Глава XVI

ВЕКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

1. Введение. В предыдущих главах мы видели, что в тех случаях, когда возмущенные координаты планеты разлагаются общепринятым способом по степеням возмущающих масс, выражения первого порядка для координат содержат несколько смешанных вековых членов, т. е. периодических членов, умноженных на время, вида $kt \cos \theta$, $kt \sin \theta$.

Кроме того, если используется метод вариации произвольных постоянных, то выражения первого порядка для элементов орбиты, за исключением большой полуоси, содержат члены, пропорциональные времени. Если разложения проведены до членов второго порядка, то появляются члены, умноженные на квадрат времени. Эта прогрессия продолжается неограниченно, так как с каждым последовательным приближением появляется более высокая степень времени.

Появление такого рода вековых и смешанных вековых членов не вызвано каким-либо особым свойством, присущим уравнениям движения, а представляет собой следствие принятого метода интегрирования. В теории движения спутника значения движений перигея и узла вводятся с самого начала процесса интегрирования и исправляются при последовательных приближениях. При таком способе вычислений мы не допускаем появления времени в коэффициентах периодических членов. В теории движения планет положение является гораздо более сложным. Кроме того, те выражения, которые понадобились бы для представления решения в форме, напоминающей решение основной задачи в теории движения Луны, оказались бы очень громоздкими из-за медленной сходимости разложения в ряд возмущающей функции по степеням отношений больших осей.

Присутствие времени в коэффициентах возмущений при изучении движения планет не препятствует построению планетных теорий, годных в течение многих столетий, хотя такое представление движений и непригодно для бесконечно большого промежутка времени. Тот факт, что эта общепринятая форма имеет практическое значение в теории движения планет, тогда как она была бы совершенно непригодной в теории движения Луны, объясняется тем, что вековые изменения элементов планетных орбит примерно в тысячу раз медленнее вековых изменений элементов орбиты Луны.

Тем не менее представляется возможным изучить некоторые характерные особенности планетных орбит в отдаленном прошлом и будущем, упрощая эту задачу коренным образом. Такой метод впервые был разработан Лагранжем.

2. Вековая часть возмущающей функции. Применение метода Лагранжа для определения вековых возмущений требует, чтобы возмущающая функция была ограничена своей вековой частью, т. е. чтобы все периодические члены, которые в своих аргументах содержат средние долготы (или средние аномалии) планет, были отброшены. Кроме того, решение в первом приближении ограничивается включением тех членов вековой части, которые имеют второй порядок относительно эксцентриситетов и наклонностей.

Упрощающая особенность заключается в том, что непрямой член возмущающей функции не содержит вековых членов. Чтобы доказать это, рассмотрим взаимные возмущения двух планет с массами m_1, m_2 и гелиоцентрическими координатами x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2. Непрямой член возмущающей функции в уравнениях движения планеты m_1 имеет вид

$$R_{1i} = -k^2 m_2 \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3}.$$

Если в этом соотношении координаты планеты m_2 выражены через среднюю аномалию l_2 и постоянные интегрирования, то они будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{k^2(m_0+m_2)\,x_2}{r_2^3} = -\frac{d^2x_2}{dt^2} = -n_2^2\frac{\partial^2 x_2}{\partial l_2^2}$$

с аналогичным соотношением для y_2 и z_2. Поэтому

$$R_{1i} = \frac{m_2 n_2^2}{m_0+m_2}\left(x_1\frac{\partial^2 x_2}{\partial l_2^2} + y_1\frac{\partial^2 z_2}{\partial l_2^2} + z_1\frac{\partial^2 z_2}{\partial l_2^2}\right) =$$

$$= \frac{m_2 n_2}{m_0+m_2}\,\frac{\partial^2}{\partial l_2^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2).$$

Теперь выражение $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ можно разложить в двойной ряд Фурье по средним аномалиям l_1, l_2. После дифференцирования по l_2 остаются только члены, содержащие в аргументах l_2. Таким образом, непрямой член возмущающей функции не может содержать каких-либо вековых членов.

Поэтому мы можем ограничиться при разложении возмущающей функции разложением вековой части обратной величины взаимного расстояния между двумя планетами. Полагая $\alpha = a_1/a_2 < 1$, мы можем написать с точностью до членов второго порядка относительно эксцентриситетов и взаимной наклонности следующее выражение:

$$\frac{a_2}{\Delta_{12}} = \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)} + \frac{1}{4}(e_1^2+e_2^2)\left[\alpha\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2}\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{J} +$$
$$+\frac{1}{2}e_1e_2\cos(\Pi_1-\Pi_2)\left[b_{1/2}^{(1)} - \alpha\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2}\right], \qquad (1)$$

в котором использованы обозначения гл. XV.

Если i_1, i_2, θ_1, θ_2 — наклонности и узлы, отнесенные к произвольной неподвижной системе отсчета, то

$$\cos\mathcal{J} = \cos i_1\cos i_2 + \sin i_1\sin i_2\cos(\theta_1-\theta_2),$$

откуда с точностью до членов второго порядка имеем

$$4\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{Y}=\operatorname{tg}^2 i_1+\operatorname{tg}^2 i_2-2\operatorname{tg} i_1\operatorname{tg} i_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

Согласно формулам гл. XV, имеем также

$$\alpha\frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha}+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2}=\frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)},$$

$$b_{1/2}^{(1)}-\alpha\frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}-\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2}=-\frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(2)}.$$

Таким образом, если мы положим

$$a_2N_{12}=\frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)},\quad a_2P_{12}=\frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(2)},$$

то мы можем написать

$$\frac{1}{\Delta_{12}}=\frac{1}{2a_2}b_{1/2}^{(0)}+N_{12}[e_1^2+e_2^2-\operatorname{tg}^2 i_1-\operatorname{tg}^2 i_2+2\operatorname{tg} i_1\operatorname{tg} i_2\cos(\theta_1-\theta_2)]-$$
$$-2P_{12}e_1e_2\cos(\Pi_1-\Pi_2). \tag{2}$$

Поскольку эксцентриситеты и наклонности в отдаленные эпохи могут обратиться (и в некоторых случаях действительно обращаются) в нуль, так что перигелии и узлы становятся неопределенными, то в это выражение лучше подставить

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_1&=e_1\sin\Pi_1, & \mathrm{p}_1&=\operatorname{tg} i_1\sin\theta_1,\\ \mathrm{k}_1&=e_1\cos\Pi_1, & \mathrm{q}_1&=\operatorname{tg} i_1\cos\theta_1 \end{aligned} \tag{3}$$

и соответствующие соотношения для второй планеты. Тогда

$$\frac{1}{\Delta_{12}}=\frac{1}{2a_2}b_{1/2}^{(0)}+N_{12}[\mathrm{h}_1^2+\mathrm{k}_1^2+\mathrm{h}_2^2+\mathrm{k}_2^2-\mathrm{p}_1^2-\mathrm{q}_1^2-\mathrm{p}_2^2-\mathrm{q}_2^2+$$
$$+2(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2+\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2)]-2P_{12}(\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2+\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2). \tag{4}$$

Коэффициенты N_{12} и P_{12} являются функциями от a_1 и a_2 степени -1.

Уравнения (21) гл. XI показывают, что $da/dt=0$, если возмущающая функция ограничена своей вековой частью. Если отбрасываются степени e и $\operatorname{tg} i$ выше второй, то уравнения (24) и (25) указанной главы можно применить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{h}_1}{dt}&=+\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\mathrm{k}_1}, & \frac{d\mathrm{p}_1}{dt}&=+\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\mathrm{q}_1},\\ \frac{d\mathrm{k}_1}{dt}&=-\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\mathrm{h}_1}, & \frac{d\mathrm{q}_1}{dt}&=-\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\mathrm{p}_1},\\ \frac{d\mathrm{h}_2}{dt}&=+\frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial\mathrm{k}_2}, & \frac{d\mathrm{p}_2}{dt}&=+\frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial\mathrm{q}_2},\\ \frac{d\mathrm{k}_2}{dt}&=-\frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\partial R_2}{d\mathrm{h}_2}, & \frac{d\mathrm{q}_2}{dt}&=-\frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial\mathrm{p}_2}, \end{aligned} \tag{5}$$

а интегрирование уравнений для ε_1, ε_2 можно отложить до тех пор, пока не будут проинтегрированы уравнения (5). Для этих последних уравнений можно отбросить первый член выражения (4), так как он зависит только от a_1, a_2. Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} R_1&=\mathrm{f}m_2[N_{12}(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2+\mathrm{k}_1^2+\mathrm{k}_2^2)-2P_{12}(\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2+\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2)]+\\ &+\mathrm{f}m_2N_{12}(-\mathrm{p}_1^2-\mathrm{p}_2^2-\mathrm{q}_1^2-\mathrm{q}_2^2+2\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2+2\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2) \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$R_2 = \frac{m_1}{m_2} R_1.$$

В этих выражениях символом f обозначена постоянная k^2, для того чтобы избежать путаницы с переменной k.

Форма выражения (6) показывает, что уравнения (5) распадаются на две независимые системы — одну систему для переменных h, k и одну систему для переменных p, q. Это разделение на две системы является следствием ограничения R_1, R_2 членами второй степени относительно этих переменных. При более полном разложении R, включающем члены четвертой степени, такое разделение переменных было бы невозможно.

3. Решение для двух планет. При помощи выражений (6) уравнения (5) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= +(1,\ 1)\,k_1 - [1,\ 2]\,k_2,\\
\frac{dh_2}{dt} &= -[2,\ 1]\,k_1 + (2,\ 2)\,k_2,\\
\frac{dk_1}{dt} &= -(1,\ 1)\,h_1 + [1,\ 2]\,h_2,\\
\frac{dk_2}{dt} &= +[2,\ 1]\,h_1 - (2,\ 2)\,h_2,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -(1,\ 1)\,q_1 + (1,\ 2)\,q_2,\\
\frac{dp_2}{dt} &= +(2,\ 1)\,q_1 - (2,\ 2)\,q_2,\\
\frac{dq_1}{dt} &= +(1,\ 1)\,p_1 - (1,\ 2)\,p_2,\\
\frac{dq_2}{dt} &= -(2,\ 1)\,p_1 + (2,\ 2)\,p_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
(1,\ 1) &= \frac{2fm_2N_{12}}{n_1a_1^2}, & [2,\ 1] &= \frac{2fm_1P_{21}}{n_2a_2^2},\\
[1,\ 2] &= \frac{2fm_2P_{12}}{n_1a_1^2}, & (2,\ 2) &= \frac{2fm_1N_{21}}{n_2a_2^2},\\
(1,\ 2) &= \frac{2fm_2N_{12}}{n_1a_1^2}, & (2,\ 1) &= \frac{2fm_1N_{21}}{n_2a_2^2}
\end{aligned}$$

и $N_{12} = N_{21}$, $P_{12} = P_{21}$.

Эти уравнения представляют собой две системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые могут быть проинтегрированы при помощи известного метода введения показательных функций в качестве частных решений. Однако выгодно сделать преобразование переменных, чтобы привести определитель из коэффициентов к симметричному виду.

Пусть

$$\begin{aligned}
H_1 &= \psi_1 h_1, & K_1 &= \psi_1 k_1, & P_1 &= \psi_1 p_1, & Q_1 &= \psi_1 q_1,\\
H_2 &= \psi_2 h_2, & K_2 &= \psi_2 k_2, & P_2 &= \psi_2 p_2, & Q_2 &= \psi_2 q_2.
\end{aligned}$$

Тогда уравнения в переменных H и P принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= +(1,\,1)\,K_1 - \frac{\psi_1}{\psi_2}[1,\,2]K_2, \\ \frac{dH_2}{dt} &= -\frac{\psi_2}{\psi_1}[2,\,1]K_1 + (2,\,2)\,K_2, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= -(1,\,1)\,Q_1 + \frac{\psi_1}{\psi_2}(1,\,2)\,Q_2, \\ \frac{dP_2}{dt} &= +\frac{\psi_2}{\psi_1}(2,\,1)\,Q_1 - (2,\,2)\,Q_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения для переменных K и Q могут быть написаны путем замены K на $-H$, Q на $-P$ в правых частях, H на K, P на Q в левых частях.

Чтобы получить симметричные определители, мы должны подчинить ψ_1, ψ_2 следующим условиям:

$$\frac{\psi_2}{\psi_1}[2,\,1] = \frac{\psi_1}{\psi_2}[1,\,2],$$

$$\frac{\psi_2}{\varphi_1}(2,\,1) = \frac{\psi_1}{\psi_2}(1,\,2),$$

или

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)^2 = \frac{[1,\,2]}{[2,\,1]} = \frac{(1,\,2)}{(2,\,1)} = \frac{m_2 n_2 a_2^2}{m_1 n_1 a_1^2}.$$

Поэтому

$$\psi_1 = (m_1 n_1)^{1/2} a_1, \quad \psi_2 = (m_2 n_2)^{1/2} a_2 \tag{11}$$

удовлетворяют этим требованиям.

Положим затем

$$(1,\,1) = A_{11} = \frac{2fN_{12}}{a_1^2}\frac{m_2}{n_1},$$

$$(2,\,2) = A_{22} = \frac{2fN_{12}}{a_2^2}\frac{m_1}{n_2},$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\psi_1}{\psi_2}[1,\,2] &= A_{12} \\ -\frac{\psi_2}{\psi_1}[2,\,1] &= A_{21} \end{aligned}\right\} = -\frac{2fP_{12}}{a_1 a_2}\left(\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}\right)^{1/2},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\psi_1}{\psi_2}(1,\,2) &= B_{12} \\ \frac{\psi_2}{\psi_1}(2,\,1) &= B_{21} \end{aligned}\right\} = +\frac{2fN_{12}}{a_1 a_2}\left(\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}\right)^{1/2},$$

$$B_{11} = -A_{11}, \quad B_{22} = -A_{22}.$$

После этих подстановок уравнения для H и K принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= A_{11}K_1 + A_{12}K_2, & \frac{dK_1}{dt} &= -A_{11}H_1 - A_{12}H_2, \\ \frac{dH_2}{dt} &= A_{21}K_1 + A_{22}K_2, & \frac{dK_2}{dt} &= -A_{21}H_1 - A_{22}H_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть частное решение этих уравнений будет

$$H_1 = M_1 \sin(gt + \beta), \quad K_1 = M_1 \cos(gt + \beta),$$

$$H_2 = M_2 \sin(gt + \beta), \quad K_2 = M_2 \cos(gt + \beta).$$

Подстановка в уравнения для H или в уравнения для K дает

$$\begin{aligned}(A_{11}-g)M_1+A_{12}M_2&=0,\\ A_{21}M_1+(A_{22}-g)M_2&=0.\end{aligned}\tag{13}$$

Условие разрешимости получается приравниванием нулю определителя, составленного из коэффициентов, что дает

$$g^2-(A_{11}+A_{22})g+A_{11}A_{22}-A_{12}^2=0.\tag{14}$$

Это уравнение имеет два действительных корня g_1, g_2, которые *положительны* и различны в силу свойств коэффициентов Лапласа.

Поэтому полным решением будет

$$\begin{aligned}\psi_1 h_1&=H_1=M_1^{(1)}\sin(g_1t+\beta_1)+M_1^{(2)}\sin(g_2t+\beta_2),\\ \psi_1 k_1&=K_1=M_1^{(1)}\cos(g_1t+\beta_1)+M_1^{(2)}\cos(g_2t+\beta_2),\\ \psi_2 h_2&=H_2=M_2^{(1)}\sin(g_1t+\beta_1)+M_2^{(2)}\sin(g_2t+\beta_2),\\ \psi_2 k_2&=K_2=M_2^{(1)}\cos(g_1t+\beta_1)+M_2^{(2)}\cos(g_2t+\beta_2),\end{aligned}\tag{15}$$

причем

$$\begin{aligned}\frac{M_2^{(1)}}{M_1^{(1)}}&=\frac{A_{11}-g_1}{-A_{12}}=\frac{-A_{21}}{A_{22}-g_1},\\ \frac{M_2^{(2)}}{M_1^{(2)}}&=\frac{A_{11}-g_2}{-A_{12}}=\frac{-A_{21}}{A_{22}-g_2}.\end{aligned}\tag{16}$$

Постоянными интегрирования являются β_1, β_2 и, например, $M_1^{(1)}$, $M_1^{(2)}$. В таком случае значения $M_2^{(1)}$, $M_2^{(2)}$ определяются отношениями (16).

Уравнения для P и Q имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt}&=+B_{11}Q_1+B_{12}Q_2, & \frac{dQ_1}{dt}&=-B_{11}P_1-B_{12}P_2,\\ \frac{dP_2}{dt}&=+B_{21}Q_1+B_{22}Q_2, & \frac{dQ_2}{dt}&=-B_{21}P_1-B_{22}P_2.\end{aligned}\tag{17}$$

Пусть частным решением будет

$$\begin{aligned}P_1&=L_1\sin(ft+\gamma), & Q_1&=L_1\cos(ft+\gamma),\\ P_2&=L_2\sin(ft+\gamma), & Q_2&=L_2\cos(ft+\gamma).\end{aligned}$$

Подстановка в уравнения для переменных P или в уравнения для Q дает

$$\begin{aligned}(B_{11}-f)L_1+B_{12}L_2&=0,\\ B_{21}L_1+(B_{22}-f)L_2&=0,\end{aligned}\tag{18}$$

или

$$f^2-(B_{11}+B_{22})f+B_{11}B_{22}-B_{12}^2=0.$$

Но

$$B_{11}B_{22}=\frac{4f^2m_1m_2N_{12}^2}{n_1n_2a_1^2a_2^2}=B_{12}^2;$$

следовательно, это уравнение сводится к следующему:

$$f[f-(B_{11}+B_{22})]=0.\tag{19}$$

Поэтому один из корней равен нулю, а второй отрицателен, так как B_{11} и B_{22} оба отрицательны.

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 p_1 &= P_1 = L_1^{(1)} \sin \gamma_1 + L_1^{(2)} \sin (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_1 q_1 &= Q_1 = L_1^{(1)} \cos \gamma_1 + L_1^{(2)} \cos (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_2 p_2 &= P_2 = L_2^{(1)} \sin \gamma_1 + L_2^{(2)} \sin (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_2 q_2 &= Q_2 = L_2^{(1)} \cos \gamma_1 + L_2^{(2)} \cos (f_2 t + \gamma_2), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{L_2^{(1)}}{L_1^{(1)}} &= \frac{-B_{11}}{B_{12}} = \frac{B_{21}}{-B_{22}}, \\ \frac{L_2^{(2)}}{L_1^{(2)}} &= \frac{B_{11}-f_2}{-B_{12}} = \frac{-B_{21}}{B_{22}-f_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Тот факт, что один корень этих уравнений равен нулю, находит динамическое объяснение в том, что возможно решение, при котором плоскости орбит этих двух планет совпадают. В этом случае наклонности и долготы восходящих узлов орбит двух планет одинаковы и не зависят от времени. Поэтому

$$\psi_1^{-1} L_1^{(1)} = \psi_2^{-1} L_2^{(1)},$$

или, что равносильно тому же,

$$L_1 = \psi_1, \quad L_2 = \psi_2$$

должны быть решением уравнений (18) для $f = 0$, что легко проверить.

Постоянными интегрирования в решении относительно величин p и q являются γ_1, γ_2 и $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$. Значения $L_2^{(1)}$, $L_2^{(2)}$ в таком случае получаются при помощи отношений (21).

4. Обобщение решения на любое число планет. Решение, полученное для системы, которая состоит из Солнца и двух планет, легко может быть обобщено на систему, состоящую из Солнца и произвольного числа планет.

Если число планет равно n, то число взаимных расстояний будет равно $\frac{1}{2} n(n-1)$. Обратные величины этих расстояний имеют разложения следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta_{sr}} = \frac{1}{2a_r} b_{1/2}^{(0)} + N_{sr} [h_s^2 + k_s^2 + h_r^2 + k_r^2 - p_s^2 - q_s^2 - p_r^2 - q_r^2 + \\ + 2(p_s p_r + q_s q_r)] - 2P_{sr}(h_s h_r + k_s k_r),$$

где предполагается, что $\alpha = a_s/a_r < 1$.

Уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dh_s}{dt} &= (s, s) k_s - \sum_r [s, r] k_r, \\ \frac{dk_s}{dt} &= -(s, s) h_s + \sum_r [s, r] h_r, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= -(s, s) q_s + \sum_r (s, r) q_r, \\ \frac{dq_s}{dt} &= (s, s) p_s - \sum_r (s, r) p_r, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$(s,\ s)=\sum_r \frac{2fm_r}{n_s a_s^2} N_{sr},$$

$$(s,\ r)=\frac{2fm_r}{n_s a_s^2} N_{sr},$$

$$[s,\ r]=\frac{2fm_r}{n_s a_s^2} P_{sr},$$

причем все суммирования выполняются по r, $1 \leqslant r \leqslant n$, за исключением $r=s$.

Интересно отметить, что в общем решении взаимная наклонность остается постоянной. Это следует из соотношения

$$\begin{aligned}4\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{Y} &= \mathrm{p}_1^2+\mathrm{q}_1^2+\mathrm{p}_2^2+\mathrm{q}_2^2-2(\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2+\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2)=\\ &=\frac{1}{\psi_1^2}(P_1^2+Q_1^2)+\frac{1}{\psi_2^2}(P_2^2+Q_2^2)-\frac{2}{\psi_1\psi_2}(P_1P_2+Q_1Q_2)=\\ &=\left[\frac{L_1^{(2)}}{\psi_1}-\frac{L_2^{(2)}}{\psi_2}\right]^2,\end{aligned}$$

т. е. равно постоянной величине.

Из этого выражения для $\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{Y}$ мы делаем вывод, что решение, в котором $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$ равны нулю, требует, чтобы $\mathcal{Y}=0$. Это подтверждает заключения, сделанные выше, а именно: корень $f=0$ означает, что совпадение плоскостей орбит двух планет представляет возможное решение уравнений.

Если

$$\psi_r=(m_r n_r)^{1/2} a_r,$$

$$H_r=\psi_r \mathrm{h}_r,\qquad K_r=\psi_r \mathrm{k}_r,\qquad A_{ss}=(s,\ s),$$

$$P_r=\psi_r \mathrm{p}_r,\qquad Q_r=\psi_r \mathrm{q}_r,\qquad B_{ss}=-(s,\ s),$$

$$A_{sr}=A_{rs}=-\frac{2fP_{sr}}{a_s a_r}\left(\frac{m_s m_r}{n_s n_r}\right)^{1/2},$$

$$B_{sr}=B_{rs}=+\frac{2fN_{sr}}{a_s a_r}\left(\frac{m_s m_r}{n_s n_r}\right)^{1/2},$$

то уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dH_s}{dt}&=A_{ss}K_s+A_{sr}K_r,\\ \frac{dK_s}{dt}&=-A_{ss}H_s-A_{sr}H_r,\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_s}{dt}&=B_{ss}Q_s+B_{sr}Q_r,\\ \frac{dQ_s}{dt}&=-B_{ss}P_s-B_{sr}P_r,\end{aligned}\tag{25}$$

$$s=1,\ \ldots,\ n,$$

$$r=1,\ \ldots,\ n,\ r\neq s.$$

Коэффициенты можно также написать в следующем виде:

$$A_{ss}=-B_{ss}=\sum \frac{2fm_s m_r}{\psi_s^2} N_{sr},$$

$$A_{sr} = -\frac{2fm_s m_r}{\psi_s\psi_r} P_{sr},$$

$$B_{sr} = +\frac{2fm_s m_r}{\psi_s\psi_r} N_{sr}.$$

Из этих соотношений легко видеть, что

$$B_{ss}\psi_s + \sum_r B_{sr}\psi_r = 0. \tag{26}$$

Как и ранее, член с $s=r$ должен быть исключен из каждого суммирования.

Частным решением для переменных H, K является

$$H_s = M_s \sin(gt+\beta), \qquad K_s = M_s \cos(gt+\beta),$$

что приводит к следующему характеристическому уравнению относительно g:

$$A(g) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}-g & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-g & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-g \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Для переменных P, Q частное решение имеет вид

$$P_s = L_s \sin(ft+\gamma), \qquad Q_s = L_s \cos(ft+\gamma)$$

со следующим характеристическим уравнением:

$$B(f) \equiv \begin{vmatrix} B_{11}-f & B_{12} & \dots B_{1n} \\ B_{21} & B_{22}-f & \dots B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots B_{nn}-f \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Оба определителя симметричны; в определителе $A(g)$ постоянные части элементов, расположенных по главной диагонали, положительны, а элементы, лежащие вне главной диагонали, отрицательны. В определителе $B(f)$ постоянные части элементов по главной диагонали отрицательны, а элементы, расположенные вне главной диагонали, положительны.

Характеристическое уравнение $B(f)=0$ имеет корень $f=0$. Из соотношений (26) легко видеть, что при $f=0$ $L_s=\psi_s$ является решением этих уравнений. Динамическая причина этого нулевого корня та же, что и в случае двух планет.

Сильвестер показал, что независимо от значений A_{ss}, A_{sr}, B_{ss}, B_{sr} все корни характеристических уравнений $A(g)=0$, $B(f)=0$ действительны.

Для случая двух планет непосредственно очевидно, что эти корни должны быть действительными и различными, поскольку

$$(A_{11}-A_{22})^2 + 4A_{12}^2 > 0.$$

Для общего случая доказательства нет. Однако для восьми больших планет солнечной системы от Меркурия до Нептуна оказывается, что все корни g положительны и различны, а все корни f, за исключением нулевого корня, отрицательны и различны.

Поэтому общее решение для этих восьми планет имеет следующий вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_s \mathrm{h}_s \sqrt{m_s n_s} &= H_s = \sum_{j=1}^{8} M_s^{(j)} \sin(g_j t + \beta_j),\\
a_s \mathrm{k}_s \sqrt{m_s n_s} &= K_s = \sum_{j=1}^{8} M_s^{(j)} \cos(g_j t + \beta_j),
\end{aligned}
\right\} \tag{29}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_s \mathrm{p}_s \sqrt{m_s n_s} &= P_s = L_s^{(1)} \sin\gamma_1 + \sum_{j=2}^{8} L_s^{(j)} \cos(f_j t + \gamma_j),\\
a_s \mathrm{q}_s \sqrt{m_s n_s} &= Q_s = L_s^{(1)} \cos\gamma_1 + \sum_{j=2}^{8} L_s^{(j)} \cos(f_j t + \gamma_j),
\end{aligned}
\right\} \tag{30}
$$

$$s = 1, \ldots, 8.$$

Постоянными интегрирования являются постоянные фазы β_j, γ_j и коэффициенты $M_s^{(j)}$, $L_s^{(j)}$, $j = 1, \ldots, 8$, для какого-нибудь одного значения s. Отношения $M_r^{(j)}/M_s^{(j)}$, $L_r^{(j)}/L_s^{(j)}$ получаются как отношения соответствующих миноров каждого из определителей $A(g_j)$, $B(f_j)$.

Очевидно, что систему отсчета можно выбрать таким образом, чтобы было $L_s^{(1)} = 0$ для всех значений s, поскольку при $f_1 = 0$ частным решением является

$$L_s^{(1)} = C\psi_s,$$

где C — произвольная постоянная, и если C положить равной нулю, то $L_s^{(1)}$ обратится в нуль.

5. Определение постоянных интегрирования. При $t = 0$ выражения (29) принимают вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{8} M_1^{(j)} \sin\beta_j = \mathrm{h}_1\psi_1, && \sum_{j=1}^{8} M_1^{(j)} \cos\beta_j = \mathrm{k}_1\psi_1,\\
&\sum_{j=1}^{8} M_2^{(j)} \sin\beta_j = \mathrm{h}_2\psi_2, && \sum_{j=1}^{8} M_2^{(j)} \cos\beta_j = \mathrm{k}_2\psi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{j=1}^{8} M_8^{(j)} \sin\beta_j = \mathrm{h}_8\psi_8, && \sum_{j=1}^{8} N_8^{(j)} \cos\beta_j = \mathrm{k}_8\psi_8.
\end{aligned}
\right\} \tag{31}
$$

Правые части этих уравнений выражены через значения элементов орбит для $t = 0$; левые части содержат шестнадцать постоянных интегрирования $\beta_1, \ldots, \beta_8$ и, например, $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \ldots, M_1^{(8)}$. Отношения

$$\frac{M_2^{(1)}}{M_1^{(1)}}, \quad \frac{M_3^{(1)}}{M_1^{(1)}}, \quad \ldots, \quad \frac{M_8^{(1)}}{M_1^{(1)}}$$

получаются как отношения соответствующих миноров определителя (27) при $g = g_1$; отношения

$$\frac{M_2^{(2)}}{M_1^{(2)}}, \quad \frac{M_3^{(2)}}{M_1^{(2)}}, \quad \ldots, \quad \frac{M_8^{(2)}}{M_1^{(2)}}$$

получаются по этим минорам при $g=g_2$ и т. п. Поэтому эти отношения можно считать известными.

Подстановка g_1 и g_2 последовательно в первое из линейных уравнений, имеющих определителем (27), дает для общего случая n планет

$$(A_{11}-g_1)M_1^{(1)}+A_{12}M_2^{(1)}+\ldots+A_{1n}M_n^{(1)}=0,$$
$$(A_{11}-g_2)M_1^{(2)}+A_{12}M_2^{(2)}+\ldots+A_{1n}M_n^{(2)}=0,$$

откуда путем исключения A_{11} находим

$$(g_2-g_1)M_1^{(1)}M_1^{(2)}=A_{12}(M_2^{(2)}M_1^{(1)}-M_2^{(1)}M_1^{(2)})+A_{13}(M_3^{(2)}M_1^{(1)}-M_3^{(1)}M_1^{(2)})+$$
$$+\ldots+A_{1n}(M_n^{(2)}M_1^{(1)}-M_n^{(1)}M_1^{(2)}).$$

Второе из этих уравнений дает

$$(g_2-g_1)M_2^{(1)}M_2^{(2)}=A_{21}(M_1^{(2)}M_2^{(1)}-M_1^{(1)}M_2^{(2)})+A_{23}(M_3^{(2)}M_2^{(1)}-M_3^{(1)}M_2^{(2)})+$$
$$+\ldots+A_{2n}(M_n^{(2)}M_2^{(1)}-M_n^{(1)}M_2^{(2)}).$$

Этот процесс можно продолжить для всех n уравнений. Если все эти соотношения сложить, то правая часть суммы обращается в нуль и сумма принимает следующий вид:

$$(g_2-g_1)[M_1^{(1)}M_1^{(2)}+M_2^{(1)}M_2^{(2)}+\ldots+M_n^{(1)}M_n^{(2)}]=0.$$

При допущении, что не существует попарно равных корней, необходимо, чтобы

$$M_1^{(1)}M_1^{(2)}+M_2^{(1)}M_2^{(2)}+\ldots+M_n^{(1)}M_n^{(2)}=0,$$

или вообще

$$M_1^{(r)}M_1^{(s)}+M_2^{(r)}M_2^{(s)}+\ldots+M_n^{(r)}M_n^{(s)}=0. \tag{32}$$

Теперь можно использовать это свойство, чтобы разрешить уравнения (31) относительно $M_1^{(j)}\sin\beta_j$, $M_1^{(j)}\cos\beta_j$. Умножая эти уравнения соответственно на $M_1^{(r)}, M_2^{(r)}, \ldots, M_8^{(r)}$ и складывая произведения, получаем

$$[M_1^{(r)2}+M_2^{(r)2}+\ldots+M_8^{(r)2}]\sin\beta_r=M_1^{(r)}\mathrm{h}_1\psi_1+M_2^{(r)}\mathrm{h}_2\psi_2+\ldots+M_8^{(r)}\mathrm{h}_8\psi_8,$$
$$[M_1^{(r)2}+M_2^{(r)2}+\ldots+M_8^{(r)2}]\cos\beta_r=M_1^{(r)}\mathrm{k}_1\psi_1+M_2^{(r)}\mathrm{k}_2\psi_2+\ldots+M_8^{(r)}\mathrm{k}_8\psi_8.$$

Отсюда находим

$$M_1^{(r)}\sin\beta_r=\frac{\mathrm{h}_1\psi_1+\dfrac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}}\mathrm{h}_2\psi_2+\ldots+\dfrac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}}\mathrm{h}_8\psi_8}{1+\left(\dfrac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2+\left(\dfrac{M_3^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2}, \tag{33}$$

$$M_1^{(r)}\cos\beta_r=\frac{\mathrm{k}_1\psi_1+\dfrac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}}+\mathrm{k}_2\psi_2+\ldots+\dfrac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}}\mathrm{k}_8\psi_8}{1+\left(\dfrac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2+\left(\dfrac{M_3^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}}\right)^2}. \tag{34}$$

Но все отношения $M_s^{(r)}/M_1^{(r)}$, которые входят в эти выражения, известны; следовательно, величины $M_1^{(r)}$, β_r могут быть получены последовательно для $r=1, \ldots, 8$. Совершенно аналогичные выражения можно написать для $\mathrm{L}_1^{(r)}\sin\gamma_r$, $L_1^{(r)}\cos\gamma_r$.

6. Метод Якоби решения характеристических уравнений. Решение характеристических уравнений и вычисление миноров для отдельных корней представляет сложную вычислительную задачу. Метод, придуманный Якоби, имеет огромную практическую ценность.

Допустим, что в уравнения

$$
\begin{gathered}
(A_{11}-g)M_1+A_{12}M_2+\ldots+A_{1n}M_n=0,\\
A_{21}M_1+(A_{22}-g)M_2+\ldots+A_{2n}M_n=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{n1}M_1+A_{n2}M_2+\ldots+(A_{nn}-g)\ M_n=0
\end{gathered}
$$

вводится преобразование

$$
\begin{gathered}
M_r=M'_r\cos\varphi-M'_s\sin\varphi,\\
M_s=M'_r\sin\varphi+M'_s\cos\varphi.
\end{gathered}
$$

Это дает для $j\neq r$, $j\neq s$

$$A_{jr}M_r+B_{js}M_s=(A_{jr}\cos\varphi+A_{js}\sin\varphi)M'_r+(-A_{jr}\sin\varphi+A_{js}\cos\varphi)M'_s$$

и

$$
\begin{aligned}
(A_{rr}-g)M_r+A_{rs}M_s&=[A_{rr}\cos\varphi+A_{rs}\sin\varphi-g\cos]\,M'_r+\\
&\quad+[-A_{rr}\sin\varphi+A_{rs}\cos\varphi+g\sin\varphi]\,M'_s,\\
A_{sr}M_r+(A_{ss}-g)M_s&=(A_{sr}\cos\varphi+A_{ss}\sin\varphi-g\ \sin\varphi)M'_r+\\
&\quad+(-A_{sr}\sin\varphi+A_{ss}\cos\varphi-g\cos\varphi)M'_s.
\end{aligned}
$$

Умножая последние два результата сначала на $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и складывая произведения, а затем умножая на $-\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ и снова складывая, получим

$$
\begin{aligned}
&[A_{rr}\cos^2\varphi+A_{ss}\sin^2\varphi+2A_{rs}\sin\varphi\cos\varphi-g]\,M'_r+\\
&\quad+[-(A_{rr}-A_{ss})\sin\varphi\cos\varphi+A_{rs}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)]\,M'_s
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&[-(A_{rr}-A_{ss})\sin\varphi\cos\varphi+A_{rs}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)]\,M'_r+\\
&\quad+[A_{rr}\sin^2\varphi+A_{ss}\cos^2\varphi-2A_{rs}\sin\varphi\cos\varphi-g]\,M'_s.
\end{aligned}
$$

Если φ определяется уравнением

$$-\frac{1}{2}(A_{rr}-A_{ss})\sin 2\varphi+A_{rs}\cos 2\varphi=0$$

или

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2A_{rs}}{A_{rr}-A_{ss}},$$

то коэффициенты при M'_s и M'_r в этих преобразованных уравнениях становятся равными нулю. Это преобразование дает новый определитель, в котором новые элементы A'_{rs}, A'_{sr}, расположенные вне диагонали, обращаются в нуль. Это преобразование действует только на элементы, расположенные в столбцах и строках r и s.

Для решения характеристических уравнений (27) и (28) это преобразование выбрано так, что оно обращает в нуль численно наибольший элемент, расположенный вне главной диагонали. При втором преобразовании наибольший по численному значению элемент, лежащий вне главной диагонали нового определителя, выбирается для аналогичного преобразования. Такая последовательность преобразований выполняется до тех пор, пока все элементы, расположенные вне главной диагонали, не станут по своему численному значению меньше заранее указанного предела.

Идеальной целью, которая потребовала бы бесконечного числа преобразований, явилось бы получение в конце концов определителя, в котором элементы, расположенные вне главной диагонали, все были равны нулю. В этом случае характеристическое уравнение свелось бы к n отдельным линейным уравнениям (если нет равных корней) следующего вида:

$$
\begin{gathered}
A_{11}^{*}-g_{1}=0, \\
A_{22}^{*}-g_{2}=0, \\
\cdots\cdots \\
A_{nn}^{*}-g_{n}=0.
\end{gathered}
$$

Полное преобразование равносильно нахождению некоторого ортогонального преобразования

$$
\begin{aligned}
H_{s} &= \sum_{j} c_{sj} H_{j}^{*}, \\
K_{s} &= \sum_{j} c_{sj} K_{j}^{*}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

с условием

$$
\sum_{j} c_{sj}^{2}=1, \tag{36}
$$

которое приводит исходные уравнения к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{h}_{s}^{*}}{dt} &= A_{ss}^{*}\mathrm{k}_{s}^{*}, \\
\frac{d\mathrm{k}_{s}^{*}}{dt} &= -A_{ss}^{*}\mathrm{h}_{s}^{*}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Это же относится к уравнениям для p и q с той лишь разницей, что один из коэффициентов B_{ss}^{*} будет равен нулю, представляя нулевой корень характеристического уравнения (28).

В указанном методе вычисления вековых возмущений отбрасываются четвертые и более высокие степени эксцентриситетов и наклонностей, а также все члены возмущающей функции, кроме вековых, и в приложениях, выполненных до настоящего времени, не принимается во внимание существование Плутона. Из всех этих упрощений наиболее важным является, по-видимому, пренебрежение эффектом второго порядка, обусловленным определенными периодическими членами в возмущающей функции, особенно теми членами, которые соответствуют большому неравенству в движении Юпитера и Сатурна. Хилл учел эти члены при вычислении взаимных вековых возмущений в эксцентриситетах и перигелиях Юпитера и Сатурна; он также включил главные влияния четвертых и шестых степеней эксцентриситетов.

Наиболее полным решением для всей солнечной системы является решение Брауэра и Вуркома, которые включили главные уточнения, введенные Хиллом. Значения g_j и f_j, полученные в этом решении, даны в табл. 1. Значение g_8 было увеличено от $+23'',0858$ до $+27'',7741$ при помощи указанного выше уточнения; корни g_5, g_7 и g_8 также изменены, но в гораздо меньшей степени. Кроме этих изменений, решение относительно вековых вариаций в $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ содержит теперь также малые члены с аргументами вида

$$(2g_5 - g_8)\,t + 2\beta_5 - \beta_8$$

и

$$(2g_8 - g_5)t + 2\beta_8 - \beta_5.$$

Таблица 1

Годичные изменения аргументов

j	g_j	f_j
1	$+5'',4633$	$-5,2015$
2	$+7,3447$	$-6,5708$
3	$+17,3283$	$-18,7436$
4	$+18,0023$	$-17,6333$
5	$+4,2959$	$0,0000$
6	$+27,7741$	$-25,7335$
7	$+2,7193$	$-2,9027$
8	$+0,6333$	$-0,6775$

Планета Плутон не была включена в эти вычисления из-за трудности, состоящей в том, что орбиты Нептуна и Плутона могут пересечься, если допустить неограниченные изменения долгот перигелиев и узлов. В силу малости возмущений от Нептуна в движении планет, являющихся по отношению к нему нижними, представляется вероятным, что включение Плутона не изменило бы существенно решение для остальных планет.

Периодические члены, представляющие решение, имеют очень долгие периоды, примерно в пределах от 47 000 до 2 000 000 лет, а наибольший коэффициент при этих членах меньше, чем 0,2. Поскольку эти периоды несоизмеримы, то очевидно, что в пределах точности теории максимальное значение e или $\operatorname{tg} i$ для любой планеты равно сумме всех коэффициентов (взятых с положительным знаком) в ряде для $\mathfrak{h}$ или $\mathfrak{p}$. (Коэффициенты в рядах для $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{q}$ соответственно тождественны коэффициентам рядов для $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$.) Очевидно также, что в том случае, когда один из коэффициентов численно больше суммы всех остальных, величинам e или $\operatorname{tg} i$ можно приписать минимальное значение, равное разности между наибольшим коэффициентом и суммой всех остальных. В противном случае им нельзя приписать никакого минимального значения, и в некоторый момент времени e или i могут обратиться в нуль, тогда как π или θ в этот же момент времени мгновенно изменяется на 180°. Этот последний случай действительно имеет место для эксцентриситетов Венеры и Земли.

С другой стороны, если один коэффициент больше суммы всех остальных, то перигелий (или узел) рассматриваемой планеты будет иметь среднее движение, равное изменению аргумента члена с наибольшим коэффициентом. Если это условие не выполняется, то среднему движению перигелия или узла нельзя дать подобную простую интерпретацию.

7. Вековые возмущения малых планет. Для тела с пренебрежимо малой массой, как, например, малая планета, уравнения для вековых возмущений будут теми же, что и уравнения (5). Если символы без нижних индексов относятся к элементам орбиты этого малого тела, то

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{h}}{dt} &= +\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{k}}, & \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= +\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{q}}, \\ \frac{d\mathfrak{k}}{dt} &= -\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{h}}, & \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= -\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \mathfrak{p}} \end{aligned} \qquad (38)$$

при

$$R=\sum_j \mathrm{f}m_j\,[N_j(\mathrm{h}^2+\mathrm{h}_j^2+\mathrm{k}^2+\mathrm{k}_j^2)-2P_j(\mathrm{h}\mathrm{h}_j+\mathrm{k}\mathrm{k}_j)]+$$
$$+\sum_j \mathrm{f}m_j\,[N_j(-\mathrm{p}^2-\mathrm{p}_j^2-\mathrm{q}^2-\mathrm{q}_j^2+2\mathrm{p}\mathrm{p}_j+2\mathrm{q}\mathrm{q}_j)], \tag{39}$$

где суммирование распространяется на все большие планеты. Если ввести это выражение для R, то уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{h}}{dt}&=+\frac{2}{na^2}\left(\sum \mathrm{f}m_jN_j\right)\mathrm{k}-\frac{2}{na^2}\sum \mathrm{f}m_jP_j\mathrm{k}_j,\\ \frac{d\mathrm{k}}{dt}&=-\frac{2}{na^2}\left(\sum \mathrm{f}m_jN_j\right)\mathrm{h}+\frac{2}{na^2}\sum \mathrm{f}m_jP_j\mathrm{h}_j,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{p}}{dt}&=-\frac{2}{na^2}\left(\sum \mathrm{f}m_jN_j\right)\mathrm{q}+\frac{2}{na^2}\sum \mathrm{f}m_jN_j\mathrm{q}_j,\\ \frac{d\mathrm{q}}{dt}&=+\frac{2}{na^2}\left(\sum \mathrm{f}m_jN_j\right)\mathrm{p}-\frac{2}{na^2}\sum \mathrm{f}m_jN_j\mathrm{p}_j.\end{aligned} \tag{41}$$

Теперь h_j, k_j, p_j, q_j представляет собой известные функции от времени, определяемые выражениями (29), (30); коэффициенты N_j, P_j — функции от a, a_j — больших полуосей орбит возмущаемого тела с пренебрежимо малой массой и отдельных возмущающих планет. Эти коэффициенты могут быть табулированы как функции от a. Полагая

$$\frac{2}{na^2}\sum \mathrm{f}m_jN_j=g,$$

что представляет собой положительную величину, мы можем написать эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{h}}{dt}&=+g\mathrm{k}-\sum \nu_j\cos(g_jt+\beta_j),\\ \frac{d\mathrm{k}}{dt}&=-g\mathrm{h}+\sum \nu_j\sin(g_jt+\beta_j),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{p}}{dt}&=-g\mathrm{q}+\sum \mu_j\cos(f_jt+\gamma_j),\\ \frac{d\mathrm{q}}{dt}&=+g\mathrm{p}-\sum \mu_j\sin(f_jt+\gamma_j).\end{aligned} \tag{43}$$

Как и раньше, величины g, ν_j, μ_j можно табулировать как функции от a, тогда как g, f_j, β_j, γ_j — известные постоянные для вековых изменений элементов орбит больших планет.

Дифференцирование первого из уравнений (39) дает следующее уравнение:

$$\frac{d^2\mathrm{h}}{dt^2}=g\frac{d\mathrm{k}}{dt}+\sum \nu_jg_j\sin(g_jt+\beta_j)=$$
$$=-g^2\mathrm{h}+\sum \nu_j(g+g_j)\sin(g_jt+\beta_j),$$

решением которого является

$$\begin{aligned}\mathrm{h}&=\nu\sin(gt+\beta)+\sum\frac{\nu_j}{g-g_j}\sin(g_jt+\beta_j),\\ \mathrm{k}&=\nu\cos(gt+\beta)+\sum\frac{\nu_j}{g-g_j}\cos(g_jt+\beta_j),\end{aligned} \tag{44}$$

Аналогично уравнения для p и q дают следующее уравнение:

$$\frac{d^2\mathrm{p}}{dt^2} = -g\frac{d\mathrm{q}}{dt} - \sum \mu_j f_j \sin(f_j t + \gamma_j) =$$
$$= -g^2\mathrm{p} + \sum \mu_j (g - f_j)\sin(f_j t + \gamma_j),$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{p} &= \mu \sin(-gt + \gamma) + \sum \frac{\mu_j}{g + f_j}\sin(f_j t + \gamma_j), \\ \mathrm{q} &= \mu \cos(-gt + \gamma) + \sum \frac{\mu_j}{g + f_j}\cos(f_j t + \gamma_j). \end{aligned} \tag{45}$$

В этих выражениях ν, μ, β и γ — постоянные интегрирования. Величину ν часто называют собственным эксцентриситетом, тогда как μ следовало бы называть собственной наклонностью (или тангенсом собственной наклонности). Запишем эти выражения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \nu \sin(gt + \beta) + \mathrm{h}_0, \\ \mathrm{k} &= \nu \cos(gt + \beta) + \mathrm{k}_0, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{p} &= \mu \sin(-gt + \gamma) + \mathrm{p}_0, \\ \mathrm{q} &= \mu \cos(-gt + \gamma) + \mathrm{q}_0. \end{aligned} \tag{47}$$

Такая форма решения хорошо известна в задачах о малых колебаниях, которые возникают при различных приложениях методов теорети-

Таблица 2

Приведение к собственным элементам малых планет
(Уравнения (44), (45))

a	h_0	k_0	p_0	q_0
1,9	+0,04548	−0,00204	+0,13176	−0,08498
2,0	+0,21462	−0,12304	−0,05376	+0,05407
2,1	−0,06567	+0,07736	−0,00378	+0,01613
2,2	−0,02370	+0,04805	+0,00742	+0,00755
2,3	−0,01218	+0,04044	+0,01240	+0,00374
2,4	−0,00683	+0,03713	+0,01517	+0,00162
2,5	−0,00406	+0,03504	+0,01691	+0,00029
2,6	−0,00557	+0,03018	+0,01813	−0,00065
2,7	+0,00415	+0,03909	+0,01902	−0,00132
2,8	+0,00361	+0,03707	+0,01966	−0,00181
2,9	+0,00422	+0,03679	+0,02018	−0,00221
3,0	+0,00490	+0,03690	+0,02057	−0,00252
3,1	+0,00552	+0,03720	+0,02090	−0,00276
3,2	+0,00610	+0,03761	+0,02117	−0,00298
3,3	+0,00662	+0,03804	+0,02139	−0,00316
3,4	+0,00711	+0,03857	+0,02156	−0,00330
3,5	+0,00756	+0,03912	+0,02173	−0,00342
3,6	+0,00796	+0,03968	+0,02186	−0,00351
3,7	+0,00834	+0,04026	+0,02197	−0,00360
3,8	+0,00868	+0,04085	+0,02205	−0,00365
3,9	+0,00902	+0,04144	+0,02213	−0,00371
4,0	+0,00933	+0,04206	+0,02219	−0,00376
4,1	+0,00961	+0,04264	+0,02225	−0,00380
4,2	+0,00987	+0,04322	+0,02230	−0,00384

ческой механики. По терминологии теории малых колебаний члены, имеющие множителем ν или μ, представляют свободные колебания, остальные члены составляют вынужденные колебания. Очевидно, что члены, имеющие множителем ν или μ, отражают существенные динамические свойства решения, тогда как вынужденные колебания отражают влияния на движение извне. Поэтому ясно, что, образуя разности $h-h_0$, $k-k_0$, $p-p_0$, $q-q_0$, мы освобождаем «наблюденные» величины h, k, p, q от несущественных членов и получаем динамически важные свободные колебания.

Значения h_0, k_0, p_0, q_0 могут быть табулированы для эпохи 1950, 0 и отнесены к эклиптике и равноденствию этой даты. Они приводятся в табл. 2 как функции от большой полуоси a. Трудности, обусловленные присутствием малых делителей, встречаются в окрестности $a=2{,}03$ и 2,64 для h_0 и k_0 и в окрестности 1,94 для p_0 и q_0. Малый делитель при $a=2{,}64$ порожден аргументом $(2g_6-g_5)t+2\beta_6-\beta_5$, упомянутым в разд. 6.

Когда эта процедура доведена до конца, то оказывается, что большинство малых планет распадается на группы, причем члены каждой

Таблица 3

Семейство Корониды

Планета	a	ν	μ	$\beta+\gamma$
962	2,9046	0,0658	0,0338	0,538
1363	2,9032	0,0434	0,0338	0,496
1100	2,8988	0,0469	0,0372	0,618
311	2,8983	0,0441	0,0377	0,713
811	2,8965	0,0624	0,0392	0,190
1497	2,8956	0,0630	0,0379	0,633
1245	2,8931	0,0437	0,0422	0,458
208	2,8927	0,0470	0,0372	0,943
1029	2,8907	0,0613	0,0391	0,509
720	2,8878	0,0508	0,0361	0,505
263	2,8870	0,0412	0,0372	0,745
321	2,8861	0,0478	0,0379	0,383
277	2,8856	0,0523	0,0373	0,729
534	2,8846	0,0518	0,0379	0,562
1442	2,8763	0,0420	0,0372	0,611
1079	2,8736	0,0463	0,0364	0,173
1482	2,8727	0,0478	0,0349	0,806
462	2,8725	0,0518	0,0360	0,260
158	2,8701	0,0472	0,0375	0,977
1223	2,8695	0,0436	0,0372	0,291
1389	2,8654	0,0500	0,0377	0,046
832	2,8649	0,0452	0,0368	0,791
993	2,8643	0,0457	0,0362	0,942
761	2,8639	0,0457	0,0370	0,772
243	2,8611	0,0469	0,0363	0,172
1289	2,8609	0,0521	0,0364	0,385
1423	2,8605	0,0426	0,0371	0,191
1350	2,8585	0,0532	0,0395	0,513
658	2,8542	0,0451	0,0368	0,125
167	2,8540	0,0425	0,0366	0,706
452	2,8522	0,0541	0,0362	0,728
1336	2,8501	0,0501	0,0358	0,049
· 975	2,8436	0,0484	0,0379	0,429

группы обладают удивительно сходными собственными значениями ν и μ. Существование такого рода групп было установлено Хираямой, который назвал их семействами. Для иллюстрации этих семейств мы приводим в табл. 3 собственные элементы наиболее компактного из известных семейств — семейства астероида (158) Корониды, взятые из новой работы Брауэра. Угол $\beta+\gamma$ выражается в десятичных долях радиана.

Даже принимая во внимание несовершенство теории и неточность элементов, использованных при вычислениях, вряд ли можно сомневаться в том, что члены семейства Корониды физически связаны друг с другом и, вероятно, являются осколками того, что было некогда большим телом. Из различных механизмов, которые предлагались для объяснения разрушения такого тела, наиболее приемлемыми представляются взрыв, быстрое вращение, приливное разрушение и столкновение, причем факты склоняют в пользу столкновения. Некоторую дисперсию в элементах следует ожидать как следствие дисперсии в скорости и направлении отдельных осколков в момент разрушения.

Брауэр исследовал элементы 1537 малых планет и предварительно распределил 458 из них по 28 семействам и группам. Основная особенность групп, в отличие от семейств, определяется тем, что собственная долгота перигелия малой планеты, согласно теории, увеличивается с той же скоростью, с которой уменьшается собственная долгота узла. Следовательно, сумма этих двух углов не меняется. Замечательно то, что среди групп малых планет имеется несколько таких, в которых суммы углов $\beta+\gamma$ сильно концентрируются в окрестности определенной величины. С другой стороны, малые планеты, принадлежащие к семействам Хираямы, не обнаруживают подобной концентрации. Быть может, это просто проблема возраста, а именно: семейства старше, чем группы, которые обнаруживают эту концентрацию сумм углов $\beta+\gamma$.

Замечания. Литература

Метод, изложенный в этой главе, является достаточным для установления верхних пределов, а в большинстве случаев и нижних пределов для эксцентриситетов и наклонностей орбит больших планет, за исключением Плутона. Что же можно сказать о реальности этих результатов? По общему признанию, они являются только приближениями. Зная общий характер разложений, мы должны ожидать, что строгое решение задачи дало бы результаты, отличающиеся от приближенных значительно меньше, чем на 50%, однако математического доказательства этого утверждения не существует.

В случае больших осей орбит дело обстоит иначе. Лагранж в 1776 г. показал, что возмущения оскулирующих больших осей не содержат вековых членов первого порядка. Пуассон доказал в 1809 г., что в этих возмущениях отсутствуют чисто вековые члены второго порядка. Исследование возмущений порядка выше второго является крайне трудоемким. Из независимых последовательных исследований, проведенных Аретю, Эгинитисом и Меффруа (все из Парижа), следует, что существуют вековые члены третьего порядка. Эти члены, хотя и очень малые, по своему существу означают постепенный распад солнечной системы. Однако это еще нельзя считать доказанным. Возможно, что эти члены могут взаимно уничтожиться с возмущениями еще более высоких порядков. Не были также учтены полностью эффекты общей теории относительности. Во всяком случае, будущее реально существующей системы зависит как от гравитационных сил, так частично и от сил негравитационного характера.

Пример вычисления вековых возмущений для орбит с большими эксцентриситетами можно найти в статье Брауэра (Astron. J., 52, 190, 1947) о вековых изменениях элементов кометы Энке. Таблицы для облегчения подобных приложений составлены Хамидом (Astron. J., 64, 142, 1959).