряд удобен благодаря тому, что коэффициенты, связанные с большими значениями j или j', очень сильно уменьшаются по величине после интегрирования, так что никогда не возникает необходимости вычислять все значительные члены разложения a'/Δ.

В этой главе мы дадим несколько методов разложения отношения a'/Δ. Сначала мы проведем непосредственное численное решение, пригодное для быстродействующих автоматических вычислительных машин, затем менее прямое численное решение, соответствующее использованию менее мощных средств вычисления, затем изложим метод для получения любого члена разложения a'/Δ с точностью до самого низкого порядка по e, e' и $\sin^2\frac{1}{2}J$, входящих в коэффициент, и, наконец, дадим буквенное разложение до третьего порядка относительно e, e' и $\sin^2\frac{1}{2}J$, постоянный член которого будет дан с точностью до четвертого порядка.

Прежде чем приступить к какому-либо численному разложению отношения a'/Δ и его нечетных степеней, необходимо решить, с каким числом десятичных знаков следует вести вычисления. Обычно предел будет установлен искомым членом самого долгого периода среди возмущений. Член разложения a'/Δ, имеющий некоторый аргумент $jl'+kl$, может быть умножен на j или k в зависимости от того, является ли возмущаемая планета внешней или внутренней, а также на

$$\frac{3m'}{\operatorname{arc} 1''}\cdot\frac{n^2}{(jn'+kn)^2},$$

где n и n' — средние движения. Рассмотрим, например, большое неравенство в движении Сатурна, вызываемое Юпитером и имеющее аргумент $5l'-2l$. Член a'/Δ с этим аргументом будет умножен на $206265\times\times 5\times 3\times 0{,}001\times 30^2$ или почти на $3\,000\,000$. Следовательно, при подготовительных вычислениях потребуются семь десятичных знаков, чтобы определить это возмущение с точностью до секунды дуги, или десять десятичных знаков, если необходима точность в $0'',001$. Для $(a'/\Delta)^3$ необходима меньшая точность, так как соответствующий член этого разложения умножается только на

$$\frac{m'}{\operatorname{arc} 1''}\cdot\frac{n}{jn'+kn}.$$

2. Численный метод. Одним из наиболее очевидных путей разложения отношения a'/Δ и его нечетных степеней является применение двойного гармонического анализа частных значений. Такой процесс вполне выполним, если только мы согласны иметь дело с большим количеством частных значений функций. Так, например, в случае вычисления возмущений Марса от Земли, когда $\alpha=0{,}66$, и если необходимо вести вычисления с восемью десятичными знаками, потребуется 100×80, или 8000 частных значений. Это же количество частных значений определит в данном случае функцию $(a'/\Delta)^3$ с точностью до шести десятичных знаков, которая является достаточной. О таком объеме вычислительной работы нечего и думать, если в распоряжении нет автоматической электронной вычислительной машины. Однако при использовании способа, придуманного Брауэром, возможно заменить бо́льшую часть гармонического анализа перемножением рядов, сводя таким путем работу к уровню возможностей малых счетных машин.

Возможность этой замены зависит от быстроты сходимости ряда для $(\Delta/a')^2$ по сравнению с a'/Δ или $(a'/\Delta)^3$. В случае Марса и Земли оказывается, что 16×10, или 160 частных значений дадут значение $(\Delta/a')^2$ с точностью до восьми десятичных знаков. Мы начинаем с вычисления 160 частных значений величин $(\Delta/a')^2$, a'/Δ, $(a'/\Delta)^3$. Тогда гармонический анализ даст разложения в ряды этих трех функций. Ряд для $(\Delta/a')^2$ является точным, а остальные два — лишь приближенными и теперь должны быть исправлены.

Для удобства записи обозначим точное значение отношения Δ/a' через D, а приближенное значение — через δ. В таком случае для начала мы имеем D^2, δ^{-1} и δ^{-3}. Процедура состоит сначала в умножении δ^{-1} самого на себя, что дает δ^{-2}. Образуем произведение $D^2\delta^{-2} = 1 + E$; отклонение E от единицы свидетельствует о погрешности в δ^{-1}. Умножим E само на себя, получая E^2, затем E на E^2, что дает E^3, и продолжаем до тех пор, пока получаются члены сколько-нибудь существенной величины. Тогда

$$D^{-1} = \delta^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}E + \frac{3}{8}E^2 - \frac{5}{16}E^3 + \frac{35}{128}E^4 \ldots\right).$$

Чтобы получить D^{-3}, умножим δ^{-3} на D^2 и определим F по формуле

$$F = D^2\delta^{-3} - D^{-1}.$$

Тогда

$$D^{-3} = \delta^{-3} - FD^{-2},$$

где D^{-2} получается по следующей формуле:

$$D^{-2} = \delta^{-2}(1 - E + E^2 - E^3 + E^4 - \ldots).$$

Если требуется D^{-5}, то его можно получить при помощи формул

$$G = D^2\delta^{-5} - D^{-3}, \quad D^{-5} = \delta^{-5} - GD^{-2},$$

если известно δ^{-5}, или, в противном случае, по формуле

$$D^{-5} = D^{-3}D^{-2}$$

и аналогично для более высоких отрицательных нечетных степеней D.

Только что описанный метод является, по-видимому, слишком трудоемким для приложений с настольной счетной машиной. В применении к Марсу и Земле при вычислении D^{-2} и D^{-3} было образовано почти полмиллиона отдельных произведений чисел.

Необходимо отметить, что в тех случаях, когда за независимые переменные выбраны эксцентрические аномалии u и u', разложение в ряд для $(\Delta/a')^2$ является замкнутым выражением и содержит только семь различных аргументов. Это выражение очень легко получить по векторным постоянным P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z для обеих планет, которые, вообще говоря, могут быть отнесены к любой удобной плоскости отсчета, пока мы не позаботимся о том, чтобы для обеих планет была избрана одна и та же плоскость. Примем следующую символическую запись:

$$\begin{aligned}
PP' &= P_xP'_x + P_yP'_y + P_zP'_z,\\
QQ' &= Q_xQ'_x + Q_yQ'_y + Q_zQ'_z,\\
PQ' &= P_xQ'_x + P_yQ'_y + P_zQ'_z,\\
P'Q &= P'_xQ_x + P'_yQ_y + P'_zQ_z.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\Delta/a')^2 = 1 + \frac{1}{2}e'^2 + \alpha^2\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) - 2PP'\alpha ee' + {}\\
+ 2(PP'\alpha e' - \alpha^2 e)\cos u + {}\\
+ 2P'Q\alpha e'(1 - e^2)^{1/2}\sin u + {}\\
+ 2(PP'\alpha e - e')\cos u' + {}\\
+ 2PQ'\alpha e(1 - e'^2)^{1/2}\sin u' -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\alpha\,[PP'+QQ'\,(1-e^2)^{1/2}\,(1-e'^2)^{1/2}]\cos(u-u')+\\
&+\alpha\,[PQ'\,(1-e'^2)^{1/2}-P'Q\,(1-e^2)^{1/2}]\sin(u-u')-\\
&-\alpha\,[PP'-QQ'\,(1-e^2)^{1/2}\,(1-e'^2)^{1/2}]\cos(u+u')-\\
&-\alpha\,[PQ'\,(1-e'^2)^{1/2}+P'Q\,(1-e^2)^{1/2}]\sin(u+u')+\\
&+\frac{1}{2}\,\alpha^2e^2\cos 2u+\frac{1}{2}\,e'^2\cos 2u'.
\end{aligned}$$

В том случае, когда за независимые переменные выбраны эксцентрические аномалии, ряды для a'/Δ и его нечетных степеней сходятся быстрее, чем при употреблении средних аномалий. Можно посоветовать вести вычисления с эксцентрическими аномалиями до тех пор, пока не будут получены эти ряды, и перейти затем к средним аномалиям как независимым переменным, применяя для этого функции Бесселя.

3. Численный метод с использованием коэффициентов Лапласа. Главный недостаток только что описанного метода для вычисления a'/Δ и его нечетных степеней заключается в том, что все коэффициенты разложения должны быть вычислены с одним и тем же числом десятичных знаков, хотя лишь небольшая часть членов с этими коэффициентами может внести что-либо существенное в возмущения. В случае движения Марса, возмущаемого Землей, ряды, полученные для a'/Δ и $(a'/\Delta)^3$, содержат соответственно 740 и 891 различных аргументов, однако для вычисления возмущений используется лишь 157 различных аргументов. Количество работы намного сократилось бы, если бы можно было избежать вычисления большинства лишних коэффициентов. Этого можно добиться за счет некоторого усложнения аналитической методики.

Если эксцентриситеты невелики, то r мало отличается от a, и внимательное рассмотрение уравнения (2) показывает, что a'/Δ и его нечетные степени не очень отличаются от выражения

$$(1-2\alpha\cos H+\alpha^2)^{-1/2} \tag{3}$$

и его нечетных степеней. Если функцию (3) и ее нечетные степени разложить в ряды Фурье, то результат может быть выражен следующим образом:

$$(1-2\alpha\cos H+\alpha^2)^{-s/2}=\frac{1}{2}\,b^{0}_{s/2}+\sum_{1}^{\infty} b^{(j)}_{s/2}\cos jH, \tag{4}$$

где s — некоторое положительное нечетное целое число. Коэффициенты $b^{(j)}_{s/2}$, изученные впервые Лапласом, известны под названием коэффициентов Лапласа и были подробно исследованы и табулированы. Оказывается возможным получить любой из этих коэффициентов независимо от остальных, что делает весьма полезным метод, который будет сейчас изложен. Принцип метода заключается в следующем. Для частных значений средней аномалии одной планеты вычисляем сначала частные значения коэффициентов Лапласа для требуемых значений j и s, соответствующих угловой переменной $u-Q$ для другой планеты, где u — эксцентрическая аномалия, а Q — некоторый вспомогательный угол. Затем коэффициенты Лапласа умножаются на два множителя, мало отличающихся от единицы, так чтобы представить действительное значение $(a'/\Delta)^s$ вместо выражения (4). Теперь можно произвести гармонический анализ для получения $(a'/\Delta)^s$ в виде двойного ряда Фурье, содержащего среднюю аномалию одной планеты и эксцентрическую аномалию другой. Наконец, преобразование Бесселя дает эти ряды как функции от двух средних аномалий.

Если постоянные k, K, k_1, K_1 (где k не следует смешивать с гауссовой постоянной) определяются посредством следующих уравнений:

$$k\cos(\Pi'-K)=\cos\Pi, \qquad k_1\cos(\Pi'-K_1)=\cos\mathcal{J}\cos\Pi,$$
$$k\sin(\Pi'-K)=\cos\mathcal{J}\sin\Pi, \qquad k_1\sin(\Pi'-K_1)=\sin\Pi,$$

то выражение (1) принимает более простой вид:

$$\cos H=k\cos(f'+K)\cos f+k_1\sin(f'+K_1)\sin f \tag{5}$$

и

$$\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\cos H=k\frac{r'}{a'}\cos(f'+K)[\cos u-e]+k_1\cos\varphi\frac{r'}{a'}\sin(f'+K_1)\sin u, \tag{6}$$

где $\cos\varphi=(1-e^2)^{1/2}$.

Присоединением к (6) следующих уравнений:

$$\frac{r'}{a'}=1-e'\cos u', \qquad \frac{r}{a}=1-e\cos u$$

находим, что

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2=\gamma_0-\gamma_1\cos u-\beta_0\sin u+\gamma_2\cos^2 u, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0&=\left(\frac{r'}{a'}\right)^2+\alpha^2+2k\alpha e\left(\frac{r'}{a'}\right)\cos(f'+K),\\
\gamma_1&=2\alpha^2e+2k\alpha\left(\frac{r'}{a'}\right)\cos(f'+K),\\
\beta_0&=2k_1\alpha\cos\varphi\cdot\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+K_1),\\
\gamma_2&=\alpha^2e^2.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Другая форма уравнений (8), которая может оказаться более удобной при вычислениях, когда в распоряжении имеются векторные постоянные обеих орбит, отнесенные к любой подходящей плоскости, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\gamma_0&=1+\alpha^2-2PP'\alpha ee'+2(PP'\alpha e-e')\cos u'+\\
&\qquad+2PQ'\alpha e\cos\varphi'\sin u'+e'^2\cos^2 u',\\
\gamma_1&=2\alpha^2e+2PP'\alpha[\cos u'-e']+2PQ'\alpha\cos\varphi'\sin u',\\
\beta_0&=2P'Q\alpha\cos\varphi[\cos u'-e']+2QQ'\alpha\cos\varphi\cos\varphi'\sin u',\\
\gamma_2&=\alpha^2e^2,
\end{aligned}$$

где использована та же символическая запись, что и на стр. 404—405.

Из уравнений (8) видно, что γ_0, γ_1 и β_0 — функции от аномалии внешней планеты, тогда как величина γ_2 является постоянной и имеет порядок квадрата эксцентриситета внутренней планеты. Чтобы получить γ_1 и β_0 в удобной для вычислений форме, мы полагаем $\cos u'-e'$ вместо $r'/a'\cos f'$ и $\cos\varphi'\sin u'$ вместо $r'/a'\sin f'$. Положим также

$$\gamma_1=f\cos F, \qquad \beta_0=f\sin F,$$

где эту новую величину f не следует смешивать с истинной аномалией, а F — с функцией, обозначенной выше этим же символом. Тогда получим выражения вида

$$f\cos F = e'p\sin P + 2k\alpha\cos K\cos u' - 2k\alpha\cos\varphi'\sin K\sin u',$$
$$f\sin F = -e'p\cos P + 2k_1\alpha\cos\varphi\sin K_1\cos u' + 2k_1\alpha\cos\varphi\cos\varphi'\cos K_1\sin u',$$

в которых мы положили

$$p\sin P = 2\alpha^2\left(\frac{e}{e'}\right) - 2k\alpha\cos K,$$
$$p\cos P = 2k_1\alpha\cos\varphi\sin K_1.$$

В этих выражениях не следует смешивать P с векторной постоянной, обозначаемой этим же символом.

Если, кроме того, мы введем вспомогательные постоянные, определяемые посредством следующих уравнений:

$$v\sin V = 2k\alpha\cos\varphi'\sin K,$$
$$v\cos V = 2k_1\alpha\cos\varphi\cos\varphi'\cos K_1,$$
$$w\sin W = p - 2\alpha^2\frac{e}{e'}\sin P,$$
$$w\cos W = v\cos(V-P),$$
$$w_1\sin W_1 = v\sin(V-P),$$
$$w_1\cos W_1 = 2\alpha^2\frac{e}{e'}\cos P,$$

то уравнения, определяющие γ_1 и β_0, принимают следующий вид:

$$f\sin(F-P) = w\sin(u'+W) - e'p,$$
$$f\cos(F-P) = w_1\cos(u'+W_1),$$

из которых, если известно P, легко получаются $f\sin F$ и $f\cos F$. Далее, удобной формой для вычисления γ_0 является следующая:

$$\gamma_0 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2e^2 - 2e'\cos u' + e'^2\cos^2 u' + ef\cos F.$$

Если мы положим $D = \gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_2$ (это D следует отличать от символа, означающего Δ/a' и использованного ранее), то уравнение (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = D - f\cos(u-F) + \frac{1}{2}\gamma_2\cos 2u.$$

Теперь, если величина γ_2 настолько мала, что можно пренебречь всеми членами, умноженными на ее квадрат, то мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{a'}{\Delta} &= [D - f\cos(u-F)]^{-1/2} - \frac{1}{4}\gamma_2\cos 2u\,[D - f\cos(u-F)]^{-3/2},\\ \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^3 &= [D - f\cos(u-F)]^{-3/2} - \frac{3}{4}\gamma_2\cos 2u\,[D - f\cos(u-F)]^{-5/2},\\ \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^5 &= [D - f\cos(u-F)]^{-5/2} - \frac{5}{4}\gamma_2\cos 2u\,[D - f\cos(u-F)]^{-7/2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Однако эти уравнения страдают тем недостатком, что требуют более высоких степеней выражений в квадратных скобках, чем степени отношения a'/Δ. Этот недостаток можно устранить путем разделения $(a'/\Delta)^s$ на два сомножителя, один из которых может быть разложен посредством коэффициентов Лапласа, а второй множитель, который имеет порядок $1+\gamma_2$ и состоит из очень малого числа членов, легко может быть разложен при помощи гармонического анализа или каким-либо иным способом.

Если записать уравнение (7) в виде

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = \gamma_0 - f\cos(u-F) + \gamma_2\cos^2 u, \tag{10}$$

то очевидно, что оно может быть разделено на два сомножителя первой степени относительно $\cos u$ и $\sin u$. Ганзен показал, что если мы определим две величины C и q следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} C &= \gamma_0 + \gamma_2\sin^2 Q, \\ f\sin F &= \left(q - \frac{\gamma_2 C}{q}\right)\sin Q, \\ f\cos F &= \left(q + \frac{\gamma_2 C}{q}\right)\cos Q, \end{aligned} \tag{11}$$

то получим уравнение

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = [C - q\cos(u-Q)]\left[1 - \frac{\gamma_2}{q}\cos(u+Q)\right], \tag{12}$$

которое представляет собой требуемую форму.

Наиболее легким способом решения уравнений (11) является способ последовательных приближений. Записывая эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} C &= \gamma_0 + \frac{\gamma_2}{q^2}(q\sin Q)^2, \\ q\sin Q &= \frac{f\sin F}{1 - \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \\ q\cos Q &= \frac{f\cos F}{1 + \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \end{aligned}$$

мы начинаем со значений $f\sin F$ и $f\cos F$ в качестве первого приближения к $q\sin Q$ и $q\cos Q$. Возводя второе и третье уравнения в квадрат и складывая их, получаем приближение к q^2, а из первого уравнения — приближение к C. Используя полученные значения снова в правых частях этих трех уравнений, мы получаем улучшенные значения q^2 и C, и в большинстве случаев окончательные результаты можно получить при помощи двух или трех приближений.

Может оказаться полезным видоизменить уравнение (12). Полагая

$$\boldsymbol{a} = \frac{C - \sqrt{C^2 - q^2}}{q}, \quad N = \frac{2}{C + \sqrt{C^2 - q^2}}, \quad \boldsymbol{b} = \frac{q - \sqrt{q^2 - \gamma_2^2}}{\gamma_2}, \tag{13}$$

мы имеем

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^s = N^s[1 - 2\boldsymbol{a}\cos(u-Q) + \boldsymbol{a}^2]^{-s/2}[1 - 2\boldsymbol{b}\cos(u+Q) + \boldsymbol{b}^2]^{-s/2}. \tag{14}$$

Поскольку $\boldsymbol{b}$ является малой величиной, то ее легко можно вычислить путем разложения выражения под квадратным корнем по теореме бинома

$$\boldsymbol{b} = \frac{\gamma_2}{2q} + \frac{\gamma_2^3}{8q^3} + \frac{\gamma_2^5}{16q^5} + \dots .$$

Вычислительная процедура заключается в следующем.

Допустим, что гармонический анализ необходимо произвести для внешней планеты. Разделим период по средней аномалии внешней планеты на $2n$ равных частей и для каждого частного значения средней аномалии определим эксцентрическую аномалию, решая уравнение Кеплера. Затем вычислим частные значения γ_0, γ_1, β_0 и, если необходимо использовать уравнение (14), частные значения величин C, q, $q \sin Q$, $q \cos Q$, N, a, b. Для каждого частного значения Q и b можно разложить вторую скобку из (14) в ряд Фурье с аргументами $\cos ju$, $\sin ju$ при помощи гармонического анализа для нескольких частных значений u; в силу быстрой сходимости этого ряда нет смысла разлагать ее посредством коэффициентов Лапласа. Первая квадратная скобка из (14) может быть разложена в ряд Фурье с аргументами $\cos j(u-Q)$ при помощи коэффициентов Лапласа; вычисление этих коэффициентов описывается ниже. Допустим, что это разложение уже выполнено. Тогда мы преобразуем полученный ряд путем подстановки численных значений угла Q и кратных этого угла в другой ряд с аргументами $\cos ju$, $\sin ju$. Тогда мы имеем $2n$ частных значений рядов, выражающих первую и вторую квадратные скобки из (14), которые необходимо перемножить между собой, а также умножить на N^s, что даст $2n$ частных значений $(a'/\Delta)^s$, каждое из которых разложено в ряд Фурье. Постоянный член и коэффициенты могут быть выражены в виде рядов Фурье по l'. Выбирая $2n$ частных значений постоянного члена, мы подвергаем их гармоническому анализу и аналогичным образом поступаем с $2n$ частными значениями каждого коэффициента этих рядов. В результате после замены произведений синусов и косинусов суммами и разностями последних получаются двойные ряды Фурье для $(a'/\Delta)^s$, аргументы которых содержат эксцентрическую аномалию внутренней планеты и среднюю аномалию внешней.

Эти ряды можно преобразовать теперь к двум средним аномалиям посредством бесселевых функций. При таком преобразовании каждый член ряда, содержащий кратность эксцентрической аномалии в аргументе, превращается в ряд членов, содержащих различные кратности средней аномалии. Формула этого преобразования может быть представлена в следующем виде:

$$A \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\beta - ku) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A \frac{k}{j} J_{j-k}(je) \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\beta - jl), \tag{15}$$

где l — средняя аномалия, β — какой-нибудь угол, e — эксцентриситет, а J — бесселева функция первого рода порядка $j-k$ с аргументом je. При использовании этого уравнения необходимо помнить, что

$$J_{-s}(x) = (-1)^s J_s(x), \quad J_s(-x) = (-1)^s J_s(x), \quad J_{-s}(-x) = J_s(x).$$

4. Буквенный метод. Буквенное разложение возмущающей функции может быть выполнено несколькими способами. Выбор переменных зависит от характера интересующей нас задачи. В большинстве планетных теорий наиболее выгодным является разложение по средним аномалиям. При этом с самого начала подставляют числовое значение для отношения больших осей. В таком случае коэффициенты будут функциями от эксцентриситетов и наклонностей. Аргументы будут содержать средние аномалии и долготы перигелиев, отсчитываемые от линии пересечения плоскостей орбит. Однако разложения по истинным или эксцентрическим аномалиям сходятся, вообще говоря, быстрее Преобразования любого из этих разложений к средним аномалиям могут быть легко выполнены. Тем не менее по некоторым соображениям выгоднее произвести промежуточное разложение по эксцентрическим аномалиям.

В случае двух планет, движущихся в одной и той же плоскости по круговым орбитам, разложение обратной величины их взаимного расстояния $1/\Delta$, главной части возмущающей функции, можно сразу написать при помощи коэффициентов Лапласа. Общая теория этих функций будет дана в конце этой главы.

В том случае, когда

$$\alpha = a/a', \quad a < a',$$

имеем

$$\frac{a'}{\Delta} = [1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda - \lambda')]^{-1/2} = \sum_0^\infty b_{1/2}^{(i)} \cos i(\lambda - \lambda'), \tag{16}$$

или вообще

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s} = [1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda - \lambda')]^{-s} = \sum_0^\infty b_s^{(i)} \cos i(\lambda - \lambda'). \tag{17}$$

Если орбиты являются эллиптическими, то взаимное расстояние можно выразить через радиусы-векторы и истинные аномалии следующим образом:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(f - f' + \Pi - \Pi') =$$
$$= r'^2\left[1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}\cos(f - f' + \Pi - \Pi')\right]$$

и

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left[1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'}\cos(f - f' + \Pi - \Pi')\right]^{-1/2}. \tag{18}$$

При помощи теоремы Тэйлора и используя выражения для r, r', f и f' через эксцентрические или средние аномалии, можно выразить Δ^{-1} через эти же переменные. Если мы ограничимся классическим способом обозначения для функций и их производных, то разложения примут очень сложную форму, которая затруднит и запись и понимание. Для того чтобы упростить выражения, целесообразно ввести сокращенные обозначения. Труд, затраченный на изучение таких обозначений, окупается с лихвой. Поэтому мы отклоняемся от основной темы для изложения вопроса о разложении функций посредством символических операторов.

Пусть $f(x)$ — аналитическая функция от x. В таком случае, согласно теореме Тэйлора (h — приращение x), имеем

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots =$$
$$= \sum_0^\infty \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

где $f^{(n)}(x)$ означает n-ю производную от $f(x)$ по x, причем $f^{(0)}(x)$ означает саму функцию $f(x)$. Обозначим через D_x дифференциальный оператор d/dx, и пусть D_x^n означает d^n/dx^n, так что функция, к которой он применяется, дифференцируется n раз. Тогда $f(x+h)$ можно написать в следующей символической форме:

$$f(x+h)=\sum_{0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\cdot D_x^n f(x).$$

Если основание натуральных логарифмов обозначено через E, то известно, что E, возведенное в любую степень, например y, выражается формулой

$$E^y=\sum_{0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}.$$

Следовательно, символически мы можем написать

$$\frac{h^n}{n!}D_x^n=E^{hD_x} \quad \text{и} \quad f(x+h)=E^{hD_x}f(x).$$

Смысл этого выражения состоит не в том, что E^{hD_x} умножается на $f(x)$, а в том, что каждый член разложения E^{hD_x} действует на функцию $f(x)$, давая первое выражение для $f(x+h)$, которое приведено выше. Кроме того, поскольку логарифм любой величины y определяется по формуле $y=E^{\ln y}$, то мы можем написать

$$\begin{aligned} f(px)&=f(E^{\ln px})=f(E^{(\ln p+\ln x)})=\\ &=\sum_{0}^{\infty}\frac{(\ln p)^n}{n!}\left(\frac{d}{d\ln x}\right)^n f(x), \end{aligned} \tag{19}$$

где p — любой множитель, не зависящий от x. Используя символ D для обозначения

$$\frac{d}{d\ln x}=x\frac{d}{dx},$$

имеем

$$f(px)=E^{(\ln p)D}f(x)=p^D f(x).$$

В приложениях p будет порядка единицы. Если мы положим $p=1+\delta$, то мы можем разложить $p^D=(1+\delta)^D$, согласно формуле бинома Ньютона:

$$p^D=1+D\delta+\frac{D(D-1)}{2!}\delta^2+\ldots.$$

Для краткости мы записываем это разложение в виде

$$p^D=\sum_{0}^{\infty}\binom{D}{k}\delta^k,$$

где символ $\binom{D}{k}$ означает коэффициент при x^k в разложении $(1+x)^D$. Тогда $f(px)$ можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(px)=p^D f(x)&=\sum_{0}^{\infty}\binom{D}{k}\delta^k f(x)=\\ &=\left[1+D\delta+\frac{1}{2}(D^2-D)\delta^2+\frac{1}{6}(D^3-3D^2+2D)\delta^3+\ldots\right]f(x). \end{aligned}$$

При расшифровке этого выражения необходимо помнить, что $D^j f(x)$ представляет собой j-ю производную от $f(x)$ по $\ln x$. Таким образом,

$$Df = x\frac{df}{dx},$$

$$D^2 f = x^2\frac{d^2 f}{dx^2} + x\frac{df}{dx}$$

и т. д.

В случае функции от двух переменных x и x' мы имеем

$$f(x+h,\ x'+h') = E^{hDx + h'D'x'} f(x,\ x')$$

и

$$f(px,\ p'x') = p^D p'^{D'} \cdot f(x,\ x'). \tag{20}$$

Возвращаясь теперь к возмущающей функции, можно разложить эту функцию в ряд по истинным аномалиям следующим образом. Наша задача состоит в том, чтобы выразить соотношение (18) в форме (19) так, чтобы функция $f(x)$ имела форму (16), которая не зависит от эксцентриситетов. Если, как и в гл. II, мы введем следующую показательную функцию:

$$\psi = E^{if}$$

и функцию β от эксцентриситета e равенством

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

то мы имеем

$$r = a\frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}(1+\beta\psi)^{-1}\left(1+\frac{\beta}{\psi}\right)^{-1},$$

что позволяет нам написать для краткости

$$r = a\varrho$$

и аналогично

$$r' = a'\varrho'.$$

Поэтому выражение (18) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a'\varrho'}\left[1+\left(\frac{a\varrho}{a'\varrho'}\right)^2 - 2\frac{a\varrho}{a'\varrho'}\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\right]^{-1/2}.$$

Считая это выражение функцией от $(\varrho/\varrho')\alpha$, мы имеем, согласно (19),

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a'\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^D [1+\alpha^2-2\alpha\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]^{-1/2} =$$
$$= \frac{1}{a'}\varrho^D(\varrho')^{-D-1}[1+\alpha^2-2\alpha\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]^{-1/2},$$

где теперь $D = \alpha d/d\alpha$, или, разлагая в ряд,

$$\frac{a'}{\Delta} = \left[\frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}\right]^D \left[\frac{(1-\beta'^2)^2}{1+\beta'^2}\right]^{-D-1} (1+\beta\psi)^{-D}\left(1+\frac{\beta}{\psi}\right)^{-D}(1+\beta'\psi')^{D+1}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\beta'}{\psi'}\right)^{D+1}\frac{a'}{\Delta_0}, \tag{21}$$

если мы положим

$$\frac{a'}{\Delta_0} = [1+\alpha^2-2\alpha\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]^{-1/2}.$$

Теперь $(1+\beta\psi)^{-D}(1+\beta/\psi)^{-D}$ может быть выражено через гипергеометрическую функцию F Гаусса. Определение этой функции таково:

$$F(A, B, C, x) = 1 + \frac{AB}{C\cdot 1}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)2!}x^2 + \ldots .$$

Поэтому

$$(1+\beta\psi)^{-D}\left(1+\frac{\beta}{\psi}\right)^{-D} = F(D, D, 1, \beta^2) + \\ + \sum_1^\infty (\beta\psi)^j \binom{-D}{j} F(D+j, D, j+1, \beta^2) + \\ + \sum_1^\infty \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^j \binom{-D}{j} F(D+j, D, j+1, \beta^2) \quad (22)$$

и

$$(1+\beta'\psi')^{D+1}\left(1+\frac{\beta'}{\psi'}\right)^{D+1} = F(-D-1, -D-1, 1, \beta'^2) + \\ + \sum_1^\infty (\beta'\psi')^k \binom{D+1}{k} F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta'^2) + \\ + \sum_1^\infty (\beta'/\psi')^k \binom{D+1}{k} F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta'^2). \quad (23)$$

Для получения этого разложения другим путем полагаем

$$r_0 = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{r_0}{r_0'},$$

Тогда мы можем написать следующее разложение:

$$\frac{r_0'}{\Delta} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \beta^j \beta'^k \binom{-D}{j} \binom{D+1}{k} F(D+j, D, j+1, \beta^2) \times \\ \times F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta^2)\frac{1}{\Delta_0}\cdot 2\cos(if \pm kf'), \quad (24)$$

где

$$\Delta_0^2 = 1 + \left(\frac{r_0}{r_0'}\right)^2 - 2\frac{r_0}{r_0'}\cos(f - f' + \Pi - \Pi').$$

Теперь $1/\Delta_0$ является также функцией от эксцентриситетов. Это не представляет большого неудобства. В случае астероида, вообще говоря, $\beta > \beta'$, где β' пропорционально эксцентриситету орбиты большой планеты. В таком случае используемое эффективное значение α уменьшится и разложение по степеням α будет сходиться быстрее.

Если плоскости орбит наклонены друг к другу под углом $\mathcal{Y}$, который обычно мал, то мы можем написать квадрат взаимного расстояния в следующем виде:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos V,$$

где V — угол между радиусами-векторами. Если долготы перигелиев отсчитываются от линии пересечения этих двух плоскостей орбит, то мы имеем

$$\cos V = \cos^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \sin^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cos(f + f' + \Pi + \Pi'),$$

или

$$\cos V = \cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \sin^2\frac{\mathcal{J}}{2}[-\cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \\ + \cos(f + f' + \Pi + \Pi')] = \\ = \cos(f - f' + \Pi - \Pi') - 2\sin^2\frac{\mathcal{J}}{2}\sin(f + \Pi)\sin(f' + \Pi').$$

Обычно разложение Δ^{-1} производится только по $\sin^2(\mathcal{J}/2)$. Однако это дает ряд, сходящийся медленнее, чем в том случае, когда при разложении используются как $\cos^2(\mathcal{J}/2)$, так и $\sin^2(\mathcal{J}/2)$.

Пусть теперь

$$\Delta_0^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cos(f - f' + \Pi - \Pi').$$

Тогда

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1}\left[1 - \frac{2\alpha\sin^2(\mathcal{J}/2)\cos(f + f' + \Pi + \Pi')}{\Delta_0^2}\right]^{-1/2} = \\ = \Delta_0^{-1}\left\{1 - \frac{2\alpha\sigma[\psi\psi' h + (\psi\psi' h)^{-1}]}{\Delta_0^2}\right\}^{-1/2} = \\ = \Delta_0^{-1}\sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k\left(\frac{2\alpha\sigma}{\Delta_0^2}\right)^k[\psi\psi' h + (\psi\psi' h)^{-1}]^k. \qquad (25)$$

В этом выражении $h = E^{i(\Pi+\Pi')}$ и $\sigma = \frac{1}{2}\sin^2(\mathcal{J}/2)$.

Одна особенность этого ряда заключается в том, что коэффициент при косинусе дуги, кратной аргументу $f + f' + \Pi + \Pi'$, соответствует той же степени σ. Если мы положим

$$\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1^2} = \frac{2\alpha\cos^2(\mathcal{J}/2)}{1+\alpha^2} \quad \text{и} \quad \cos^2\frac{\mathcal{J}}{2} = \nu,$$

то мы имеем

$$\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cos(f - f' + \Pi - \Pi')\right]^{-s} = \\ = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha\nu}\right)^s[1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\cos(f - f' + \Pi - \Pi')]^{-s} = \\ = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha\nu}\right)^s\sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^j\cos j(f - f' + \Pi - \Pi'). \qquad (26)$$

Символическое разложение по эксцентриситетам и средним аномалиям может быть рассмотрено одновременно.

Положим

$$\chi = E^{iu} \quad \text{и} \quad e = \frac{2\beta}{1+\beta^2};$$

тогда

$$r = \frac{a}{1+\beta^2}(1 - \beta\chi)\left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right) \quad \text{и} \quad \psi = \chi\left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)\Big/(1 - \beta\chi).$$

Введем теперь, кроме оператора $D = ad/da$, операторы $B = \chi d/d\chi$ и $B' = \chi' d/d\chi'$; тогда

$$\frac{a'}{\Delta} = (1+\beta'^2)^{D+1}(1+\beta^2)^{-D}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)^{D+B}(1-\beta\chi)^{D-B}\left(1-\frac{\beta'}{\chi'}\right)^{-D-1+B'}\times$$
$$\times(1-\beta'\chi')^{-D-1-B'}\Delta_u^{-1}. \tag{27}$$

Здесь Δ_u равно значению функции после замены r на a, r' на a', ψ на χ и ψ' на χ'. Мы снова можем записать $(1-\beta/\chi)^{D+B}(1-\beta\chi)^{D-B}$ через гипергеометрическую функцию F, и выражение для a'/Δ принимает следующий вид:

$$\frac{a'}{\Delta} = (1+\beta'^2)^{D+1}(1+\beta^2)^{-D}\Bigg[F(-D+B,\ -D-B,\ 1,\ \beta^2)+$$
$$+\sum_1^\infty\left(-\frac{\beta}{\chi}\right)^j\binom{D+B}{j}F(-D-B+j,\ -D+B,\ j+1,\ \beta^2)+$$
$$+\sum_1^\infty(-\beta\chi)^j\binom{D-B}{j}F(-D+B+j,\ -D-B,\ j+1,\ \beta^2)\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[F(D+1+B',\ D+1-B',\ 1,\ \beta'^2)+$$
$$+\sum_1^\infty\left(-\frac{\beta'}{\chi'}\right)^k\binom{-D-1+B'}{k}F(D+1-B'+k,\ D+1+B',\ k+1,\ \beta'^2)+$$
$$+\sum_1^\infty(-\beta'\chi')^k\binom{-D-1-B'}{k}F(D+1+B'+k,\ D+1-B',\ k+1,\ \beta'^2)\Bigg]\Delta_u^{-1}. \tag{28}$$

Тот факт, что мы имеем дело с действительными рядами Фурье, проявляется в том, что это выражение не изменяет знака, если мы меняем $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$, или i на $-i$, или χ на χ^{-1}, или B на $-B$. Некоторые авторы, например Ньюком и Пуанкаре, записали это выражение при помощи символических операторов $\Pi_{n,n'}^{m,m'}$. Тогда

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum_0^\infty\sum_0^\infty\sum_0^\infty\sum_0^\infty \beta^m\beta'^{m'}\chi^n\chi'^{n'}\Pi_{n,n'}^{m,m'}\Delta_u^{-1}. \tag{29}$$

Операторы $\Pi_{n,n'}^{m,m'}$ известны под названием операторов Ньюкома. Напишем теперь

$$\Pi_{n,n'}^{m,m'} = \Pi_{n,0}^{m,0}\Pi_{0,n'}^{0,m'} \quad \text{и} \quad m = n+2p.$$

Затем сравнением уравнений (28) и (29) находим

$$\Pi_{n,0}^{m,0} = (-1)^n\binom{D-B}{n}\Bigg[\binom{-D}{p}+\binom{-D}{p-1}\frac{(-D-B+n)(-D-B)}{(n+1)\cdot 1}+$$
$$+\binom{-D}{p-2}\frac{(-D+B+n)(-D+B+n+1)(-D-B)(-D-B+1)}{(n+1)(n+2)\,2!}+\ldots\Bigg]. \tag{30}$$

Оператор $\Pi_{0,n'}^{0,m'}$ может быть найден из этого выражения при помощи замены n на n', m на m' или p на p', D на $-D-1$ и B на B'. Если n отрицательно, то мы заменяем B на $-B$ и B' на $-B'$. Для операторов Π_n^m, обозначаемых таким способом вместо $\Pi_{n,0}^{m,0}$, легко можно получить ряд рекуррентных формул.

Оператор Π_n^m является функцией от D и B, выражаемой в виде $\Pi_n^m(D, B)$. Из уравнения (28) мы усматриваем, что для $n \geqslant 0$

$$(1+\beta^2)^{-D}(1-\beta\chi)^{D-B} = \sum_n \sum_m \Pi_n^m(D, B)\,\beta^m\chi^n,$$

$$(1+\beta'^2)^{-D}(1-\beta'\chi')^{D} = \sum_{n'} \sum_{m'} \Pi_{n'}^{m'}(D, 0)\,\beta'^{m'}\chi'^{n'}, \qquad m' = n'+2p, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

и

$$(1-\beta\chi)^{-B} = \sum_{j'} \sum_{k'} \Pi_{k'}^{j'}(0, B)\,\beta^{j'}\chi^{k'}, \qquad j' = k'+2q, \quad q = 0, 1, \ldots. \tag{31}$$

Пусть теперь $j' = m - m'$ и $k' = n - n'$; тогда из равенства (31) мы имеем

$$\Pi_n^m(D, B) = \sum_{n'} \sum_{m'} \Pi_{n'}^{m'}(D, 0)\,\Pi_{n-n'}^{m-m'}(0, B).$$

Если мы заменим m' на $n'+2p$ и $m-m'$ на $n-n'+2q$ и если $m = n+2s$, то мы суммируем по значениям $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, так чтобы $p+q=s$. Для значений $n < 0$ мы просто заменяем B на $-B$, так что для $n \geqslant 0$ необходимо вычислить только $\Pi_n^m(D, 0)$ и $\Pi_n^m(0, B)$.

Рекуррентная формула

$$\Pi_n^m(D, B) = \sum_{k=0}^{m} A_n^{m,k}(B)\,\Pi_{n-k}^{m-k}(D, B) \tag{32}$$

может быть выведена следующим путем. Мы можем написать (см. уравнение (27))

$$(1+\beta^2)^{-D}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)^{D+B}(1-\beta\chi)^{D-B}$$

в виде

$$\left[(1+\beta^2)^{-1}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)(1-\beta\chi)\right]^{D-B}(1+\beta^2)^{-B}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}$$

или

$$\left[1-\frac{\beta}{\chi}(1+\beta^2)^{-1}(1+\chi^2)\right]^{D-B}(1+\beta^2)^{-B}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}.$$

Чтобы найти Π_{n-m}^{n+m}, мы должны выбрать из разложения первой квадратной скобки формулы (32) все степени от $n-m$ по $n+m$. Степени выше указанной никогда не дадут нужной степени β, а степени ниже указанной никогда не дадут нужной степени χ. Тогда мы получим для одного члена выражение вида

$$(-1)^{n+m-k}\binom{D-B}{n+m-k}\left(\frac{\beta}{\chi}\right)^{n+m-k}(1+\beta^2)^{-n-m+k}(1+\chi^2)^{n+m-k}\times$$
$$\times(1+\beta^2)^{-B}\left(1-\frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}. \tag{33}$$

Чтобы получить соответствующую степень β и χ, мы должны взять $2j$-ю степень β^2 из разложения бинома $(1+\beta^2)^{-B-n-m-k}$, $(k-2j)$-ю степень β/χ из $(1-\beta/\chi)^{2B}$ и $(n-j)$-ю степень χ^2 из $(1+\chi^2)^{n+m-k}$.

Собирая все члены вместе и учитывая, что

$$\Pi_{n+m-k}^{n+m-k} = \binom{D-B}{n+m-k} (-1)^{n+m-k},$$

находим

$$\Pi_{n+m}^{n-m} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{\leqslant k/2} \binom{-B-n-m+k}{j} \binom{2B}{k-2j} \binom{m+n-k}{n-j} \Pi_{n+m-k}^{n+m-k}. \quad (34)$$

Эта формула впервые была дана Чесином. Мы упомянули ее здесь скорее как курьез, чем как реальное с практической точки зрения средство для вычисления операторов. Прямое вычисление операторов посредством определяющей формулы и первой рекуррентной формулы, по-видимому, является наиболее удобным.

Наилучший путь для разложения возмущающей функции по средним аномалиям состоит в преобразовании посредством бесселевых функций разложения по эксцентрическим аномалиям, полученного нами ранее. Если

$$\Delta^{-1} = \sum_{p} \sum_{p'} B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

то

$$\Delta^{-1} = \sum \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$A_{mm'} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{m} \frac{p'}{m'} B_{pp'} J_{m-p}(ml) J_{m'-p'}(m'l'),$$

а $J_k(x)$ — бесселева функция порядка k. Для вычисления одного члена, например члена с аргументом $ml+nl'$, умножим Δ^{-1} на

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} E^{\frac{ml}{2}(\chi-\chi^{-1})} E^{\frac{nl'}{2}(\chi'-\chi'^{-1})}$$

и разложим в ряд по эксцентрической аномалии. Тогда коэффициент при $E^{i(ml+nl')}$ в разложении по средним аномалиям будет тем же самым, что и коэффициент при $\chi^m \chi'^n$ в разложении последней функции. Умножив (28) на

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} E^{\frac{ml}{2}(\chi-\chi^{-1})} E^{\frac{nl'}{2}(\chi'-\chi'^{-1})},$$

получим

$$(1+\beta'^2)^D (1+\beta^2)^{-D-1} \Big[F(-D-1+B,\ -D-1-B,\ 1,\ \beta^2) +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{\chi}\right)^j \binom{D+1+B}{j} F(-D-1-B+j,\ -D-1+B,\ j+1,\ \beta^2) +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} (-\beta\chi)^j \binom{D+1-B}{j} F(-D-1+B+j,\ -D-1-B,\ j+1,\ \beta^2) \Big] \times$$

$$\times \Big[F(D+B',\ D-B',\ 1,\ \beta'^2) +$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\left(-\frac{\beta'}{\chi'}\right)^k\binom{-D+B'}{k}F(D-B'+k,\ D+B',\ k+1,\ \beta'^2)+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}(-\beta'\chi')^k\binom{-D-B'}{k}F(D+B'+k,\ D-B',\ k+1,\ \beta'^2)\Big]\times$$

$$\times\sum_{-\infty}^{+\infty}J_p(me)\chi^p\sum_{-\infty}^{+\infty}J_q(ne')\chi'^q. \qquad (35)$$

Для коэффициента при части члена с аргументом $ml+nl'$, которая не зависит от наклонности, мы находим следующее выражение:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\Big[F(-D-1+p,\ -D-1-p,\ 1,\ \beta^2)J_{m-p}(me)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}J_{m+j-p}(me)\cdot(-\beta)^j\binom{D+1+p}{j}F(-D-1-p+j,\ -D-1+p,\ j+1,\ \beta^2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}J_{m-j-p}(me)\cdot(-\beta)^j\binom{D+1-p}{j}F(-D-1+p+j,\ -D-1-p,\ j+1,\ \beta^2)\Big]\times$$

$$\times\Big[F(D-p,\ D+p,\ 1,\ \beta'^2)J_{n+p}(ne')+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}J_{n+k+p}(ne')\cdot(-\beta')^k\binom{-D-p}{k}F(D+p+k,\ D-p,\ k+1,\ \beta'^2)+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}J_{n-k+p}(ne')\cdot(-\beta')^k\binom{-D+p}{k}F(D-p+k,\ D+p,\ k+1,\ \beta'^2)\Big]\times$$

$$\times b_{1/2}^{(p)}\cdot(1+\beta'^2)^D(1+\beta^2)^{-D-1}. \qquad (36)$$

Аналогичным путем могут быть найдены операторы Ньюкома для разложения по средним аномалиям. В этом случае $(r/a)^D E^{iq\nu}$ должны быть выражены через средние аномалии. Так как эти выражения не замкнуты, то получающиеся выражения для операторов будут более сложными, чем в случае применения эксцентрических аномалий. Поскольку преобразования, необходимые для перехода от эксцентрических аномалий к средним, выполняются очень просто, то фактически операторы для разложения по средним аномалиям не нужны. Часть коэффициента наиболее низкого порядка относительно эксцентриситета в любом отдельном члене можно очень легко найти из выражения (36). Обратимся, например, к члену с аргументом $2l-5l'$. Этот член дает бо́льшую часть большого неравенства в движениях Юпитера и Сатурна. Возможные комбинации p и j приведены в табл. 1.

Таблица 1

$m=2,\ n=-5$ p	j	k	Степени β	β'
0	2	−5	2	5
1	1	−4	1	4
2	0	−3	0	3
3	−1	−2	1	2
4	−2	−1	2	1
5	−3	0	3	0

Имеются четыре члена третьего порядка относительно e и e', содержащие e^3, e^2e', ee'^2 и e'^3. Выберем член с e'^3 в коэффициенте, так что

$p=2$, $j=0$, $k=-3$. Тогда из выражения (36) мы получаем

$$\Big[J_{-3}(-5e')+J_{-2}(-5e')(-\beta')\frac{-D+B'}{1!}+$$
$$+J_{-1}(-5e')(-\beta')^2\frac{(-D+B')(-D+B'-1)}{2!}+$$
$$+J_0(-5e')(-\beta')^3\frac{(-D+B')(-D+B'-1)(-D+B'-2)}{3!}\Big]\,b_{1/2}^{(2)}.$$

Поскольку

$$J_m(x)=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

и

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x),$$

то с точностью до третьей степени e' имеем выражение

$$\Big[\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\left(\frac{}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)(D+2)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{(D+2)(D+3)}{2!}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{(D+2)(D+3)(D+4)}{3!}\Big]\,e'^3 b_{1/2}^{(2)}\cos(2l-5l'+2\Pi-2\Pi'),$$

которое приводится к следующему:

$$\frac{1}{48}(D^3+24D^2+176D+389)\,e'^3 b_{1/2}^{(2)}\cos(2l-5l'+2\Pi-2\Pi').$$

Чтобы выполнять буквенное разложение возмущающей функции систематическим образом, мы можем расположить члены так, чтобы, полагая $u+\Pi=\eta$ и $u'+\Pi'=\eta'$, иметь

$$\frac{a'}{\Delta_u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\{A_{1/2}^{(j)}\cos(j\eta-j\eta')+A_{3/2}^{(j)}\cos[(j+1)\eta-(j-1)\eta']+$$
$$+A_{5/2}^{(j)}\cos[(j+2)\eta-(j-2)\eta']+\ldots\}.$$

Если для сокращения записи мы вместо $E^{i(\Pi-\Pi')}$ используем обозначение g, то из разложения (25) мы получим

$$\frac{1}{\Delta_u}=\frac{1}{\Delta_0}\left\{1-\frac{2a\sigma\,[\chi\chi'h+(\chi\chi'h)^{-1}]}{\Delta_0^2}\right\}^{-1/2}=$$
$$=\frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{2a\sigma}{\Delta_0^2}\right)^k[\chi\chi'h+(\chi\chi'h)^{-1}]^k=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}(2a\sigma)^k\sum_{-\infty}^{+\infty}b_{2k+1}^{(j)}\left(\frac{\chi}{\chi'}\,g\right)^j[\chi\chi'h+(\chi\chi'h)^{-1}]^k. \quad (37)$$

Вместо последней квадратной скобки в этом выражении мы можем написать

$$[\chi\chi'h+(\chi\chi'h)^{-1}]^k=(\chi\chi'h)^k\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(\chi\chi'h)^{-2m}=$$
$$=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(\chi\chi'h)^{k-2m}. \quad (38)$$

Положим теперь $k-2m=n$ или $k=2m+n$. Выражение (37) можно написать в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\geqslant(-n/2)}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{2m+n}(-1)^{2m+n}(2\alpha\sigma)^{2m+n}\sum_{-\infty}^{+\infty}b^{(j)}_{2m+n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\chi}{\chi'}g\right)^{j}(\chi\chi'h)^{n},$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\geqslant(-n/2)}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{2m+n}(-1)^{2m+n}(2\alpha\sigma)^{2m+n}\sum_{-\infty}^{+\infty}b^{(j)}_{2m+n+\frac{1}{2}}\chi^{j+n}\chi'^{-j+n}g^{j}h^{n}.$$

Аргумент в тригонометрической форме имеет следующий вид: $\cos[(j+n)\eta-(j-n)\eta']$. Из этого выражения, полагая $n=0$, мы находим

$$A^{(j)}_{1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{2m}(-1)^{2m}(2\alpha\sigma)^{2m}\,b^{(j)}_{2m+\frac{1}{2}}$$

и т. д.

5. Непрямой член. Если отбросить множитель k^2m' или k^2m, то непрямой член возмущающей функции равен или $-r/r'^2\cos H$, или $-r'/r^2\cos H$ в зависимости от того, является ли возмущаемая планета внутренней или внешней. Достаточно рассмотреть первый случай, ибо во втором случае можно поступить точно таким же образом. Мы имеем

$$\begin{aligned}-\frac{r}{r'^2}\cos H&=-\frac{r}{r'^2}\left[\cos^2\frac{\mathcal{Y}}{2}\cos(f-f'+\gamma)+\sin^2\frac{\mathcal{Y}}{2}\cos(f+f'+\theta)\right]=\\&=-\frac{1}{2}\frac{r}{r'^2}\cos^2\frac{\mathcal{Y}}{2}\left[gE^{i(f-f')}+g^{-1}E^{-i(f-f')}\right]-\\&-\frac{1}{2}\frac{r}{r'^2}\sin^2\frac{\mathcal{Y}}{2}\left[hE^{i(f+f')}+h^{-1}E^{-i(f+f')}\right].\end{aligned}\qquad(39)$$

Теперь мы имеем

$$\frac{r}{a}E^{if}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta}{j}\left[J_{j-1}(je)-\beta^2J_{j+1}(je)\right]\Lambda^{j},$$

$$\frac{r}{a}E^{-if}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta}{j}\left[\beta^2J_{j-1}(je)-J_{j+1}(je)\right]\Lambda^{-j},$$

где

$$\eta=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right),\quad \beta=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},\quad \Lambda=E^{il}.$$

Дифференциальные уравнения эллиптического движения дают

$$\frac{a^2}{r^2}E^{if}=-\frac{d^2}{dl^2}\frac{r}{a}E^{if},$$

и, следовательно,

$$\frac{a^2}{r^2}E^{if}=\sum_{-\infty}^{+\infty}j\eta\left[J_{j-1}(je)-\beta^2J_{j+1}(je)\right]\Lambda^{j},$$

$$\frac{a^2}{r^2}E^{-if}=\sum_{-\infty}^{+\infty}j\eta\left[\beta^2J_{j-1}(je)-J_{j+1}(je)\right]\Lambda^{-j}.$$

Подставляя эти значения в выражение (39), находим, что в нем коэффициент при $\cos(jl+j'l'+\gamma)$ равен

$$-\frac{a}{a'^2}\cos^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cdot\frac{\eta}{j}\left[J_{j-1}(je)-\beta^2 J_{j+1}(je)\right]\cdot j'\eta'\left[\beta'^2 J_{j'-1}(j'e')-J_{j'+1}(j'e')\right]$$

и коэффициент при $\cos(jl+j'l'+\theta)$ равен

$$-\frac{a}{a'^2}\sin^2\frac{\mathcal{J}}{2}\cdot\frac{\eta}{j}\left[J_{j-1}(je)-\beta^2 J_{j+1}(je)\right]\cdot j'\eta'\left[J_{j'-1}(j'e')-\beta'^2 J_{j'+1}(j'e')\right].$$

В частном случае, когда j равно 0, средние множители этих выражений становятся равными $-\frac{3}{2}e$.

Непрямой член возмущающей функции можно представить в другой форме, которая пригодна для определения численных значений коэффициентов в тех случаях, когда в распоряжении имеются вспомогательные постоянные из разд. 3. Если мы положим

$$h=ak\cos K,\quad g=\frac{1}{2}p\cos P,$$

$$h_1=\frac{1}{2}v\cos V,\ g_1=\frac{1}{2}v\sin V,$$

где g и h не следует смешивать с показательными функциями, обозначенными выше этими же символами, и

$$P_j=\frac{1}{j}\left[J_{j-1}(je)-J_{j+1}(je)\right],\quad Q_j=\frac{1}{j}\left[J_{j-1}(je)+J_{j+1}(je)\right]$$

при условии, что

$$P_0=-3e,\quad Q_0=0,$$

то мы находим следующее выражение:

$$a'\frac{r}{r'^2}\cos H=\sum\frac{1}{2}j'^2\left[hP_jP'_{j'}\pm h_1Q_jQ'_{j'}\right]\cos(\pm j'l'-jl)-$$

$$-\sum\frac{1}{2}j'^2\left[gQ_jP'_{j'}\pm g_1P_jQ'_{j'}\right]\sin(\pm j'l'-jl),$$

в котором j и j' принимают все положительные целочисленные значения, включая и нуль, а двойной знак берется двояким образом, т. е. суммирование выполняется сначала при знаке «плюс», а затем — при знаке «минус».

6. **Буквенное разложение.** Для того чтобы закончить изучение возмущающей функции, мы получим разложение по средним аномалиям в явном виде с точностью до членов третьего порядка относительно эксцентриситетов и взаимной наклонности, за исключением членов, необходимых для получения постоянной части возмущающей функции, которые будут даны с точностью до четвертого порядка; вековые возмущения зависят от постоянной части возмущающей функции и часто требуются с более высокой точностью, чем периодические возмущения. Разложение, которое будет приведено ниже, можно получить, следуя правилам, указанным в предыдущем разделе; однако удобнее вывести его из более обширных разложений, выполненных Леверрье, Ньюкомом и другими исследователями. Для сокращения записи мы принимаем

следующие обозначения:

$$A_i = b^{(i)}_{1/2},\quad B_i = \alpha b^{(i)}_{3/2},\quad \sigma = \sin\frac{1}{2}\mathcal{Y},\quad D^k_\alpha = \frac{d^k}{d\alpha^k};$$

поэтому, например,

$$(4 + 7\alpha D_\alpha + \alpha^2 D^2_\alpha) A_2$$

означает

$$4b^{(2)}_{1/2} + 7\alpha\frac{db^{(2)}_{1/2}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2b^{(2)}_{1/2}}{d\alpha^2}.$$

В этих обозначениях имеем

$$\frac{a'}{\Delta} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\frac{1}{2}A_j + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)[-4j^2 + 2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D^2_\alpha] A_j - \frac{1}{4}\sigma^2(B_{j-1} + B_{j+1}) -$$

$$- \frac{1}{16}(e^2 + e'^2)\sigma^2[-4j^2 + 2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D^2_\alpha](B_{j-1} + B_{j+1}) +$$

$$+ \frac{1}{128}e^4[16j^4 - 9j^2 - 8j^2\alpha D_\alpha - 8j^2\alpha^2 D^2_\alpha + 4\alpha^3 D^3_\alpha + \alpha^4 D^4_\alpha] A_j +$$

$$+ \frac{1}{128}e'^4[16j^4 - 17j^2 - (24j^2 - 24)\alpha D_\alpha -$$

$$- (8j^2 - 36)\alpha^2 D^2_\alpha + 12\alpha^3 D^3_\alpha + \alpha^4 D^4_\alpha] A_j +$$

$$+ \frac{1}{32}e^2e'^2[16j^4 - (16j^2 - 4)\alpha D_\alpha - (8j^2 - 14)\alpha^2 D^2_\alpha +$$

$$+ 8\alpha^3 D^3_\alpha + \alpha^4 D^4_\alpha] A_j\Big\}\cos(jl' - jl + j\Pi' - j\Pi) +$$

$$+ \Big\{\frac{1}{4}ee'[4j^2 + 2j - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D^2_\alpha] A_j -$$

$$- \frac{1}{8}ee'\sigma^2[4j^2 + 2j - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D^2_\alpha](B_{j-1} + B_{j+1}) +$$

$$+ \frac{1}{32}e^3e'[-16j^4 - 28j^3 - 14j^2 - 2j + (12j^2 + 18j + 6)\alpha D_\alpha +$$

$$+ (8j^2 + 9j - 3)\alpha^2 D^2_\alpha - 6\alpha^3 D^3_\alpha - \alpha^4 D^4_\alpha] A_j +$$

$$+ \frac{1}{32}ee'^3[-16j^4 - 28j^3 - 10j^2 - 2j + (20j^2 + 18j - 6)\alpha D_\alpha +$$

$$+ (8j^2 + 9j - 21)\alpha^2 D^2_\alpha - 10\alpha^3 D^3_\alpha - \alpha^4 D^4_\alpha] A_j\Big\} \times$$

$$\times \cos[(j+1)l' - (j+1)l + j\Pi' - j\Pi] +$$

$$+ \frac{1}{64}e^2e'^2[16j^4 + 56j^3 + 61j^2 + 20j - (16j^2 + 36j + 20)\alpha D_\alpha -$$

$$- (8j^2 + 18j - 2)\alpha^2 D^2_\alpha + 8\alpha^3 D^3_\alpha + \alpha^4 D^4_\alpha] A_j \times$$

$$\times \cos[(j+2)l' - (j+2)l + j\Pi' - j\Pi] +$$

$$+ \frac{1}{16}e^2\sigma^2[4j^2 - 3j - 1 - (4j - 2)\alpha D_\alpha + \alpha^2 D^2_\alpha] B_j \times$$

$$\times \cos[(j+1)l' - (j+1)l + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] +$$

$$+\frac{1}{16}e'^2\sigma^2[4j^2-j-1-(4j-2)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2]B_j\times$$
$$\times\cos[(j-1)l'-(j-1)l+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$
$$+\frac{1}{8}ee'\sigma^2[-4j^2+2j+2+(4j-2)\alpha D_\alpha-\alpha^2D_\alpha^2]B_j\times$$
$$\times\cos[jl'-jl+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$
$$+\frac{1}{16}e^2e'[-8j^3+14j^2-5j-(4j^2-7j+4)\alpha D_\alpha+$$
$$+(2j+1)\alpha^2D_\alpha^2+\alpha^3D_\alpha^3]A_j\times$$
$$\times\cos[(j-1)l'-(j-2)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}e[-2j-\alpha D_\alpha]A_j-\frac{1}{4}e\sigma^2[-2j-\alpha D_\alpha](B_{j-1}+B_{j+1})+\right.$$
$$+\frac{1}{16}e^3[8j^3-10j^2+2j+(4j^2-7j+3)\alpha D_\alpha-$$
$$-(2j+2)\alpha^2D_\alpha^2-\alpha^3D_\alpha^3]A_j+$$
$$\left.+\frac{1}{8}ee'^2[8j^3+(4j^2-4j-2)\alpha D_\alpha-(2j+4)\alpha^2D_\alpha^2-\alpha^3D_\alpha^3]A_j\right\}\times$$
$$\times\cos[jl'-(j-1)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}e'[2j+1+\alpha D_\alpha]A_j-\frac{1}{4}e'\sigma^2[2j+1+\alpha D_\alpha](B_{j-1}+B_{j+1})+\right.$$
$$+\frac{1}{16}e'^3[-8j^3-14j^2-5j-1-(4j^2-j-7)\alpha D_\alpha+$$
$$+(2j+7)\alpha^2D_\alpha^2+\alpha^3D_\alpha^3]A_j+$$
$$\left.+\frac{1}{8}e^2e'[-8j^3-4j^2-(4j^2-4j-4)\alpha D_\alpha+(2j+5)\alpha^2D_\alpha^2+\alpha^3D_\alpha^3]A_j\right\}\times$$
$$\times\cos[(j+1)l'-jl+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{16}ee'^2[8j^3+18j^2+8j+(4j^2-j-10)\alpha D_\alpha-(2j+8)\alpha^2D_\alpha^2-\alpha^3D_\alpha^3]A_j\times$$
$$\times\cos[(j+2)l'-(j+1)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{4}e\sigma^2[2j-2-\alpha D_\alpha]B_j\cos[(j+1)l'-jl+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$
$$+\frac{1}{4}e'\sigma^2[-2j-1+\alpha D_\alpha]B_j\cos[jl'-(j-1)l+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]-$$
$$-\left\{\frac{1}{8}e^2[4j^2-5j+(4j-2)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2]A_j-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{16}e^2\sigma^2[4j^2-5j+(4j-2)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2](B_{j-1}+B_{j+1})\right\}\times$$
$$\times\cos[jl'-(j-2)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\left\{\frac{1}{4}ee'[-4j^2-2j-(4j+2)\alpha D_\alpha-\alpha^2D_\alpha^2]A_j-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}ee'\sigma^2[-4j^2-2j-(4j+2)\alpha D_\alpha-\alpha^2D_\alpha^2](B_{j-1}+B_{j+1})\right\}\times$$
$$\times\cos[(j+1)l'-(j-1)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\left\{\frac{1}{8}e'^2[4j^2+9j+4+(4j+6)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2]A_j-\right.$$

$$-\frac{1}{16}e'^2\sigma^2\left[4j^2+9j+4+(4j+6)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2\right](B_{j-1}+B_{j+1})\Big\}\times$$
$$\times\cos[(j+2)l'-jl+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2B_j\cos[(j+1)l'-(j-1)l+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$
$$+\frac{1}{48}e^3\left[-8j^3+30j^2-26j-(12j^2-27j+9)\alpha D_\alpha-(6j-6)\alpha^2D_\alpha^2-\right.$$
$$\left.-\alpha^3D_\alpha^3\right]A_j\cos[jl'-(j-3)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{16}e^2e'\left[8j^3-6j^2-5j+(12j^2-j-4)\alpha D_\alpha+(6j+1)\alpha^2D_\alpha^2+\alpha^3D_\alpha^3\right]A_j\times$$
$$\times\cos[(j+1)l'-(j-2)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{16}ee'^2\left[-8j^3-18j^2-8j-(12j^2+25j+10)\alpha D_\alpha-(6j+8)\alpha^2D_\alpha^2-\alpha^3D_\alpha^3\right]A_j\times$$
$$\times\cos[(j+2)l'-(j-1)l+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{48}e'^3\left[8j^3+42j^2+65j+27+(12j^2+51j+51)\alpha D_\alpha+\right.$$
$$\left.+(6j+15)\alpha^2D_\alpha^2+\alpha^3D_\alpha^3\right]A_j\times$$
$$\times\cos[(j+3)l'-jl+j\Pi'-j\Pi]+$$
$$+\frac{1}{4}e\sigma^2[-2j+2-\alpha D_\alpha]B_j\cos[(j+1)l'-(j-2)l+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$
$$+\frac{1}{4}e'\sigma^2[2j+3+\alpha D_\alpha]B_j\cos[(j+2)l'-(j-1)l+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi].$$

Непрямой член можно записать в следующем виде:

$$-\frac{r}{a}\frac{a'^2}{r'^2}\cos H=\left[1-\frac{1}{2}(e^2+e'^2)-\sigma^2\right]\cos(l'-l+\Pi'-\Pi)+$$
$$+ee'\cos(2l'-2l+\Pi'-\Pi)-$$
$$-\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{4}e'^2-\frac{3}{2}\sigma^2\right]e\cos(l'+\Pi'-\Pi)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e'^2-\frac{3}{8}e^2-\frac{1}{2}\sigma^2\right]e\cos(l'-2l+\Pi'-\Pi)+$$
$$+\left[2-e^2-\frac{3}{2}e'^2-2\sigma^2\right]e'\cos(2l'-l+\Pi'-\Pi)+$$
$$+\frac{3}{4}e^2e'\cos(2l'-3l+\Pi'-\Pi)-\frac{3}{16}ee'^2\cos(l'-\Pi'+\Pi)+$$
$$+\frac{27}{16}ee'^2\cos(3l'-2l+\Pi'-\Pi)-\frac{3}{2}e\sigma^2\cos(l'+\Pi'+\Pi)+$$
$$+\frac{1}{8}e^2\cos(l'+l+\Pi'-\Pi)+\frac{3}{8}e^2\cos(l'-3l+\Pi'-\Pi)-$$
$$-3ee'\cos(2l'+\Pi'-\Pi)+\frac{}{8}e'^2\cos(l'+l-\Pi'+\Pi)+$$
$$+\frac{27}{8}e'^2\cos(3l'-l+\Pi'-\Pi)+\sigma^2\cos(l'+l+\Pi'+\Pi)+$$
$$+\frac{1}{24}e^3\cos(l'+2l+\Pi'-\Pi)+\frac{1}{3}e^3\cos(l'-4l+\Pi'-\Pi)+$$
$$+\frac{1}{4}e^2e'\cos(2l'+l+\Pi'-\Pi)+\frac{1}{16}ee'^2\cos(l'+2l-\Pi'+\Pi)-$$

$$-\frac{81}{16}ee'^2\cos(3l'+\Pi'-\Pi)+\frac{1}{6}e'^3\cos(2l'+l-\Pi'+\Pi)+$$
$$+\frac{16}{3}e'^3\cos(4l'-l+\Pi'-\Pi)+\frac{1}{2}e\sigma^2\cos(l'+2l+\Pi'+\Pi)+$$
$$+2e'\sigma^2\cos(2l'+l+\Pi'+\Pi).$$

В тех случаях, когда мы вычисляем возмущения, испытываемые нижней планетой со стороны верхней, непрямой член возмущающей функции можно полностью учесть путем замены в первом слагаемом

$$b_{1/2}^{\pm1} \text{ на } b_{1/2}^{(\pm1)}-\alpha,\quad \alpha\frac{db_{1/2}^{(\pm1)}}{d\alpha} \text{ на } \alpha\frac{db_{1/2}^{(\pm1)}}{d\alpha}-\alpha,\quad b_{3/2}^{(0)} \text{ на } b_{3/2}^{(0)}-2,$$

все же остальные коэффициенты Лапласа и их производные остаются неизменными. Однако в случае возмущений верхней планеты со стороны нижней это правило не будет столь же простым, а потому проще вычислить непрямой член отдельно.

Необходимо заметить, что в случае возмущений первого порядка непрямой член можно вообще не вычислять, если условиться прибавлять произведение возмущающей массы на гелиоцентрические прямоугольные координаты x', y', z' возмущающей планеты в качестве поправок к гелиоцентрическим прямоугольным координатам x, y, z возмущаемой планеты. Но если необходимо получить возмущения второго или более высоких порядков, то проще вычислить оба члена возмущающей функции вместе.

7. Коэффициенты Лапласа. Теперь мы возвращаемся к методам вычисления коэффициентов $b_s^{(j)}$ в разложении

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_s^{(j)}\cos j\theta, \tag{40}$$

где $\alpha=a/a'$, $s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ и $b_s^{(-j)}=b_s^{(j)}$. Эти коэффициенты являются функциями только от α. Выражение в круглых скобках можно записать в виде следующего произведения двух сомножителей:

$$1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2=[1-\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)]\,[1-\alpha(\cos\theta-i\sin\theta)],$$

где $i=\sqrt{-1}$; полагая $z=E^{i\theta}$, мы можем написать

$$1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2=(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1}),$$

откуда

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=(1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha z^{-1})^{-s}$$

и

$$(1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha z^{-1})^{-s}=\frac{1}{2}b_s^{(0)}+\frac{1}{2}b_s^{(1)}(z+z^{-1})+\frac{1}{2}b_s^{(2)}(z^2+z^{-2})+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_s^{(j)}z^j. \tag{41}$$

Множители $(1-\alpha z)^{-s}$ и $(1-\alpha z^{-1})^{-s}$ можно разложить по степеням z по формуле бинома Ньютона, что дает

$$(1-\alpha z)^{-s}=1+\frac{s}{1}\alpha z+\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2+\frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3+\ldots,$$

$$(1-\alpha z^{-1})^{-s}=1+\frac{s}{1}\alpha z^{-1}+\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^{-2}+\frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^{-3}+\ldots.$$

Перемножая эти два ряда, мы получаем следующее выражение для коэффициента при z^j, который равен $\frac{1}{2}b_s^{(j)}$:

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}=\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+j-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots j}\times$$
$$\times\alpha^j\left[1+\frac{s(s+j)}{1(j+1)}\alpha^2+\frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1\cdot 2(j+1)(j+2)}\alpha^4+\ldots\right]. \qquad (42)$$

Когда $j=0$, множитель, стоящий вне квадратных скобок, становится равным единице.

Ряд (42) представляет собой частный случай гипергеометрических рядов. Используя общепринятые обозначения для такого рода рядов, имеем

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}=\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+j-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots j}\alpha^j F(s,\, s+j,\, j+1,\, \alpha^2).$$

Свойства коэффициентов Лапласа и способы их вычисления могут быть выведены на основании хорошо известной теории гипергеометрических рядов. Можно также отметить, что существуют подробные таблицы коэффициентов Лапласа и их производных, так что вычислителю на практике очень редко понадобится вычислять их с самого начала. Однако полезно установить здесь некоторые свойства коэффициентов Лапласа, что поможет пониманию существа вопроса и даст возможность вычислителю работать с большей свободой.

Согласно правилам, установленным в гл. II, мы имеем

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}\cos j\theta\, d\theta,$$

$$b_s^{(j)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}\cos j\theta\, d\theta.$$

Как и в случае бесселевых функций, мы можем вывести для $b_{1/2}^{(j)}$ выражение в виде определенного интеграла, содержащего явно α^j. Мы имеем

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2j}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\pi}\left(\sin^{2j}\theta+\frac{1}{2}\alpha^2\sin^{2j+2}\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^4\sin^{2j+4}\theta+\ldots\right)d\theta$$

Однако

$$\int_0^{\pi}\sin^{2j}\theta\, d\theta=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2j-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2j}\pi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\alpha^j \sin^{2j}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2j-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2j}\alpha^j\left[1+\frac{1}{2}\frac{2j+1}{2j+2}\alpha^2+\frac{1\cdot3\cdot(2j+1)(2j+3)}{2\cdot4\cdot(2j+2)(2j+4)}\alpha^4+\ldots\right].$$

Правая часть этого выражения равносильна $\frac{1}{2}b_{1/2}^{(j)}$, как можно усмотреть из (42). Поэтому

$$b_{1/2}^{(j)}=\frac{2}{\pi}\alpha^j\int_0^\pi \frac{\sin^{2j}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta=\frac{4}{\pi}\alpha^j\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2j}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta. \tag{43}$$

Уравнение (43) можно использовать для вычисления $b_{1/2}^{(j)}$ при помощи гармонического анализа. Кроме того, (43) можно обобщить, получая

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}=\frac{2s(2s+2)\ldots(2s+2j-2)}{1\cdot3\ldots(2j-1)}\frac{\alpha^j}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^\pi\left[\frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}+\alpha\cos\theta}{1-\alpha^2}\right]^{2s-1}\frac{\sin^{2j}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta. \tag{44}$$

Для частных случаев, когда j равно нулю или единице, имеем

$$b_{1/2}^{(0)}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}},$$

$$b_{1/2}^{(1)}=\frac{4}{\pi}\alpha\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{1}{\alpha}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}-\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta\right]. \tag{45}$$

Оба определенных интеграла в выражениях (45) являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода. Если мы обозначим их через F_1 и E_1, то

$$b_{1/2}^{(0)}=\frac{4}{\pi}F_1,\quad b_{1/2}^{(1)}=\frac{4}{\pi}\,\frac{F_1-E_1}{\alpha}.$$

Коэффициенты $b_s^{(j)}$ для любого частного значения α связаны друг с другом рекуррентными формулами, хотя и не конечными. Дифференцируя выражение (41) и умножая после этого на z, мы получаем

$$s\alpha(z-z^{-1})[1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2]^{-(s+1)}=\frac{1}{2}\sum jb_s^{(j)}z^j. \tag{46}$$

Если это выражение умножить на $1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2$, то, согласно (41), получается

$$s\alpha(z-z^{-1})\sum b_s^{(j)}z^j=[1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2]\sum jb_s^{(j)}z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{j-1} в обеих частях, мы имеем

$$s\alpha(b_s^{(j-2)}-b_s^{(j)})=(j-1)(1+\alpha^2)b_s^{(j-1)}-\alpha(j-2)b_s^{(j-2)}-j\alpha b_s^{(j)},$$

откуда

$$b_s^{(j)}=\frac{j-1}{j-s}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)b_s^{(j-1)}-\frac{j+s-2}{j-s}b_s^{(j-2)}. \tag{47}$$

Поэтому $b_s^{(j)}$ выражается через два коэффициента, непосредственно предшествующие ему в ряде, откуда вытекает, что если известны $b_s^{(0)}$ и $b_s^{(1)}$, то и весь ряд коэффициентов может быть последовательно определен. Однако эта процедура обладает недостатком, состоящим в том, что поскольку коэффициент $b_s^{(j)}$ уменьшается с ростом j, то последовательные значения коэффициентов становятся все менее точными. Это затруднение можно преодолеть, вычисляя сначала коэффициенты $b_s^{(j)}$ и $b_s^{(j-2)}$ для самых больших нужных значений j, а затем используя последовательно эту формулу для получения $b_s^{(j-2)}$, $b_s^{(j-3)}$, ... вплоть до коэффициента $b_s^{(0)}$. Другой путь преодоления этой трудности состоит в следующем. Обозначим множитель, на который необходимо умножить коэффициент $b_s^{(j-1)}$, чтобы получить $b_s^{(j)}$, через $p_s^{(j)}$. Тогда (47) можно написать в следующем виде:

$$p_s^{(j)}=\frac{j-1}{j-s}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{j+s-2}{j-s}\,\frac{1}{p_s^{(j-1)}}. \tag{48}$$

Теперь положим

$$F_s^{(j)}=\frac{j+s-1}{j}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2},\qquad p_s^{(j)}=F_s^{(j)}\gamma_s^{(j)}.$$

В таком случае уравнение (48) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{j+s-1}{j}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,\gamma_s^{(j)}=\frac{j-1}{j-s}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\gamma_s^{(j-1)}}\right),$$

или

$$\frac{(j-s)(j+s-1)}{j(j-1)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2\gamma_s^{(j)}=1-\frac{1}{\gamma_s^{(j-1)}}.$$

Полагая

$$\lambda_s^{(j)}=\frac{(j-s)(j+s-1)}{j(j-1)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2,$$

мы получаем

$$\gamma_s^{(j-1)}=\frac{1}{1-\lambda_s^{(j)}\gamma_s^{(j)}}. \tag{49}$$

Поэтому, исходя из значения $\gamma_s^{(j)}$ для самого большого значения j, которое мы должны рассмотреть, мы получим последовательным применением уравнения (49) значения всех величин γ_s от $\gamma_s^{(j)}$ назад до $\gamma_s^{(1)}$, а при помощи уравнения $p_s^{(j)}=F_s^{(j)}\gamma_s^{(j)}$ — значения всех величин p_s от $p_s^{(j)}$ до $p_s^{(1)}$ и, наконец, значения b_s — из следующих уравнений:

$$b_s^{(1)}=b_s^{(0)}p_s^{(1)},\quad b_s^{(2)}=b_s^{(0)}p_s^{(1)}p_s^{(2)},\quad b_s^{(3)}=b_s^{(0)}p_s^{(1)}p_s^{(2)}p_s^{(3)}\quad \text{и т. д.}$$

Можно показать, что величина $\gamma_s^{(j)}$ для наибольшего требуемого значения j определяется следующей непрерывной дробью:

$$\gamma_s^{(j)}=\cfrac{1+\alpha^2}{1-\cfrac{a\alpha^2}{1-\cfrac{b\alpha^2}{1-\cfrac{c\alpha^2}{1-\cfrac{d\alpha^2}{\dots}}}}}, \tag{50}$$

где

$$a=\frac{s(1-s)}{j(j+1)}, \qquad b=\frac{(j+s)(j+1-s)}{(j+1)(j+2)},$$
$$c=\frac{(s+1)(2-s)}{(j+2)(j+3)}, \qquad d=\frac{(j+s+1)(j+2-s)}{(j+3)(j+4)} \quad \text{и т. д.}$$

Когда j очень велико, непрерывная дробь (50) сходится быстро; для бесконечно большого j мы имеем $\gamma_s^{(\infty)}=1+\alpha^2$, откуда при j бесконечно большом $b_s^{(j)}/b_s^{(j-1)}=\alpha$. Легко проверить числовое значение, полученное для $\gamma_s^{(j)}$, перевычисляя его с учетом еще одного члена в разложении (50). Если величина $\gamma_s^{(j)}$ при этом не изменится, то она вычислена достаточно точно.

Удобный метод вычисления $b_{1/2}^{(0)}$ может быть получен следующим образом. Преобразование, известное как преобразование Ландена, имеет следующий вид:

$$\cos\theta=\alpha\sin^2\theta'+\cos\theta'\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}. \tag{51}$$

Возводя в квадрат обе части и вычитая результат из единицы, получаем

$$\sin^2\theta=\sin^2\theta'\left(1-\alpha^2\sin^2\theta'+\alpha^2\cos^2\theta'-2\alpha\cos\theta'\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}\right),$$

откуда

$$\sin\theta=\sin\theta'\left(\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}-\alpha\cos\theta'\right). \tag{52}$$

Если допустить, что радикалы в (51) и (52) необходимо брать с положительным знаком, то очевидно, что θ и θ' могут быть вместе равны нулю и, возрастая, вместе достигают π и 2π. Из формулы (51) имеем

$$1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2=1+\alpha^2-2\alpha^2\sin^2\theta'-2\alpha\cos\theta'\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'},$$

откуда следует

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}=\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}-\alpha\cos\theta'. \tag{53}$$

Здесь оба радикала снова должны быть взяты положительными. Дифференцируя соотношение (53) и деля результат на (52), получаем

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}=\frac{d\theta'}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}}, \tag{54}$$

откуда мы находим

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}=\int\frac{d\theta'}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta'}}, \tag{55}$$

причем в обоих интегралах пределами являются 0 и π либо 0 и 2π. Подставляя

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2},$$

можно написать формулу (55) в следующем виде:

$$\int\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\alpha)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(1+\alpha)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\int\frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2\theta'+(1-\alpha^2)\sin^2\theta'}}.$$

Подставим в левой части 2θ вместо θ, а затем $\pi/2-\theta$ вместо θ; тогда в результате получится

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1+\alpha)^2\cos^2\theta+(1-\alpha)^2\sin^2\theta}}=\int \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2\theta'+(1-\alpha^2)\sin^2\theta'}}. \tag{56}$$

Теперь, если мы положим $m=1+\alpha$, $n=1-\alpha$, то

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta}}=\int \frac{d\theta'}{\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\cos^2\theta'+mn\sin^2\theta'}}. \tag{57}$$

Это уравнение указывает правило вычисления полного эллиптического интеграла первого рода посредством арифметически-геометрического среднего. Правую часть можно рассматривать как преобразованную форму левой. Это преобразование можно повторять снова и снова, получая в результате ряд из коэффициентов при $\cos^2\theta$ и $\sin^2\theta$, быстро стремящихся к равенству между собой. Изменения, которые испытывают m и n, имеют следующий характер:

$$m=m,\quad m'=\frac{m+n}{2},\quad m''=\frac{m'+n'}{2},\quad m'''=\frac{m''+n''}{2},\ \ldots,$$
$$n=n,\quad n'=\sqrt{mn},\quad n''=\sqrt{m'n'},\quad n'''=\sqrt{m''n''},\ \ldots.$$

Пусть μ означает общий предел, к которому стремятся обе эти величины; тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{\mu}. \tag{58}$$

Символ $M(m, n)$ часто используется для обозначения величины μ. В таком случае, согласно (43), имеем

$$b_{1/2}^{(0)}=\frac{2}{M(1,\sqrt{1-\alpha^2})}. \tag{59}$$

Аналогичным путем можно вывести следующее выражение:

$$b_{1/2}^{(1)}=\frac{\alpha^2+2(m'^2-n'^2)+4(m''^2-n''^2)+8(m'''^2-n'''^2)+\ldots}{\alpha\mu}. \tag{60}$$

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для вычисления коэффициентов $b_{1/2}^{(j)}$ для любого значения j. Обращаясь затем к другим значениям s, мы можем написать уравнение (46) в следующем виде:

$$s\alpha(z-z^{-1})\sum b_{s+1}^{(j)}z^j=\sum jb_s^{(j)}z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^j в этом уравнении, получаем

$$jb_s^{(j)}=s\alpha\,[b_{s+1}^{(j-1)}-b_{s+1}^{(j+1)}]. \tag{61}$$

Эта формула выражает коэффициент $b_s^{(j)}$ через два коэффициента, принадлежащие ряду, в котором s больше единицы. Эти два коэффициента не являются последовательными, однако, исключая коэффициент $b_{s+1}^{(j+1)}$ подстановкой его значения, вычисленного по формуле (47), получим

$$b_s^{(j)}=\frac{s}{j-s}\,[2\alpha b_{s+1}^{(j-1)}-(1+\alpha^2)\,b_{s+1}^{(j)}]. \tag{62}$$

Однако удобнее выразить b_{s+1} через b_s. Перегруппировав члены в уравнении (62) и полагая $1+j$ вместо j, мы находим

$$2\alpha b_{s+1}^{(j-1)} = (1+\alpha^2) b_{s+1}^{(j)} + \frac{j-s}{s} b_s^{(j)},$$

$$(1+\alpha^2) b_{s+1}^{(j+1)} = 2\alpha b_{s+1}^{(j)} - \frac{j-s+1}{s} b_s^{(j+1)},$$

и если мы положим $j+1$ вместо j и $s+1$ вместо s в уравнении (47), то мы получим

$$b_{s+1}^{(j+1)} = \frac{j(1+\alpha^2) b_{s+1}^{(j)} - (j+s)\alpha b_{s+1}^{(j-1)}}{(j-s)\alpha}.$$

Исключая $b_{s+1}^{(j+1)}$ и $b_{s+1}^{(j-1)}$ из этих трех последних уравнений, мы получаем

$$b_{s+1}^{(j)} = \frac{(j+s)(1+\alpha^2) b_s^{(j)} - 2(j-s+1)\alpha b_s^{(j+1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{63}$$

Может оказаться более выгодным иметь в этой формуле коэффициент $b_s^{(j-1)}$ вместо $b_s^{(j+1)}$. Полагая $-j$ вместо j, получаем следующее выражение:

$$b_{s+1}^{(j)} = \frac{(s-j)(1+\alpha^2) b_s^{(j)} + 2(j+s-1)\alpha b_s^{(j-1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{64}$$

Из этого выражения находим

$$b_{s+1}^{(j+1)} = \frac{2(j+s)\alpha b_s^{(j)} - (j-s+1)(1+\alpha^2) b_s^{(j+1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{65}$$

Беря сумму и разность уравнений (63) и (65), мы получаем формулы, которые лучше приспособлены для вычислений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}\right) &= \frac{(j+s) b_s^{(j)} - (j-s+1) b_s^{(j+1)}}{2s(1-\alpha)^2}, \\ \frac{1}{2}\left(b_{s+1}^{(j)} - b_{s+1}^{(j+1)}\right) &= \frac{(j+s) b_s^{(j)} + (j-s+1) b_s^{(j+1)}}{2s(1+\alpha)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

§ 8. Производные от коэффициентов Лапласа. Производные от коэффициентов Лапласа по α входят в буквенное разложение возмущающей функции. В тех случаях, когда α очень мало́, можно воспользоваться для вычисления коэффициентов $b_s^{(j)}$ рядом (42), записанным в следующем виде:

$$b_s^{(j)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k \alpha^{j+2k}.$$

Отсюда мы получаем непосредственно

$$\alpha \frac{db_s^{(j)}}{d\alpha} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (j+2k) A_k \alpha^{j+2k},$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_s^{(j)}}{d\alpha^2} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (j+2k)(j+2k-1) A_k \alpha^{j+2k} \quad \text{и т. д.}$$

Однако α часто является настолько большим, что эти ряды сходятся крайне медленно. В таких случаях лучше вычислять производные прямо по коэффициентам Лапласа. Дифференцируя уравнение (41) по α, получаем

$$s(z+z^{-1}-2\alpha)[1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2]^{-(s+1)}=\frac{1}{2}\sum\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}z^j,$$

или

$$s(z+z^{-1}-2\alpha)\sum b_{s+1}^{(j)}z^j=\sum\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^j, находим следующее уравнение:

$$\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}=s\left[b_{s+1}^{(j-1)}-2\alpha b_{s+1}^{(j)}+b_{s+1}^{(j+1)}\right]. \tag{67}$$

Коэффициенты b_{s+1} в этом уравнении могут быть заменены коэффициентами b_s. Из уравнения (61) находим, что

$$b_{s+1}^{(j-1)}=b_{s+1}^{(j+1)}+\frac{j}{s\alpha}b_s^{(j)}.$$

Подставляя это уравнение в (67), находим

$$\alpha\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}=jb_s^{(j)}+2s\alpha\left[b_{s+1}^{(j+1)}-\alpha b_{s+1}^{(j)}\right]. \tag{68}$$

Исключая $b_{s+1}^{(j+1)}$ и $b_{s+1}^{(j)}$ посредством их значений, определяемых соотношениями (63) и (65), получаем

$$\alpha\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}=\frac{[j+(j+2s)\alpha^2]\,b_s^{(j)}-2(j-s+1)\,\alpha b_s^{(j+1)}}{1-\alpha^2}. \tag{69}$$

Изменение знака j в этом уравнении дает

$$\alpha\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}=\frac{2(j+s-1)\,\alpha b_s^{(j-1)}-[j+(j-2s)\alpha^2]\,b_s^{(j)}}{1-\alpha^2}. \tag{70}$$

Из (67) получаем следующее уравнение:

$$\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}-\frac{db_s^{(j-2)}}{d\alpha}=-s\left[b_{s+1}^{(j-1)}-b_{s+1}^{(j+1)}+b_{s+1}^{(j-3)}-2\alpha\left(b_{s+1}^{(j-2)}-b_{s+1}^{(j)}\right)\right].$$

При помощи уравнения (61) коэффициенты b_{s+1} в этом уравнении можно заменить коэффициентами b_s:

$$\alpha\left(\frac{db_s^{(j)}}{d\alpha}-\frac{db_s^{(j-2)}}{d\alpha}\right)=-(j-2)\,b_s^{(j-2)}+2(j-1)\,\alpha b_s^{(j-1)}-jb_s^{(j)}. \tag{71}$$

Посредством уравнения (71) представляется возможным определить $db_s^{(j)}/d\alpha$, когда известны $db_s^{(0)}/d\alpha$ и $db_s^{(1)}/d\alpha$. Но уравнения (69) и (70) дают

$$\alpha\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}=\frac{2s\alpha^2b_s^{(0)}+2(s-1)\,\alpha b_s^{(1)}}{1-\alpha^2}, \tag{72}$$

$$\alpha\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}=\frac{2s\alpha b_s^{(0)}+[(2s-1)\,\alpha^2-1]\,b_s^{(1)}}{1-\alpha^2}. \tag{73}$$

Дифференцируя уравнение (71) $p-1$ раз по α, получим ряд формул следующего типа:

$$\alpha^p\left(\frac{d^pb_s^{(j)}}{d\alpha^p}-\frac{d^pb_s^{(j-2)}}{d\alpha^p}\right)=-(j+p-1)\,\alpha^{p-1}\frac{d^{p-1}b_s^{(j)}}{d\alpha^{p-1}}-(j-p-1)\,\alpha^{p-1}\times$$
$$\times\frac{d^{p-1}b_s^{(j-2)}}{d\alpha^{p-1}}+2(j-1)\left[\alpha^p\frac{d^{p-1}b_s^{(j-1)}}{d\alpha^{p-1}}+(p-1)\,\alpha^{p-1}\frac{d^{p-2}b_s^{(j-1)}}{d\alpha^{p-2}}\right]. \tag{74}$$

Записывая в уравнении (74) $p+1$ вместо p, мы получаем уравнение, которое дает различные производные от $b_s^{(j)}$ через производные от $b_s^{(0)}$ и $b_s^{(1)}$.

В том случае, когда $s={}^1/_2$, уравнения (72) и (73) принимают вид

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}=\alpha b_{1/2}^{(0)}-b_{1/2}^{(1)},\quad \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha}=\alpha\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}. \tag{75}$$

Дифференцируя первое уравнение (75) и исключая после этого коэффициент $b_{1/2}^{(0)}$ и его производную при помощи обоих уравнений, находим следующее уравнение:

$$\alpha^2(1-\alpha^2)\frac{d^2b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2}=(3\alpha^2-1)\,\alpha\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}+b_{1/2}^{(1)}. \tag{76}$$

Если уравнение (76) продифференцировать $p-1$ раз, то получится уравнение следующего типа:

$$\alpha^{p+1}(1-\alpha^2)\frac{d^{p+1}b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^{p+1}}=\alpha^2\left[(3p+1)\,\alpha^p\frac{d^pb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p}+(3p^2-p-1)\,\alpha^{p-1}\frac{d^{p-1}b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^{p-1}}+\right.$$
$$\left.+p^2(p-2)\,\alpha^{p-2}\frac{d^{p-2}b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^{p-2}}\right]-(p+1)\,\alpha^p\frac{d^pb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p}. \tag{77}$$

Из второго уравнения (75) выводим уравнение вида

$$\alpha^p\frac{d^pb_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^p}=\alpha\left[\alpha^p\frac{d^pb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p}+(p-1)\,\alpha^{p-1}\frac{d^{p-1}b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^{p-1}}\right]. \tag{78}$$

Полагая j равным нулю, получаем из уравнения (66) следующие уравнения:

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)\,(b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)})&=b_s^{(0)}+\frac{s-1}{s}\,b_s^{(1)},\\(1+\alpha^2)\,(b_{s+1}^{(0)}-b_{s+1}^{(1)})&=b_s^{(0)}-\frac{s-1}{s}\,b_s^{(1)}\end{aligned} \tag{79}$$

и, дифференцируя их p раз, находим

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2\frac{d^p}{d\alpha^p}(b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)})&=2p(1-\alpha)\frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}}(b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)})-\\&-p(p-1)\frac{d^{p-2}}{d\alpha^{p-2}}(b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)})+\frac{d^pb_s^{(0)}}{d\alpha^p}+\frac{s-1}{s}\frac{d^pb_s^{(1)}}{d\alpha^p},\\(1+\alpha)^2\frac{d^p}{d\alpha^p}(b_{s+1}^{(0)}-b_{s+1}^{(1)})&=-2p(1+\alpha)\frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}}(b_{s+1}^{(0)}-b_{s+1}^{(1)})-\\&-p(p-1)\frac{d^{p-2}}{d\alpha^{p-2}}(b_{s+1}^{(0)}-b_{s+1}^{(1)})+\frac{d^pb_s^{(0)}}{d\alpha^p}-\frac{s-1}{s}\frac{d^pb_s^{(1)}}{d\alpha^p}.\end{aligned} \tag{80}$$

Этих уравнений достаточно, чтобы определить столько производных от коэффициентов $b_s^{(j)}$, сколько потребуется.

Следует заметить, что в разложении возмущающей функции k-я производная от $b_{1/2}^{(j)}$ всегда умножается на α^k, k-я производная от $b_{3/2}^{(j)}$ — на α^{k+1} и т. д. Если $f(\alpha)$ — некоторая функция от α, то

$$\alpha\frac{df}{d\alpha}=\frac{df}{d\ln\alpha}.$$

Формулы и вычисления несколько упрощаются, если мы условимся всегда дифференцировать по $\ln\alpha$ вместо α. Обозначая k-ю производную по α через D_α^k и k-ю производную по $\ln\alpha$ через D^k, можно любую линейную функцию от $\alpha^j D_\alpha^j$ преобразовать в линейную функцию от D^j по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\alpha D_\alpha &= D,\\
\alpha^2 D_\alpha^2 &= -D + D^2,\\
\alpha^3 D_\alpha^3 &= 2D - 3D^2 + D^3,\\
\alpha^4 D_\alpha^4 &= -6D + 11D^2 - 6D^3 + D^4,\\
\alpha^5 D_\alpha^5 &= 24D - 50D^2 + 35D^3 - 10D^4 + D^5,
\end{aligned}$$

которые могут быть продолжены по следующему правилу. Обозначив абсолютную величину коэффициента при D^j в уравнении для $\alpha^k D_\alpha^k$ через $A_{j,k}$, получаем

$$A_{j,k} = (k-1)A_{j,k-1} + A_{j-1,k-1}.$$

Заметим, что знаки в столбцах чередуются.

Обратно, любая линейная функция от D^j может быть преобразована в линейную функцию от D_α^j по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
D &= \alpha D_\alpha,\\
D^2 &= \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2,\\
D^3 &= \alpha D_\alpha + 3\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^3 D_\alpha^3,\\
D^4 &= \alpha D_\alpha + 7\alpha^2 D_\alpha^2 + 6\alpha^3 D_\alpha^3 + \alpha^4 D_\alpha^4,\\
D^5 &= \alpha D_\alpha + 15\alpha^2 D_\alpha^2 + 25\alpha^3 D_\alpha^3 + 10\alpha^4 D_\alpha^4 + \alpha^5 D_\alpha^5,
\end{aligned}$$

которые могут быть неограниченно продолжены по следующему правилу. Обозначим коэффициент при $\alpha^j D_\alpha^j$ в уравнении для D^k через $B_{j,k}$, получим

$$B_{j,k} = jB_{j,k-1} + B_{j-1,k-1}.$$

Замечания. Литература

Первое буквенное разложение возмущающей функции до третьего порядка относительно эксцентриситетов и наклонности было дано Лапласом в его «Небесной механике». Понтекулан (De Pontécoulant, Systéme du Monde) продолжил это разложение до шестого порядка. Разложение до шестого порядка было опубликовано Пирсом (Peirce, Astron. J., 1, 1, 1849). Леверрье в первом томе Анналов Парижской обсерватории довел разложение до членов седьмого порядка, приводя значения всех коэффициентов в явном виде.

Чисто численное разложение, в которое в буквенном виде входят только независимые переменные, впервые было применено Ганзеном в его премированном мемуаре о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна. В форме, когда в качестве независимых переменных используются эксцентрические аномалии, оно впервые было указано Коши и применено Ганзеном к возмущениям малых планет, причем первое приложение было сделано к астероиду Эгерия («Auseinandersetzung einer Zweckmäßigen Methode zur Berechnung der Absoluten Störungen der Kleinen Planeten»). Дальнейшая модификация, изложенная в этой главе, когда используется средняя аномалия одной планеты и эксцентрическая аномалия другой, была применена Хиллом в его теории Юпитера и Сатурна (Astron. Papers Amer. Ephemeris, 4, 1890). Ньюком (Astron. Papers, 3, 1—200, 1891) дает символическое буквенное разложение по эксцентрическим аномалиям с точностью до шестого порядка, которое применяет в своих теориях движения четырех внутренних планет в этом же томе. В пятом томе он дает аналогичное разложение по средним аномалиям, которое и применяет для вычисления вековых возмущений четырех внутренних планет в этом же томе.

Численное разложение, приведенное в разд. 2, опубликовано Брауэром (Astron. J., 52, 64, 1946). Первое применение этого разложения к Марсу и Земле было дано Клеменсом (Astron. Papers, 11, pt. II, 1949).

Многочисленные рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа и их производными даны Цейпелем (Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. VI, 2, 1. Hälfte, 1912, SS. 557—663).

Лучшими таблицами коэффициентов Лапласа являются таблицы Рэнкла (Smithson. Contr. Knowledge, 9, Appendix, 1856) и Брауна и Брауэра (Trans. Astron. Obs. Yale Univ., 6, 5, 69—157, 1932). Рэнкл дает также производные по α.