Глава XVII

КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

1. Общие принципы. Говорят, что система дифференциальных уравнений является канонической, если она имеет следующий вид:

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \xi_j},$$
$$j=1, \ldots, n.$$

Функция F называется гамильтонианом этой системы. Порядок системы равен $2n$; эта система называется также системой с n степенями свободы.

Можно рассмотреть два различных случая:

1) F является функцией от $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_n$; независимая переменная не входит явно в F. В этом случае

$$\frac{dF}{dt}=\sum \frac{\partial F}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt}+\sum \frac{\partial F}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt}=0.$$

Следовательно, существует соотношение

$$F=\mathrm{const},$$

являющееся интегралом этой системы.

2) F является функцией от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$, t. Тогда

$$\frac{dF}{dt}=\sum \frac{\partial F}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt}+\sum \frac{\partial F}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}.$$

В таком случае можно написать

$$F=\int \frac{\partial F}{\partial t}\,dt+\mathrm{const},$$

но это уже не будет интегралом. Интеграл $F=\mathrm{const}$ не существует.

Простой прием дает возможность свести второй случай к первому. Для этого напишем ξ_{n+1} вместо t всюду, где бы оно ни встречалось в F. Поскольку

$$\frac{d\xi_{n+1}}{dt}=+1,$$

то уравнения можно написать в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial F^*}{\partial \eta_j}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial F^*}{\partial \xi_j},$$
$$j=1, \ldots, n+1,$$

при условии, что

$$F^*=F+\eta_{n+1}$$

и

$$\frac{d\eta_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \xi_{n+1}} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_{n+1}} = -\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Эта новая система с гамильтонианом F^* имеет $n+1$ степеней свободы, и существует интеграл

$$F^* = F + \eta_{n+1} = \text{const.} \tag{A}$$

Очевидно, это то же самое, что и результат

$$F = \int \frac{\partial F}{\partial t}\, dt + \text{const}, \tag{B}$$

полученный ранее для второго случая.

Поэтому можно свести второй случай к первому за счет увеличения числа степеней свободы на единицу. Следовательно, общность не уменьшится, если предположить, что независимая переменная t не входит явно в гамильтониан.

2. Канонические преобразования. Особая важность канонической формы дифференциальных уравнений при рассмотрении задач динамики заключается в том, что эта форма дает возможность установления общих правил, которым подчиняются преобразования от одной системы переменных к другой. При соблюдении этих правил сохраняется канонический вид уравнений, а при помощи целесообразного выбора преобразований первоначально поставленная задача может быть заменена более простой. Часто в связи с этим можно уменьшить число степеней свободы и в некоторых случаях достичь таким путем полного решения. Поэтому необходимо выяснить некоторые общие свойства преобразований, сохраняющих каноническую форму уравнений. Чтобы упростить обозначения, мы будем употреблять запись

$$f(\xi_j;\ \eta_j;\ t) \quad \text{вместо} \quad f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n, t).$$

Рассмотрим общий случай; заданные уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \tag{1}$$
$$F \equiv F(\xi_j;\ \eta_j;\ t), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть преобразование к новым переменным дано в следующем виде:

$$\xi_j = \xi_j(x_k;\ y_k;\ t), \qquad \eta_j = \eta_j(x_k;\ y_k;\ t). \tag{2}$$

Речь идет о том, при каких условиях это преобразование будет каноническим, т. е. при каких условиях новые уравнения будут иметь вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial y_j}, \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial x_j},$$

где F^* является функцией от x_j; y_j; t $(j = 1, \ldots, n)$.

Дифференцирование уравнений (2) дает

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} = +\frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \tag{3а}$$

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial \eta_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j}. \tag{3б}$$

$$(j = 1, \ldots, n).$$

Пусть α означает какую-нибудь из новых переменных: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$. Умножим уравнения (3а) последовательно на $\partial\eta_j/\partial\alpha$, а уравнения (3б) на $-\partial\xi_j/\partial\alpha$ и сложим эти $2n$ произведений. В результате получим следующие выражения:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial t}\frac{\partial\eta_j}{\partial\alpha}-\frac{\partial\xi_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta_j}{\partial t}\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_j}{\partial\alpha}-\frac{\partial\xi_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{dt}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial y_k}\frac{\partial\eta_j}{\partial\alpha}-\frac{\partial\xi_j}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta_j}{\partial y_k}\right)\frac{dy_k}{dt}=+\frac{\partial F}{\partial\alpha}.$$

При помощи скобок Лагранжа эти выражения могут быть написаны в следующем виде:

$$[t,\alpha]+\sum_{k=1}^{n}[x_k,\alpha]\frac{dx_k}{dt}+\sum_{k=1}^{n}[y_k,\alpha]\frac{dy_k}{dt}=+\frac{\partial F}{\partial\alpha}.$$

Теперь, если удовлетворяются следующие условия:

$$[t,\alpha]=0, \tag{4}$$

$$[x_k, x_l]=0,\quad [y_k, y_l]=0,\quad [x_k, y_l]=0,\quad (l\neq k), \tag{5}$$
$$[x_k, y_k]=+1,$$

то новые уравнения имеют вид

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_k},\qquad \frac{dy_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_k}, \tag{6}$$

т. е. это преобразование является каноническим и гамильтониан F остается неизменным. Это, конечно, следует понимать в том смысле, что гамильтониан новых уравнений (6) получается путем выражения гамильтониана $F(\xi_j;\ \eta_j;\ t)$ уравнений (1) как функции от x_j; y_j; t при помощи уравнений преобразования (2).

Условие (4), а именно $[t,\alpha]=0$, удовлетворяется, если уравнения преобразования не содержат времени.

3. Определитель Якоби. Допустим на время, что условия (4) и (5) удовлетворены. Возникает важный вопрос, являются ли новые переменные x_j; y_j однозначным решением уравнений преобразования (2) в окрестности «точки» $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Для этого необходимо, чтобы определитель Якоби J не обращался в нуль. Этот определитель имеет вид

$$J\equiv\begin{vmatrix}
\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\xi_1}{\partial y_n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\xi_n}{\partial y_n}\\
\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\eta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\eta_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\eta_1}{\partial y_n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial\eta_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\eta_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\eta_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\eta_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix}. \tag{I}$$

При помощи взаимной замены строк и столбцов получается определитель

$$\text{(II)}\qquad J=\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial x_1}\\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial x_n}\dots\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\eta_1}{\partial x_n}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial y_1}\dots\frac{\partial\xi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\eta_1}{\partial y_1}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial y_1}\\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial y_n}\dots\frac{\partial\xi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial\eta_1}{\partial y_n}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Далее, заменим взаимным образом в определителе (II) первые n столбцов столбцами с номерами от $n+1$ до $2n$. Это потребует n^2 перемен знака. Совершим затем n перемен знака в n строках правой половины этого определителя. Окончательная перемена знака равна $(-1)^{n^2+n}=+1$ независимо от того, является ли n нечетным или четным. В таком случае

$$\text{(III)}\qquad J=\begin{vmatrix} \frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial x_1} & -\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\dots-\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}\\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial x_n}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial x_n} & -\frac{\partial\xi_1}{\partial x_n}\dots-\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial y_1}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial y_1} & -\frac{\partial\xi_1}{\partial y_1}\dots-\frac{\partial\xi_n}{\partial y_1}\\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial y_n}\dots\frac{\partial\eta_n}{\partial y_n} & -\frac{\partial\xi_1}{\partial y_n}\dots-\frac{\partial\xi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Умножение определителей (I) и (III) по правилу «столбец на строку» дает

$$\text{(IV)}\qquad J^2=\begin{vmatrix} [x_1x_1]\dots[x_nx_1] & [y_1x_1]\dots[y_nx_1]\\ [x_1x_2] & \\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ [x_1x_n]\dots[x_nx_n] & [y_1x_n]\dots[y_nx_n]\\ [x_1y_1]\dots[x_ny_1] & [y_1y_1]\dots[y_ny_1]\\ \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots\\ [x_1y_n]\dots[x_ny_n] & [y_1y_n]\dots[y_ny_n] \end{vmatrix}.$$

Но условия (5) дают

$$J^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \ -1 & \cdot \\ 0 & \dots 0 & 0 \dots & -1 \\ +1 \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ \cdot +1 \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot\ \ +1 \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 \dots & +1 & 0 \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ненулевые элементы этого определителя могут быть перенесены на главную диагональ при помощи n^2 перемен знака. Эти n элементов со знаком минус окончательно дают

$$J^2 = (-1)^{n^2+n} = +1.$$

Следовательно, $J = \pm 1$.

4. Бесконечно малые контактные преобразования. Пусть F — гамильтониан некоторой системы канонических уравнений с n степенями свободы, и допустим, что F не содержит явно времени. Обозначим переменные в момент времени t через

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \quad \eta_1, \dots, \eta_n,$$

а их значения в момент времени $t + \Delta t$ через

$$\xi_1', \dots, \xi_n', \quad \eta_1', \dots, \eta_n'.$$

Тогда в момент t имеем

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j},$$

а в момент $t + \Delta t$

$$\frac{d\xi_j'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j'}, \quad \frac{d\eta_j'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j'}.$$

Эти дифференциальные уравнения дают

$$\xi_j' - \xi_j = \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \Delta t, \quad \eta_j' - \eta_j = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \Delta t.$$

Поэтому дифференциал

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} d\xi_j + \frac{\partial F}{\partial \eta_j} d\eta_j \right) = dF$$

можно написать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} [(\xi_j' - \xi_j) d\eta_j - (\eta_j' - \eta_j) d\xi_j] = \Delta t\, dF,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} [\xi_j' d\eta_j' - \xi_j d\eta_j - \xi_j' (d\eta_j' - d\eta_j) - (\eta_j' - \eta_j) d\xi_j] = \Delta t\, dF.$$

Если квадратом Δt можно пренебречь, то допускается замена ξ'_j на ξ_j в качестве множителя при разности $d\eta'_j - d\eta_j$, откуда

$$\sum_{j=1}^{n} [\xi'_j \, d\eta'_j - \xi_j \, d\eta_j] = \Delta t \, dF + \sum_{j=1}^{n} d\,[\xi_j (\eta'_j - \eta_j)] =$$

$$= \Delta t \, d \left[F - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \right].$$

Функция

$$F - \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j}$$

выражается через первоначальные переменные ξ_j; η_j. Рассмотрим теперь последовательность таких преобразований, каждое из которых действует в течение бесконечно малого промежутка времени. Тогда этот результат принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(1)} \, d\eta_j^{(1)} - \xi_j^{(0)} \, d\eta_j^{(0)}) = d \int_{t_0}^{t_1} \left[F - \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \right] dt.$$

Это приводит к следующему вопросу: пусть преобразование от ξ_j; η_j к x_j; y_j таково, что

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j \, dy_j - \xi_j \, d\eta_j) = dW(\xi_j; \eta_j); \tag{7}$$

будет ли это преобразование каноническим, если W — произвольная функция от ξ_j; η_j?

Пусть это преобразование имеет вид

$$\xi_j = \xi_j(x_k; y_k), \quad \eta_j = \eta_j(x_k; y_k).$$

По этим формулам преобразования можно выразить функцию W через x_j; y_j.

Следовательно, пусть

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j \, dy_j - \xi_j \, d\eta_j) = dW_1(x_j; y_j),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \, dy_k - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} dy_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_1}{\partial y_k} dy_k.$$

Приравнивая коэффициенты, мы получаем следующие уравнения:

(а) $$-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} = \frac{\partial W_1}{\partial x_k},$$

(б) $$x_k - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} = \frac{\partial W_1}{\partial y_k}.$$

Дифференцирование уравнений (а) и (б) по y_k и x_k соответственно дает

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}-\sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial y_k}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial y_k},$$

$$1-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial \eta_j}{\partial y_k}-\sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial y_k}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial y_k}.$$

Вычитая эти уравнения, находим

$$-1+[x_k,\ y_k]=0.$$

Таким же путем из (а) получаем

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}-\sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial x_l}.$$

Меняя в (а) k на l и дифференцируя по x_k, находим

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_l}-\sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial x_l}.$$

Вычитание дает

$$[x_k,\ x_l]=0.$$

Аналогичным образом легко видеть, что

$$[y_k,\ y_l]=0,\quad [x_k,\ y_l]=0\qquad (l\neq k).$$

Таким образом, скобки Лагранжа удовлетворяют требованию, чтобы это преобразование было каноническим без изменения гамильтониана.

Допустим далее, что W_1 содержит время. В таком случае

$$\xi_j=\xi_j(x_j;\ y_j;\ t),\quad \eta_j=\eta_j(x_j;\ y_j;\ t),$$

и уравнение

$$\sum (x_j\,dy_j-\xi_j\,d\eta_j)=dW_1(x_j;\ y_j;\ t) \tag{8}$$

дает

$$\sum_k x_k\,dy_k-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}\,dx_k+\frac{\partial \eta_j}{\partial y_k}\,dy_k+\frac{\partial \eta_j}{\partial t}\,dt\right)=$$
$$=\sum_k \frac{\partial W_1}{\partial x_k}\,dx_k+\sum_k \frac{\partial W_1}{\partial y_k}\,dy_k+\frac{\partial W_1}{\partial t}\,dt.$$

В дополнение к соотношениям (а) и (б) мы получаем

(в) $$-\sum_j \xi_j\frac{\partial \eta_j}{\partial t}=\frac{\partial W_1}{\partial t}.$$

Дифференцирование (а) по t и (в) по x_k дает следующие выражения:

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial t}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial t}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial t},$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial \eta_j}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k\,\partial t}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k\,\partial t}.$$

Вычитая их, находим

$$[t, x_k] = 0.$$

Аналогично, комбинируя (б) и (в), получаем

$$[t, y_k] = 0.$$

Таким образом, этот результат остается в силе независимо от того, содержат ли функция W_1 и уравнения преобразования $\xi_j = \xi_j(x_k; y_k; t)$, $\eta_j = \eta_j(x_k; y_k; t)$ время в явном виде или нет.

5. Примеры.

1) Возьмем преобразование

$$\xi_j = \sqrt{2x_j}\cos y_j, \quad \eta_j = \sqrt{2x_j}\sin y_j,$$

тогда

$$d\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2x_j}}\cos y_j\,dx_j - \sqrt{2x_j}\sin y_j\,dy_j,$$

$$d\eta_j = \frac{1}{\sqrt{2x_j}}\sin y_j\,dx_j + \sqrt{2x_j}\cos y_j\,dy_j.$$

Следовательно,

$$\xi_j\,d\eta_j = \sin y_j\cos y_j\,dx_j + 2x_j\cos^2 y_j\,dy_j,$$

$$\begin{aligned} x_j\,dy_j - \xi_j\,d\eta_j &= -\sin y_j\cos y_j\,dx_j - x_j(2\cos^2 y_j - 1)\,dy_j = \\ &= -\frac{1}{2}\sin 2y_j\,dx_j - x_j\cos 2y_j\,dy_j = \\ &= d\left[-\frac{1}{2}x_j\sin 2y_j\right]. \end{aligned}$$

Поэтому это преобразование является каноническим без изменения гамильтониана.

2) Рассмотрим следующее преобразование от ξ_j; η_j к x_j; y_j по формулам

$$\xi_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n,$$

$$\eta_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n,$$

где коэффициенты a_{jk} — постоянные. Предположим далее, что это преобразование ортогонально, т. е.

$$\sum \xi_j^2 = \sum x_j^2, \tag{A}$$

$$\sum \eta_j^2 = \sum y_j^2. \tag{B}$$

Очевидно,

$$\xi_j + \eta_j = a_{j1}(x_1 + y_1) + a_{j2}(x_2 + y_2) + \ldots + a_{jn}(x_n + y_n)$$

и

$$\sum (\xi_j + \eta_j)^2 = \sum (x_j + y_j)^2. \tag{C}$$

Теперь выражение $\frac{1}{2}[(C) - (A) - (B)]$ дает

$$\sum \xi_j\eta_j = \sum x_j y_j,$$

а следовательно,

$$\sum \xi_j \, d\eta_j = \sum x_j \, dy_j,$$

которое показывает, что это преобразование является каноническим.

Уравнения для вековых изменений в H и K; P и Q, приведенные в разд. 4 гл. XVI под номерами (24) и (25), имеют каноническую форму с гамильтонианом

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{sr} \left(K_s K_r + H_s H_r \right).$$

Ортогональное преобразование (35) из этого раздела имеет форму, указанную выше. Следовательно, получающиеся уравнения (37) сохраняют канонический вид.

3) Другие примеры этого типа с правой частью уравнения (7), равной нулю, принадлежат к числу тех, которые часто используются в связи с переменными Делонэ L, G, H, l, g, h. Для некоторых целей представляется более удобным использовать в качестве угловых переменных

$$l + g + h, \quad g + h, \quad h.$$

Пусть X_1, X_2, X_3 — переменные, которыми следует воспользоваться вместо L, G, H, чтобы сохранить каноническую форму уравнений. Тогда, если

$$L \, dl + G \, dg + H \, dh = X_1 \, d(l + g + h) + X_2 \, d(g + h) + X_3 \, dh,$$

это преобразование будет каноническим. Мы находим, что

$$X_1 = L, \quad X_1 + X_2 = G, \quad X_1 + X_2 + X_3 = H,$$

или

$$X_1 = L, \quad X_2 = G - L, \quad X_3 = H - G.$$

Поэтому переменные

$$\begin{array}{ll} L, & l + g + h, \\ G - L, & g + h, \\ H - G, & h \end{array}$$

представляют каноническую систему переменных.

Небольшое неудобство состоит в том, что $G - L$ и $H - G$ отрицательны. Это неудобство можно устранить, используя следующую систему:

$$\begin{array}{ll} x_1 = L, & y_1 = l + g + h, \\ x_2 = L - G, & y_2 = -g - h, \\ x_3 = G - H, & y_3 = -h. \end{array}$$

С этими переменными посредством преобразования из примера (1) связана следующая система:

$$\begin{array}{ll} L, & l + g + h, \\ \sqrt{2(L - G)} \cos(g + h), & -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + h), \\ \sqrt{2(G - H)} \cos h, & -\sqrt{2(G - H)} \sin h. \end{array}$$

Эти переменные известны как переменные Пуанкаре.

4) В некоторых отношениях углы $l+g+h$, l, $l+g$ являются более естественными при разложении возмущающей функции, чем углы, использованные в предыдущем примере. Легко подыскать каноническую систему, эквивалентную системе Делонэ, для которой эти величины являются угловыми переменными. Приравнивая коэффициенты при dl, dg, dh в

$$L\,dl+G\,dg+H\,dh=X_1d\,(l+g+h)+X_2\,dl+X_3d\,(l+g),$$

мы находим, что

$$\begin{aligned} X_1&=H, & Y_1&=l+g+h,\\ X_2&=L-G, & Y_2&=l,\\ X_3&=G-H, & Y_3&=l+g \end{aligned}$$

представляет собой требуемую систему переменных с присоединенной системой переменных

$$\begin{aligned} &H, && l+g+h,\\ &\sqrt{2(L-G)}\cos l, && \sqrt{2(L-G)}\sin l,\\ &\sqrt{2(G-H)}\cos(l+g), && \sqrt{2(G-H)}\sin(l+g). \end{aligned}$$

6. Определяющая функция. Пусть задана функция $S(x_j;\ \eta_j)$, и пусть

$$y_j=\frac{\partial S}{\partial x_j},\quad \xi_j=\frac{\partial S}{\partial \eta_j} \tag{9}$$

— уравнения преобразования. Выражение

$$\sum(x_j\,dy_j-\xi_j\,d\eta_j)$$

можно написать в следующем виде:

$$d\sum x_jy_j-\sum y_j\,dx_j-\sum \xi_j\,d\eta_j.$$

Отсюда, в силу (9), имеем

$$d\sum x_jy_j-\sum\frac{\partial S}{\partial x_j}\,dx_j-\sum\frac{\partial S}{\partial \eta_j}\,d\eta_j=d\left[\sum x_jy_j-S\right]=dW.$$

Поэтому преобразование (9) является каноническим без изменения гамильтониана. Функция S называется определяющей функцией этого преобразования. Она выражается через половину старых переменных и половину новых переменных. Преобразование (9) не получается в явной форме

$$\xi_j=f_j(x_k;\ y_k),\quad \eta_j=g_j(x_k;\ y_k),$$

а, наоборот, в неявной форме вида

$$\xi_j=\varphi_j(x_k;\ \eta_k),\quad y_j=\psi_j(x_k;\ \eta_k).$$

7. Метод Делонэ. Делонэ применил свой метод к решению основной проблемы теории Луны. Уравнения в переменных Делонэ были получены в разд. 8 гл. XI. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\widetilde{h}}, & \frac{d\widetilde{h}}{dt} &= -\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial H} \end{aligned} \tag{10}$$

с

$$\widetilde{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} + R. \tag{11}$$

Значок $\sim$ (тильда) использован для h и F с тем, чтобы эти символы без тильды использовать для модифицированной формы этих уравнений.

В основной проблеме теории Луны возмущающая функция R может быть разложена в виде бесконечной суммы косинусоидальных членов с аргументами вида

$$j_1(l+g+\widetilde{h}-l'-\widetilde{\omega}')+j_2 l+j_3(l+g)+j_4 l',$$

в которых l' — средняя аномалия Солнца, а $\widetilde{\omega}'$ — долгота перигея орбиты Солнца. Этот аргумент можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (j_1+j_2+j_3)\,l+(j_1+j_3)\,g+j_1(\widetilde{h}-\widetilde{\omega}')+(j_4-j_1)\,l' &= \\ = p_1 l+p_2 g+p_3(\widetilde{h}-\widetilde{\omega}')+p_4 l', \end{aligned}$$

где l' рассматривается как линейная функция времени вида

$$l' = n't + \mathrm{const};$$

n' и $\widetilde{\omega}'$ считаются постоянными.

В этом разделе мы используем ν вместо n', k вместо l', так как штрихи понадобятся для другой цели. Если, далее, написать h вместо $\widetilde{h}-\widetilde{\omega}'$, то общий аргумент в R примет следующий вид:

$$p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k,$$

в котором коэффициенты p — целые числа; без потери общности p_1 можно выбрать неотрицательным; коэффициенты же p_2, p_3 и p_4 могут быть как положительными, так и отрицательными, включая и нуль.

Функция $\widetilde{F}$ зависит явным образом от t, так как $k = \nu t + \mathrm{const}$. Для того чтобы получить гамильтониан, не зависящий от t, удобно ввести k и K в качестве дополнительных переменных, полагая

$$\frac{dk}{dt} = \nu = -\frac{\partial F}{\partial K}.$$

Это требует прибавления $-\nu K$ к $\tilde{F}$. Тогда уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} - \nu K + R.$$

Переменная K входит в гамильтониан F только посредством члена $-\nu K$.

Для того чтобы рассмотреть принцип метода Делонэ, введем $\bar{F}$ посредством выражения

$$\bar{F} = F_0 + P_1 + Q_1 \cos\theta,$$

в котором $F_0 = (\mu^2/2L^2) - \nu K$, а P_1 представляет собой сумму всех непериодических членов в функции R (т. е. членов, для которых $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$). Член $Q_1 \cos\theta$ является единственным критическим периодическим членом из R. Делонэ затем переходит к решению уравнений (12), в которых функция F заменена на $\bar{F}$. Это решение выполняется при помощи канонического преобразования переменных

$$L,\ G,\ H,\ K,\quad l,\ g,\ h,\ k$$

к новым переменным

$$L',\ G',\ H',\ K',\quad l',\ g',\ h',\ k',$$

таким, что гамильтониан $\bar{F}$ после этого преобразования становится функцией только от L', G', H', K'.

Это преобразование применяется затем к уравнениям с полным гамильтонианом F. Однако при этом преобразовании $F_0 + P_1 + Q_1 \cos\theta$ будет функцией только от L', G', H', K'. Поэтому критический член с аргументом θ исчезнет. Новые переменные должны теперь быть подставлены во все остальные члены R. Это не изменит характерных особенностей функции R, за исключением того, что исчезает член $Q_1 \cos\theta$. Аргумент θ может появиться снова в преобразованном ряде для R, но соответствующий член будет иметь меньший коэффициент.

Этот метод требует полностью буквенного разложения возмущающей функции. Коэффициенты выражаются в виде степенных рядов по e, $\gamma = \sin\frac{1}{2}I$, ϵ (которое используется для обозначения эксцентриситета орбиты Солнца, так что символ e' остается для другой цели) и $\alpha = a/a_{\odot}$. Общий множитель возмущающей функции равен $\nu^2 a^2$. В ходе интегрирования появляются степени $\nu/n = \nu L^3/\mu^2$ как члены степенных рядов. Хотя в качестве переменных использованы L, G, H, а e, γ, a, n могут быть выражены через эти переменные, характерная особенность метода Делонэ и состоит в том, что возмущающая функция не разлагается явным образом по этим каноническим элементам.

Метод Делонэ состоит в исключении путем последовательных преобразований наиболее значительных членов в R. Делонэ рассматривает e, γ, ν/n, ε как малые величины первого порядка малости, $a/a_{\odot}$ — как малую второго порядка. Вообще говоря, решение доводится до восьмого порядка в только что указанном смысле. (Для членов с $p_1=0$, $p_4=0$ он доводит коэффициенты до девятого порядка; кроме того, в силу малости ε он считает ε^3, ε^4, ε^5, ε^6 соответственно величинами четвертого, пятого, шестого и седьмого порядков.)

8. Преобразование Делонэ. Пусть

$$\theta = p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k$$

является критическим аргументом для преобразования Делонэ. Каноническое преобразование переменных

$$L,\ G,\ H,\ K,\quad l,\ g,\ h,\ k$$

к переменным

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\quad \theta,\ g,\ h,\ k$$

можно совершить при условии, что $p_1 \neq 0$, используя формулу

$$\begin{aligned} L\,dl + G\,dg + H\,dh + K\,dk &= \\ &= \Theta_1\,d\theta + \Theta_2\,dg + \Theta_3\,dh + \Theta_4\,dk = \\ &= p_1\Theta_1\,dl + (\Theta_2 + p_2\Theta_1)\,dg + (\Theta_3 + p_3\Theta_1)\,dh + (\Theta_4 + p_4\Theta_1)\,dk. \end{aligned}$$

Это дает

$$\Theta_1 = \frac{L}{p_1}, \qquad \Theta_2 = G - \frac{p_2}{p_1}L,$$
$$\Theta_3 = H - \frac{p_3}{p_1}L, \quad \Theta_4 = K - \frac{p_4}{p_1}L,$$

или

$$L = p_1\Theta_1, \quad G = \Theta_2 + p_2\Theta_1, \quad H = \Theta_3 + p_3\Theta_1, \quad K = \Theta_4 + p_4\Theta_1. \tag{13}$$

Если $p_1=0$ и $p_4 \neq 0$, то l отсутствует в θ и k может играть ту же роль, что и l в случае, когда $p_1 \neq 0$; члены с $p_1 = p_4 = 0$ представляют отдельную задачу.

Новые уравнения для задачи с преобразованием $F \longrightarrow \bar{F}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_1}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_1}, \\ \frac{d\Theta_2}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_2}, \\ \frac{d\Theta_3}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_3}, \\ \frac{d\Theta_4}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_4}. \end{aligned} \tag{14}$$

Из этих уравнений, поскольку $\bar{F}$ является функцией от Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, θ, вытекает, что

$$\Theta_2 = \text{const} \quad \Theta_3 = \text{const}, \quad \Theta_4 = \text{const}.$$

Поэтому эта система уравнений на самом деле сводится к системе с одной степенью свободы

$$\frac{d\Theta_1}{dt}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_1}, \tag{15}$$

в которой $\bar{F}\equiv\bar{F}(\Theta_1, \theta)$ с Θ_2, Θ_3, Θ_4, входящими в качестве постоянных. После того как эти уравнения разрешены, так что Θ_1 и θ известны как функции от времени и двух постоянных интегрирования, переменные g, h, k могут быть найдены при помощи квадратур. Решение относительно k является тривиальным. Поскольку $\partial F/\partial\Theta_4=\partial F/\partial K=$ $=-\nu$, то k останется равным $\nu t+\mathrm{const}$, как и следовало ожидать.

Для того чтобы упростить обозначения, напишем x вместо Θ_1, y вместо θ. Тогда уравнения этой задачи могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial x},$$

$$\bar{F}\equiv F_0+P_1(x)+Q_1(x)\cos(y).$$

Эти уравнения допускают следующий интеграл:

$$\bar{F}=C=\mathrm{const}.$$

Чтобы исследовать форму решения, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}=-Q_1(x)\sin y,$$

которое показывает, что x как функция от t будет иметь минимумы или максимумы при $y=j\pi$; если имеются максимумы для $y=0$, 2π, ..., то минимумы существуют для $y=\pi$, 3π, ... или наоборот. Поэтому максимальные и минимальные значения x могут быть найдены из уравнений

$$C=F_0+P_1+Q_1,$$
$$C=F_0+P_1-Q_1.$$

Пусть такими значениями x будут $x_{\min}$ и $x_{\max}$. Тогда для частных значений y могут быть найдены значения x в этом интервале, которые удовлетворяют интегралу $\bar{F}=C$. Поскольку уравнение, из которого необходимо найти x, не изменяется, если y изменить на $-y$, то очевидно, что x является четной функцией от y с периодом 2π. Следовательно, x можно представить следующим рядом Фурье:

$$x=a_0+a_1\cos y+a_2\cos 2y+\ \dots\ .$$

Далее, уравнение

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}=-\frac{\partial F_0}{\partial x}-\frac{dP_1}{dx}-\frac{dQ_1}{dx}\cos y$$

дает

$$\frac{dy}{dt}=b_0+b_1\cos y+b_2\cos 2y+\ \dots\ ,$$

откуда получаем уравнение

$$dt=\frac{dy}{b_0+b_1\cos y+b_2\cos 2y+\ \dots}, \tag{16}$$

которое можно написать в следующем виде:

$$dt = (\beta_0 + \beta_1 \cos y + \beta_2 \cos 2y + \ \dots) \, dy \tag{17}$$

при условии, что знаменатель в правой части уравнения (16) не обращается в нуль для любого действительного значения y. Выполнение этого условия обеспечивается, если для всего интервала значений x, $x_{\min} < x < x_{\max}$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{dF_0}{dx} + \frac{dP_1}{dx} \right| > \left| \frac{dQ_1}{dx} \right| .$$

Если справедливо уравнение (17), то интегрирование дает

$$t + c = \beta_0 y + \beta_1 \sin y + \frac{1}{2} \beta_2 \sin 2y + \ \dots ,$$

или

$$\begin{aligned} y &= \frac{t+c}{\beta_0} + Y_1 \sin \frac{t+c}{\beta_0} + Y_2 \sin 2 \frac{t+c}{\beta_0} + \ \dots = \\ &= \varkappa t + \gamma + Y_1 \sin(\varkappa t + \gamma) + Y_2 \sin 2 (\varkappa t + \gamma) + \ \dots . \end{aligned} \tag{18}$$

Когда это разложение подставлено в выражение для x, то получается

$$x = X_0 + X_1 \cos (\varkappa t + \gamma) + X_2 \cos 2 (\varkappa t + \gamma) + \ \dots . \tag{19}$$

Это и есть форма решения, при котором угловая переменная y изменяется на полный оборот. Это единственный тип решения, который будет рассмотрен в данном разделе. Остается получить этот результат в виде такого канонического преобразования x, $y \to x'$, y', что

$$\overline{F}(x, y) = \overline{F}^*(x')$$

с преобразованными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial y'} = 0, \quad \frac{dy'}{dt} = - \frac{\partial \overline{F}^*}{\partial x'} = \text{const}.$$

Очевидно, что новой переменной y' является линейная функция от t

$$y' = \varkappa t + \gamma.$$

Поэтому это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} y &= y' + Y_1 \sin y' + Y_2 \sin 2y' + \ \dots, \\ x &= X_0 + X_1 \cos y' + X_2 \cos 2y' + \ \dots, \end{aligned} \tag{20}$$

в котором коэффициенты Y_1, Y_2, $\dots, X_0$, X_1, $\dots$ могут быть функциями только от x' (а не от y').

Условие того, что это преобразование должно быть каноническим, будет следующим:

$$J \equiv \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} = +1.$$

Можно заметить, что тогда как соответствующее условие является необходимым условием при любом числе степеней свободы, оно является также достаточным в задачах с одной степенью свободы. Подстановка разложений (20) в J дает

$$\left[\frac{dX_0}{dx'}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{dX_j}{dx'}\cos jy'\right]\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}jY_j\cos jy'\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}jX_j\sin jy'\sum_{j=1}^{\infty}\frac{dY_j}{dx'}\sin jy'=+1.$$

Левую часть этого выражения можно разложить в ряд по косинусам дуг, кратных y'. Поскольку это соотношение должно сохранять силу для всех значений y', то необходимо, чтобы коэффициенты всех косинусоидальных членов обратились в нуль и чтобы постоянный член этого ряда был равен $+1$. Этот постоянный член имеет вид

$$\frac{dX_0}{dx'}+\frac{1}{2}\sum jY_j\frac{dX_j}{dx'}+\frac{1}{2}\sum jX_j\frac{dY_j}{dx'}=$$
$$=\frac{d}{dx'}\left[X_0+\frac{1}{2}\sum jX_jY_j\right]=+1.$$

Это уравнение удовлетворяется следующим разложением:

$$x'=X_0+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}jX_jY_j. \tag{21}$$

Произвольная постоянная интегрирования, прибавляемая к X_0 (или x'), не представляет никакого интереса, так как сама величина x' является произвольной постоянной этой задачи.

Это и составляет суть преобразования Делонэ. Рассмотренный нами вопрос касался установления формы решения и нахождения разложения (21). В приложениях теории Делонэ принимают указанную форму решения, а коэффициенты X_0, X_2, X_2, ..., Y_1, Y_2, ... получаются посредством процесса последовательных приближений.

Возвращаясь теперь к старым обозначениям, легко видеть, что результатом преобразования Делонэ является следующая система новых канонических переменных:

$$\begin{aligned}L'&=p_1x',\\ G'&=\Theta_2+p_2x',\\ H'&=\Theta_3+p_3x',\\ K'&=\Theta_4+p_4x'.\end{aligned}$$

Соотношения между старыми и новыми переменными имеют вид

$$\begin{aligned}L&=L'+p_1\varphi(x',y'),\\ G&=G'+p_2\varphi(x',y'),\\ H&=H'+p_3\varphi(x',y'),\\ K&=K'+p_4\varphi(x',y');\end{aligned} \tag{22}$$

$$\varphi(x',y')=x-x'=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}jX_jY_j+\sum_{j=1}^{\infty}X_j\cos jy'. \tag{23}$$

Остается получить новые переменные l', g', h', k', которые вместе с L', G', H', K' образуют каноническую систему. Частные производные от $\bar{F}$ по L, G, H могут быть выражены при помощи соотношений (22) через переменные Θ_1 и θ (или x и y во временных обозначениях). Как только эти переменные становятся известными функциями t, переменные l, g, h получаются посредством квадратур. Очевидно, как и ранее, $k = \nu t + \text{const}$.

Результат интегрирования получается в виде соотношений

$$\begin{aligned} l &= l' + \sum l'_j \sin jy', \\ g &= g' + \sum g'_j \sin jy', \\ h &= h' + \sum h'_j \sin jy', \\ k &= k', \end{aligned} \tag{24}$$

в которых l', g', h', k' являются новыми переменными. Коэффициенты синусоидальных членов являются функциями от x' и поэтому будут постоянными в задаче с функцией $\bar{F}$ в качестве гамильтониана. Соотношения

$$p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k = \theta,$$
$$p_1 l' + p_2 g' + p_3 h' + p_4 k' = y'$$

удовлетворены. Значения dl'/dt, dg'/dt, ..., выраженные через новые переменные, легко получаются из преобразованного гамильтониана $\bar{F}^*$.

Следующий шаг состоит в применении этого преобразования к остальным членам R, после чего можно начать следующее преобразование.

9. Решение задачи Делонэ путем нахождения определяющей функции. В этом разделе мы обозначим переменные

$$L,\ G,\ H,\ K,\quad l,\ g,\ h,\ k$$

через

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\quad l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4.$$

Поэтому уравнения задачи Делонэ принимают следующий вид:

$$\frac{dL_j}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l_j}, \quad \frac{dl_j}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L_j},$$

где

$$\bar{F} = F_0 + \bar{F}_1,$$

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L_1^2} - \nu L_4,$$

$$\bar{F}_1 = P_1 + Q_1 \cos(p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4) = P_1 + Q_1 \cos\theta,$$

где P_1, Q_1 — функции от L_1, L_2, L_3 (переменная L_4 входит только в F_0).

Задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо совершить такое преобразование от переменных L_j; l_j к переменным L'_j; l'_j при помощи определяющей функции $S(L'_j; l_j)$, чтобы новый гамильтониан стал функцией только от переменных L'_1, L'_2, L'_3, L'_4.

В теории движения Луны функция F_1 имеет множитель ν^2/n^2, который мал по сравнению с главным членом $\frac{1}{2}\ \mu^2 L_1^{-2} = \frac{1}{2}\mu a^{-1} = \frac{1}{2}\ n^2 a^2$. Присутствие этого малого множителя указывается приписыванием нижнего индекса 1 функции $\overline{F}_1$ и коэффициентам P_1, Q_1.

Разложим теперь определяющую функцию S по степеням этой же малой величины:

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots .$$

За S_0 необходимо выбрать

$$S_0 = L_1' l_1 + L_2' l_2 + L_3' l_3 + L_4' l_4,$$

чтобы, ограничивая функцию S членом S_0, получить просто тождественное преобразование вида

$$L_j = \frac{\partial S_0}{\partial l_j} = L_j', \quad l_j' = \frac{\partial S_0}{\partial L_j'} = l_j.$$

Гамильтониан не изменится при этом преобразовании; следовательно,

$$\overline{F}(L_j;\ l_j) = \overline{F}^* (L_j'), \tag{25}$$

где $\overline{F}^*$ есть новый гамильтониан, который должен быть функцией только от переменных L_j' и не содержать переменных l_j'. Записывая более подробно, получаем

$$F_0 (L_1,\ L_4) + \overline{F}_1 (L_1,\ L_2,\ L_3,\ \theta) = F^* (L_1',\ L_2',\ L_3',\ L_4').$$

Подставим в обеих частях этого уравнения

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots ,$$

$$L_j = \frac{\partial S}{\partial l_j}, \quad l_j' = \frac{\partial S}{\partial L_j'} .$$

Тогда

$$F_0\left(L_1' + \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \ldots,\ L_4' + \frac{\partial S_1}{\partial l_4} + \frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \ldots\right) +$$
$$+ \overline{F}_1\left(L_1' + \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \ldots, L_2' + \frac{\partial S_1}{\partial l_2} + \ldots, L_3' + \frac{\partial S_1}{\partial l_3} + \ldots, \theta\right) = F_0^* + \overline{F}_1^* + \overline{F}_2^*.$$

Разлагая в ряд по теореме Тэйлора и собирая члены соответствующих порядков в обеих частях, находим

$$F_0 (L_1',\ L_4') = F_0^*,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_1'} \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L_4'} \frac{\partial S_1}{\partial l_4} + \overline{F}_1 (L_1',\ L_2',\ L_3',\ \theta) = \overline{F}_1^*,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_1'} \frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L_4'} \frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l_1}\right)^2 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial L_j'} \frac{\partial S_1}{\partial l_j} = \overline{F}_2^*.$$

Это разложение может быть продолжено неограниченно.

Обозначения упростились, оставаясь тем не менее однозначными. Например, $\partial\overline{F}_1/\partial L_1'$ означает $\partial\overline{F}_1/\partial L_1$ с L_1, L_2, ..., замененными на L_1', L_2', ... Аналогично P_1' будет означать P_1 (функцию от L_1, L_2, L_3), в которой L_1, L_2, L_3 заменены на L_1', L_2', L_3'.

Из выражения для F_0 следует, что

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_1'} = -\frac{\mu^2}{L_1'^3} = -n', \qquad \frac{\partial F_0}{\partial L_4'} = -\nu, \qquad \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1'^2} = \frac{3\mu^2}{L_1'^4} = \frac{3n'}{L'}.$$

Поэтому члены первого порядка дают

$$-n'\frac{\partial S_1}{\partial l_1} - \nu\frac{\partial S_1}{\partial l_4} + P_1' + Q_1'\cos\theta = \overline{F}_1^*.$$

Это уравнение эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$P_1' = \overline{F}_1^*,$$

$$n'\frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \nu\frac{\partial S_1}{\partial l_4} = Q_1'\cos\theta,$$

последнее из которых требует, чтобы

$$S_1 = \frac{Q_1'}{p_1 n' + p_4 \nu}\sin\theta, \tag{26}$$

так что

$$\frac{\partial S_1}{\partial l_j} = \frac{p_j Q_1'}{p_1 n' + p_4\nu}\cos\theta.$$

Члены второго порядка дают

$$-n'\frac{\partial S_2}{\partial l_1} - \nu\frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \frac{3}{2}\frac{n'}{L_1'}\frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4\nu)^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] +$$
$$+ \frac{Q_1'}{p_1 n' + p_4\nu}\sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial P_1}{\partial L_j'}\cos\theta +$$
$$+ \frac{Q_1'}{p_2 n' + p_4\nu}\sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial Q_1}{\partial L_j'}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] = \overline{F}_2^*.$$

Это уравнение позволяет выразить $\overline{F}_2^*$ посредством членов, независящих от θ, в следующем виде:

$$\overline{F}_2^* = \frac{3}{4}\frac{n'}{L_1'}\frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4\nu)^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_1'}{p_1 n' + p_4\nu}\sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial Q_1}{\partial L_j'}$$

и определяет функцию S_2 следующим образом:

$$n'\frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \nu\frac{\partial S_2}{\partial l_4} = \frac{Q_1'}{p_1 n' + p_4\nu}\sum_{j=1}^{3} p_j\frac{\partial P_1}{\partial L_j'}\cos\theta +$$
$$+ \left[\frac{3}{4}\frac{n'}{L_1'}\frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4\nu)^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_1'}{p_1 n' + p_4\nu}\sum_{j=1}^{3} p_j\frac{\partial Q_1}{\partial L_j'}\right]\cos 2\theta.$$

В результате получается

$$S_2 = \frac{Q_1'}{(p_1 n' + p_4\nu)^2}\sum_{j=1}^{3} p_j\frac{\partial P_1}{\partial L_j'}\sin\theta +$$
$$+ \left[\frac{3}{8}\frac{n'}{L_1'}\frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4\nu)^3} + \frac{1}{4}\frac{Q_1'}{(p_1 n' + p_4\nu)^2}\sum_{j=1}^{3} p_j\frac{\partial Q_1}{\partial L_j'}\right]\sin 2\theta.$$

Тогда решение с точностью до второго порядка имеет вид

$$L_j = L'_j + \frac{\partial S_1}{\partial l_j} + \frac{\partial S_2}{\partial l_j} + \ldots,$$

$$l'_j = l_j + \frac{\partial S_1}{\partial L'_j} + \frac{\partial S_2}{\partial L'_j} + \ldots, \quad (j = 1,\ 2,\ 3),$$

$$l'_4 = l_4.$$

Это решение дает L_j, l'_j в виде функций от L'_j, θ. Остается получить явные выражения для L_j, l_j через L'_j и $\theta' = p_1 l'_1 + p_2 l'_2 + p_3 l'_3 + p_4 l'_4$ и произвести подстановку этого решения в члены гамильтониана, которые не были включены в $\overline{F}$.

Для того чтобы знаменатель $p_1 n' + p_4 \nu$, присутствующий в S, не был равен нулю, следует предположить, что рассматриваются только такие аргументы θ, для которых коэффициенты p_1 и p_4 не равны оба нулю. Однако этот знаменатель может быть меньше любого наперед заданного значения, если для рассматриваемой частной задачи отношение ν/n' настолько близко к отношению двух целых чисел q/r, что для $p_1 = \alpha q$, $p_4 = -\alpha r$, где α — положительное целое число, значение $p_1 n' + p_4 \nu$ мало по сравнению с ν. Аргументы θ, для которых это имеет место, также должны быть исключены.

В теории движения Луны малые делители этого типа не играют никакой практической роли, однако в других задачах небесной механики, которые встречаются в солнечной системе, они значительны и могут определить характер движения.

Цель последовательности преобразований заключается в том, чтобы исключить из F до нужного порядка все аргументы θ, которые не были устранены по соображениям, указанным выше. Получающаяся при этом система уравнений все еще содержит в себе основные трудности задачи. Тем не менее число степеней свободы уменьшилось, а сами уравнения не загромождены несущественными членами.

При решении основной задачи теории движения Луны можно выделить три различных этапа. На первом этапе могут быть исключены члены, содержащие в аргументе l. Разложение решения ведется по степеням $(\nu/n)^2$. Второй этап связан с исключением членов, не зависящих от l, но содержащих в аргументе k. Решение относительно этих членов ведется по степеням ν/n. На третьем этапе остаются только аргументы g и h. Поскольку F_0 не зависит от G и H, то гамильтониан в действительности имеет множителем $\nu^2 a^2$. Тем не менее исключение g и h может быть достигнуто по существу тем же методом, который был использован для исключения аргументов l и k. После этого этапа гамильтониан не зависит от угловых переменных, и задача, следовательно, решена полностью.

Окончательный гамильтониан дает непосредственно движения перигея и узлов. Эти движения представляют особенный интерес и имеют важное значение из-за того, что они могут быть сравнены с наблюдениями более точно, чем коэффициенты периодических членов. Точность, с которой та или иная теория движения Луны дает теоретические значения для движений перигея и узла, является поэтому важным критерием пригодности всей этой теории в целом.

10. Пример преобразования Делонэ. Первая из последовательности операций, как Делонэ называл свои преобразования, не является типичной. Она связана с исключением членов с аргументами вида $p_4 k$. Вторая операция связана с исключением единственного члена с аргументом l. Эта операция представляет собой типичный пример исключения члена, имеющего множителем первую степень e, если отвлечься от очевидного упрощения, обусловленного тем, что $\theta = l$. Для краткости рассмотрим эту операцию в предположении, что γ, $\varepsilon (= e')$ и $a/a_{\odot}$ равны нулю. Это не повлияет на характерные особенности задачи.

Для этой первой операции гамильтониан рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$\overline{F} = F_0 + P_1 + Q_1 \cos l,$$

где

$$F_0 = \frac{\mu}{2a} = \frac{\mu^2}{2L^2},$$

$$P_1 = \nu^2 a^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 \right],$$

$$Q_1 = \nu^2 a^2 \left[-\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 - \frac{1}{384} e^5 \right].$$

Поскольку $k (= l')$ не присутствует в аргументе, то не обязательно включать в F_0 член $-\nu K$.

Необходимо проинтегрировать следующие уравнения:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial l} = -Q_1 \sin l,$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial L} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial a}\frac{da}{dL} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial e}\frac{de}{dL} =$$

$$= -2a^{1/2}\mu^{-1/2}\frac{\partial \overline{F}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e} a^{-1/2}\mu^{-1/2}\frac{\partial \overline{F}}{\partial e} =$$

$$= n + \frac{\nu^2}{n}\left[-\frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2} + \frac{21}{16}e^2 - \frac{19}{384}e^4\right)\cos l \right], \tag{27}$$

в которых использовано следующее соотношение:

$$n = a^{-3/2}\mu^{1/2} = L^{-3}\mu^2.$$

Поскольку $G = \text{const}$, то соотношение

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}$$

дает

$$\frac{de}{dt} = \frac{G^2}{L^3 e}\frac{dL}{dt} =$$

$$= \frac{1-e^2}{e} a^{-1/2}\mu^{-1/2}\frac{dL}{dt},$$

или

$$\frac{de}{dt} = \frac{\nu^2}{n}(1-e^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}e^2 + \frac{1}{384}e^4\right)\sin l. \tag{28}$$

Уравнения (27) и (28) равносильны уравнениям, заданным первоначально. В этих уравнениях, кроме e и l, присутствует n; но n можно выразить через G и e посредством соотношения

$$n = G^{-3}\mu^2(1-e^2)^{3/2}.$$

При помощи этой замены уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\mu^2}{G^3}(1-e^2)^{3/2}+\frac{\nu^2G^3}{\mu^2}\left[\left(-\frac{7}{4}-\frac{3}{4}e^2\right)(1-e^2)^{-3/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-e^2)^{-3/2}}{e}\left(\frac{1}{2}+\frac{21}{16}e^2-\frac{19}{384}e^4\right)\cos l\right],$$
$$\frac{de}{dt}=\frac{\nu^2G^3}{\mu^2}(1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}e^2+\frac{1}{384}e^4\right)\sin l,$$

или

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\mu^2}{G^3}\left(1-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4\right)+$$
$$+\frac{\nu^2G^3}{\mu^2}\left[-\frac{7}{4}-\frac{27}{8}e^2+\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}+\frac{33}{16}e^2+\frac{1097}{384}e^4\right)\cos l\right], \tag{29}$$
$$\frac{de}{dt}=\frac{\nu^2G^3}{\mu^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{16}e^2+\frac{61}{384}e^4\right]\sin l. \tag{30}$$

Делонэ получает решение этих уравнений в следующей форме:

$$e\cos l=-\left(\frac{1}{2}+\frac{21}{8}e_0^2+\frac{805}{128}e_0^4\right)\frac{\nu^2G^6}{\mu^4}-$$
$$-\left(\frac{7}{8}+\frac{339}{32}e_0^2\right)\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}-\frac{143}{64}\frac{\nu^6G^{18}}{\mu^{12}}+$$
$$+\left[e_0+\left(\frac{15}{16}e_0+\frac{371}{64}e_0^3\right)\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}+\frac{153}{32}e_0\frac{\nu^6G^{18}}{\mu^{12}}\right]\cos l'+$$
$$+\left[\left(\frac{27}{16}e_0^2+\frac{943}{192}e_0^4\right)\frac{\nu^2G^6}{\mu^4}+\frac{381}{64}e_0^2\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}\right]\cos 2l'+$$
$$+\frac{847}{384}e_0^3\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}\cos 3l', \tag{31}$$

$$e\sin l=e_0\sin l'+$$
$$+\left[\left(\frac{27}{16}e_0^2+\frac{943}{192}e_0^4\right)\frac{\nu^2G^6}{\mu^4}+\frac{381}{64}e_0^2\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}\right]\sin 2l'+$$
$$+\frac{847}{384}e_0^3\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}\sin 3l', \tag{32}$$

где l' определяется уравнением

$$\frac{dl'}{dt}=\frac{\mu^2}{G^3}\left[1-\frac{3}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4-\left(\frac{7}{4}+\frac{27}{8}e_0^2\right)\frac{\nu^2G^6}{\mu^4}-\frac{9}{4}\frac{\nu^4G^{12}}{\mu^8}\right].$$

Смысл величины e_0 определяется тем фактом, что она представляет собой коэффициент при $\sin l'$ в выражении для $e\sin l$.

Решение (31), (32) дает выражение для e^2, которое, будучи подставленным в

$$a=\frac{G^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2},$$

дает для a следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
a = \frac{G^2}{\mu}\Big\{1 &+ e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 + e_0^8 + \\
&+ \left(\frac{1}{4} + \frac{73}{16}e_0^2 + \frac{8467}{256}e_0^4\right)\frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \\
&+ \left(\frac{7}{8} + \frac{751}{32}e_0^2\right)\frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}} + \frac{49}{16}\frac{\nu^8 G^{24}}{\mu^{16}} - \\
&- \Big[\left(e_0 + \frac{31}{8}e_0^3 + \frac{1825}{192}e_0^5\right)\frac{\nu^2 G^6}{\mu^4} + \\
&+ \left(\frac{7}{4}e_0 + \frac{409}{32}e_0^3\right)\frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \\
&+ \frac{189}{32}e_0\frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}}\Big]\cos l' - \\
&- \Big[\left(\frac{1}{4}e_0^2 + \frac{27}{16}e_0^4\right)\frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \\
&+ \frac{19}{8}e_0^2\frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}}\Big]\cos 2l'\Big\}.
\end{aligned}
$$

Постоянная часть этого выражения обозначается через a_0. Из нее можно получить G как функцию от a_0:

$$
\begin{aligned}
G = \sqrt{\mu a_0}\Big[\sqrt{1-e_0^2} &- \left(\frac{1}{8} + \frac{43}{32}e_0^2 + \frac{1267}{512}e_0^4\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} - \\
&- \left(\frac{7}{16} + \frac{457}{64}e_0^2\right)\frac{\nu^6}{n_0^6} - \frac{169}{128}\frac{\nu^8}{n_0^8}\Big], \qquad (33)
\end{aligned}
$$

где

$$n_0 = a_0^{-3/2}\mu^{1/2}.$$

Подставляя этот результат в выражения для $e\cos l$, $e\sin l$ и a, получаем

$$
\begin{aligned}
e\cos l = &-\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{8}e_0^2 - \frac{11}{128}e_0^4\right)\frac{\nu^2}{n_0^2} - \\
&- \left(\frac{7}{8} + \frac{171}{32}e_0^2\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} - \frac{119}{64}\frac{\nu^6}{n_0^6} + \\
&+ \left[e_0 + \left(\frac{15}{16}e_0 + \frac{11}{64}e_0^3\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} + \frac{153}{32}e_0\frac{\nu^6}{n_0^6}\right]\cos l' + \\
&+ \left[\left(\frac{27}{16}e_0^2 - \frac{29}{192}e_0^4\right)\frac{\nu^2}{n_0^2} + \frac{381}{64}e_0^2\frac{\nu^4}{n_0^4}\right]\cos 2l' + \\
&+ \frac{847}{384}e_0^3\frac{\nu^4}{n_0^4}\cos 3l', \qquad (34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e\sin l = e_0 \sin l' &+ \\
&+ \left[\left(\frac{27}{16}e_0^2 - \frac{29}{192}e_0^4\right)\frac{\nu^2}{n_0^2} + \frac{381}{64}e_0^2\frac{\nu^4}{n_0^4}\right]\sin 2l' + \\
&+ \frac{847}{384}e_0^3\frac{\nu^4}{n_0^4}\sin 3l', \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a = a_0\Big\{1 &- \Big[\left(e_0 - \frac{1}{8}e_0^3 + \frac{1}{192}e_0^5\right)\frac{\nu^2}{n_0^2} + \left(\frac{7}{4}e_0 + \frac{17}{32}e_0^3\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} + \\
&+ \frac{157}{32}e_0\frac{\nu^6}{n_0^6}\Big]\cos l' - \Big[\left(\frac{1}{4}e_0^2 - \frac{1}{16}e_0^4\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} + \frac{19}{8}e_0^2\frac{\nu^6}{n_0^6}\Big]\cos 2l'\Big\}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Кроме того, имеем

$$\frac{dl'}{dt}=n_0\left[1-\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}e_0^2\right)\frac{\nu^2}{n_0^2}-\frac{15}{8}\frac{\nu^4}{n_0^4}\right],$$

тогда как решение относительно l из $e\cos l$, $e\sin l$ дает

$$\begin{aligned}l=l'+\frac{1}{e_0}\Bigg[\left(\frac{1}{2}+\frac{45}{16}e_0^2-\frac{91}{384}e_0^4\right)\frac{\nu^2}{n_0^2}+\\+\left(\frac{7}{8}+\frac{723}{64}e_0^2\right)\frac{\nu^4}{n_0^4}+\frac{77}{64}\frac{\nu^6}{n_0^6}\Bigg]\sin l'+\\+\left(\frac{1}{e_0^2}\right)\frac{1}{8}\frac{\nu^4}{n_0^4}\sin 2l'.\end{aligned}$$

Появление e_0 в качестве делителя в выражении для l представляет собой распространенное явление в теории возмущений. Оно связано с неопределенностью перигея в случае круговых орбит. Подобная неопределенность существует также в выражении для g. Однако это не влияет ни на среднюю долготу $h+g+l$, ни на истинную долготу.

Дифференциальные уравнения дают

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(h+g+l)=n-\frac{\nu^2}{n}\left(1+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{32}e^4\right)+\\+\frac{\nu^2}{n}\left(\frac{7}{4}e-\frac{3}{32}e^3+\frac{3}{256}e^5\right)\cos l,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\nu^2}{n}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}e^2\right)+\frac{\nu^2}{n}\left(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3\right)\cos l.$$

Если в этих выражениях заменить a, e, l их выражениями через a_0, e_0, l', то получим

$$\begin{aligned}h+g+l=h'+g'+l'+\\+\Bigg[\left(\frac{13}{4}e_0-\frac{9}{32}e_0^3+\frac{5}{256}e_0^5\right)\frac{\nu^2}{n_0^2}+\left(\frac{175}{16}e_0+\frac{405}{128}e_0^3\right)\frac{\nu^4}{n_0^4}+\\+\frac{1283}{32}e_0\frac{\nu^6}{n_0^6}\Bigg]\sin l'+\frac{3}{2}e_0^2\frac{\nu^4}{n_0^4}\sin 2l',\end{aligned}$$

$$h=h'+\left[\left(\frac{3}{2}e_0+\frac{9}{16}e_0^3\right)\frac{\nu^2}{n_0^2}+\frac{21}{4}e_0\frac{\nu^4}{n_0^4}\right]\sin l'+\frac{9}{16}e_0^2\frac{\nu^4}{n_0^4}\sin 2l'.$$

Наконец, если выражение для e^2, найденное из (34) и (35), подставить в соотношение

$$L=G\,(1-e^2)^{-1/2},$$

то получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}L=\sqrt{a_0\mu}\,\Bigg\{1-\left(\frac{1}{16}e_0^2-\frac{1}{64}e_0^4\right)\frac{\nu^4}{n_0^4}-\frac{7}{32}e_0^2\frac{\nu^6}{n_0^6}-\\-\left[\left(\frac{1}{2}e_0-\frac{1}{16}e_0^3+\frac{1}{384}e_0^5\right)\frac{\nu^2}{n_0^2}+\left(\frac{7}{8}e_0+\frac{17}{64}e_0^3\right)\frac{\nu^4}{n_0^4}+\frac{157}{64}e_0\frac{\nu^6}{n_0^6}\right]\cos l'-\\-\frac{3}{16}e_0^2\frac{\nu^4}{n_0^4}\cos 2l'\Bigg\}.\end{aligned}$$

Если L и l записаны в виде

$$L=L_0+L_1\cos l'+L_2\cos 2l'+\ldots,$$
$$l=l'+l_1\sin l'+l_2\sin 2l'+\ldots$$

и если в соответствии с формулой (21) разд. 8

$$L' = L_0 + \frac{1}{2}(L_1 l_1 + 2L_2 l_2 + \ldots) =$$
$$= L_0\left[1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e_0^2 - \frac{83}{512}e_0^4\right)\frac{\nu^4}{n_0^4} - \left(\frac{7}{16} + \frac{69}{16}e_0^2\right)\frac{\nu^6}{n_0^6} - \frac{169}{128}\frac{\nu^8}{n_0^8}\right],$$

то

$$L',\ G,\ H, \qquad l',\ g',\ h'$$

будут новыми каноническими переменными в задаче, в которой гамильтониан является функцией только от L', G, H. Справедливость этого проверяется путем подстановки решения в $\bar{F}$. Это дает

$$\bar{F}^* = \frac{\mu}{a_0}\left\{\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{n_0^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e_0^2\right) + \frac{\nu^4}{n_0^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e_0^2 - \frac{67}{256}e_0^4\right) + \ldots\right\}.$$

Затем подстановка производится во все остальные члены функции F. После этого можно предпринять следующую операцию.

11. Решение этой же задачи при помощи определяющей функции. Гамильтониан тот же, что и в предыдущем разделе. Пусть S означает определяющую функцию, разложенную в ряд по степеням ν^2, и пусть

$$\begin{aligned} &S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots, \\ &S_0 = L'l + G'g + H'h, \\ &L = \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g} = G', \quad H = \frac{\partial S}{\partial h} = H', \\ &l' = \frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}. \end{aligned} \tag{37}$$

Разность $S - S_0$ будет функцией от L', G', H', l.

Пусть гамильтониан преобразован в функцию от L', G', H'. Тогда

$$\bar{F}(L,\ G,\ H,\ l) = \bar{F}^*(L',\ G',\ H').$$

Подстановка уравнений (37) в левую часть этого уравнения дает с точностью до членов второго порядка

$$F_0\left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}\right) + \bar{F}_1\left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l},\ G',\ H',\ l\right) = F_0^* + \bar{F}_1^* + \bar{F}_2^*,$$

или, согласно разложению в ряд Тэйлора, находим

$$\begin{aligned} &F_0(L') = F_0^*, \\ &\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} + \bar{F}_1 = \bar{F}_1^*, \\ &\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} = \bar{F}_2^*. \end{aligned}$$

Подстановка в часть функции $\bar{F}$, содержащую члены первого порядка,

$$\bar{F}_1 = P_1 + Q_1 \cos l$$

дает

$$\bar{F}_1^* = P_1' = \frac{\nu^2}{n'} L' \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e'^2 \right),$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{Q_1}{n'} \cos l =$$

$$= \frac{\nu^2}{n'^2} L' \left(-\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 - \frac{1}{384} e'^5 \right) \cos l,$$

$$S_1 = \frac{\nu^2}{n'^2} L' \left(-\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 - \frac{1}{384} e'^5 \right) \sin l.$$

Члены второго порядка дают

$$-n' \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{3}{2} \frac{n'}{L'} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial L'} + \frac{\partial Q_1}{\partial L'} \cos l \right) \frac{\partial S_1}{\partial l} = \bar{F}_2^*.$$

Находим, что

$$\frac{\partial P_1}{\partial L'} = \frac{\nu^2}{n'} \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4} e'^2 \right),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial L'} = \frac{\nu^2}{n'} \left(-\frac{1}{2e} - \frac{21}{16} e + \frac{19}{384} e'^3 \right).$$

Подставляя эти выражения, получаем

$$\bar{F}_2^* = \frac{\nu^4}{n'^3} L' \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{51}{512} e'^4 \right),$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial l} = \frac{\nu^4}{n'^4} L' \left[\left(-\frac{7}{8} e' - \frac{17}{64} e'^3 + \frac{65}{1536} e'^5 \right) \cos l + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{51}{512} e'^4 \right) \cos 2l \right],$$

$$S_2 = \frac{\nu^4}{n'^4} L' \left[\left(-\frac{7}{8} e' - \frac{17}{64} e'^3 + \frac{65}{1536} e'^5 \right) \sin l + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} e'^2 - \frac{51}{1024} e'^4 \right) \sin 2l \right].$$

В этих выражениях штрихованные величины n', e' связаны с новыми переменными следующими соотношениями:

$$n' = \frac{\mu^2}{L'^3}, \qquad e'^2 = 1 - \frac{G'^2}{L'^2},$$

так что

$$\frac{\partial n'}{\partial L'} = -\frac{3\mu^2}{L'^4}, \qquad \frac{\partial e'}{\partial L'} = \frac{G'^2}{e' L'^3} = \frac{1 - e'^2}{e' L'},$$

$$\frac{\partial e'}{\partial G'} = \frac{-G'}{e' L'^2} = -\frac{(1 - e'^2)^{1/2}}{e' L'}.$$

При помощи этих соотношений могут быть без труда получены производные от S по L', G', а следовательно, и решение.

В качестве примера мы получаем

$$\frac{\partial S}{\partial L'} = l' = l - \frac{\nu^2}{n'^2} \left(\frac{1}{2e'} + \frac{45}{16} e' - \frac{91}{384} e'^3 \right) \sin l -$$

$$- \frac{\nu^4}{n'^4} \left(\frac{7}{8e'} + \frac{723}{64} e' + \frac{3755}{1536} e'^3 \right) \sin l +$$

$$+ \frac{\nu^4}{n'^4} \left(\frac{21}{16} + \frac{653}{256} e'^2 \right) \sin 2l.$$

Это уравнение несколько более общего типа, чем уравнение Кеплера. Решение относительно l и функций от l, выраженных через l', можно получить при помощи разложения Лагранжа. С точностью до четвертой степени это решение имеет следующий вид:

$$l = l' + \left[\frac{\nu^2}{n'^2}\left(\frac{1}{2e'} + \frac{45}{16}e' - \frac{91}{384}e'^3\right) + \frac{\nu^4}{n'^4}\left(\frac{7}{8e'} + \frac{723}{64}e' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3755}{1536}e'^3\right)\right]\sin l' + \frac{\nu^4}{n'^4}\left(\frac{1}{8e'^2} + \frac{3}{32} + \frac{1975}{1536}e'^2\right)\sin 2l'.$$

Новый гамильтониан выражается через новые переменные следующим образом:

$$\bar{F}^* = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\nu^2}{n'}L'\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e'^2\right) +$$
$$+ \frac{\nu^4}{n'^3}L'\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}e'^2 - \frac{51}{512}e'^4\right) + \ldots,$$

тогда как решение Делонэ дает для соответствующих членов

$$F^* = \frac{\mu}{2a_0} + \nu^2 a_0^2\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{\nu^2}{n_0^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e_0^2 - \frac{67}{256}e_0^4\right) + \ldots\right].$$

Можно показать, что эти два выражения тождественны друг другу. Из решения Делонэ находим

$$a_0 = a'\left[1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{83}{256}e'^4\right)\frac{\nu^4}{n'^4} + \ldots\right],$$
$$e_0^2 = e'^2\left[1 - \left(\frac{21}{16} + \frac{691}{128}e'^2\right)\frac{\nu^4}{n'^4} + \ldots\right];$$

поэтому

$$\frac{\mu}{2a_0} = \frac{\mu^2}{L'^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{\nu^4}{n'^4}\left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{83}{512}e'^4\right) + \ldots\right],$$
$$\nu^2 a_0^2\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e_0^2\right) = \frac{\mu^2}{L'^2}\frac{\nu^2}{n'^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e'^2\right) + \ldots,$$
$$\frac{\nu^4 a_0^2}{n_0^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e_0^2 - \frac{67}{256}e_0^4\right) = \frac{\mu^2}{L'^2}\frac{\nu^4}{n'^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e'^2 - \frac{67}{256}e'^4\right) + \ldots.$$

Сумма этих выражений с точностью до членов четвертого порядка совпадает с выражением, полученным выше.

Для того чтобы найти решение с той степенью точности, которая была достигнута Делонэ, необходимо довести определяющую функцию и разложение в ряд Тэйлора до членов четвертого порядка. Выражения становятся при этом более сложными; тем не менее этот метод значительно проще оригинального метода Делонэ. Кроме того, можно отметить следующие преимущества указанного метода:

а) Новый гамильтониан получается непосредственно в процессе нахождения определяющей функции.

б) Величины a', n', e' связаны с новыми переменными L', G' теми же формулами, что и в эллиптическом движении, тогда как в методе Делонэ a_0, n_0, e_0 зависят от этих переменных сложным образом в виде степенных рядов, в которые входят e_0, ν^2/n_0^2 и т. д. и которые становятся все более сложными по мере продолжения решения.

в) В то время как Делонэ при каждой операции исключает только один член, применяя метод определяющей функции, представляется вполне возможным одновременное выполнение преобразования над любым количеством членов.

12. Движение искусственного спутника. Для спутника, очень близкого к центральной планете, главное возмущающее ускорение возникает не из-за силы притяжения Солнца, а вследствие несферичности планеты.

Пятый, самый близкий спутник Юпитера, расположенный на среднем расстоянии от центра планеты, превышающем лишь в 2,54 раза ее экваториальный радиус, дает наиболее поразительный пример такого типа движения среди естественных спутников в солнечной системе. Для этого спутника как эксцентриситет, так и наклонность к экваториальной плоскости Юпитера очень малы. Достаточно очень простой теории, чтобы объяснить наблюдаемые характерные особенности этой орбиты. Аналогичные упрощающие условия относятся к возмущениям, обусловленным *влиянием сжатия*, в движении других естественных спутников в солнечной системе. Более общее решение задачи о движении спутника потребовалось только после того, как на орбиты вокруг Земли были выведены искусственные спутники. Первый искусственный спутник Земли (Спутник 1) имел наклонность свыше 60°.

Пусть в прямоугольной системе координат плоскость xy совпадает с экваториальной плоскостью планеты. Уравнения движения частицы с пренебрежимо малой массой в гравитационном поле этой планеты имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{38}$$

Если планета обладает осевой симметрией относительно полярной оси, то силовая функция может быть разложена в ряд

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{J_kR^k}{r^k}P_k(\sin\beta)\right],$$

где R — экваториальный радиус планеты, а β — широта, отнесенная к экваториальной плоскости; P_k — полиномы Лежандра и J_k — коэффициенты, которые зависят от распределения масс внутри центральной планеты. В гл. III было показано, что член с $k=1$ отсутствует, если центр масс планеты лежит в начале системы координат. Если планета симметрична относительно экватора, то в этом разложении присутствуют только четные гармоники. Для Земли разложение, включающее вторые и четвертые гармоники, является почти достаточным для обычных приложений. Тем не менее наблюдения искусственных спутников показали, что третьи и, возможно, пятые гармоники могут дать заметные эффекты. В этом разделе мы ограничимся главным образом рассмотрением «основной задачи» теории движения искусственных спутников, в которой силовая функция ограничена главным членом μ/r и второй гармоникой. Следовательно, силовую функцию необходимо выбрать в виде

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1-\frac{J_2R^2}{r^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin^2\beta\right)\right].$$

Пусть I означает мгновенную наклонность плоскости орбиты, g — аргумент перицентра, f — истинную аномалию. Тогда

$$\sin\beta=\sin I\sin(g+f),$$

$$2\sin^2\beta=\sin^2 I\,[1-\cos(2g+2f)].$$

Подстановка этих выражений в U дает

$$U=\frac{\mu}{r}+\frac{\mu J_2R^2}{a^3}\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 I\right)\frac{a^3}{r^3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 I\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\right].$$

Теперь уравнения (1) можно написать в переменных Делонэ

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},$$
$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G},$$
$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h},\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H},$$

если

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+U-\frac{\mu}{r}=F_0+F_1,$$

где

$$F_0=\frac{\mu^2}{2L^2},$$
$$F_1=\frac{\mu^4J_2R^2}{L^6}\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\right].$$

За исключением функций

$$\frac{a^3}{r^3}\quad\text{и}\quad\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f),$$

присутствующих в F_1, как F_0, так и F_1 выражаются в явном виде через переменные Делонэ. Эти функции могут быть разложены при помощи известных выражений в эллиптическом движении в следующие ряды:

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{r^3}&=\frac{L^3}{G^3}+\sum_{j=1}^{\infty}2P_j\cos jl\equiv\frac{L^3}{G^3}+\sigma_1,\\ \frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)&=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}Q_j\cos(2g+jl)\equiv\sigma_2.\end{aligned}\tag{39}$$

Коэффициенты P_j, Q_j являются степенными рядами по e и, следовательно, функциями от G/L.

Легко видеть, что $Q_0=0$, так как

$$Q_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^3}{r^3}\cos 2f\,dl.$$

При помощи подстановки

$$dl=\frac{L}{G}\frac{r^2}{a^2}\,df$$

этот интеграл принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}Q_0&=\frac{1}{\pi}\frac{L}{G}\int_0^{\pi}\frac{a}{r}\cos 2f\,df=\\ &=\frac{1}{\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{\pi}(1+e\cos f)\cos 2f\,df=\\ &=0.\end{aligned}$$

Важное свойство функции F состоит в том, что отсутствует переменная h. Поэтому h является так называемой циклической координатой; уравнение для H дает

$$H = \text{const},$$

и потому эта задача по сути дела является задачей движения только с двумя степенями свободы. Поэтому можно было бы фактически не обращать внимания на уравнения для dH/dt и dh/dt, получить решение для L, G, l, g (оставляя H в качестве постоянной, входящей в разложение) и в конечном счете найти h квадратурой, подставляя выражения для L, G, l, g через время и четыре постоянные интегрирования в выражение для dh/dt. Однако удобнее рассматривать эту задачу как задачу с тремя степенями свободы. Упрощение, получающееся от постоянства H, является почти несомненным, а решение в точности совпадает с найденным при помощи альтернативной процедуры.

Когда используется метод канонического преобразования, то решение получается в том случае, если найдено такое преобразование, что новый гамильтониан является функцией только от L, G, H. Поскольку h отсутствует в первоначальных уравнениях, то это равносильно утверждению, что цель состоит в том, чтобы найти преобразование, которое исключает как l, так и g. Удобно выполнить это преобразование в два этапа. На первом этапе исключается угловая переменная l. Такое преобразование можно назвать исключением короткопериодических членов. На втором этапе необходимо исключить переменную g. Это исключение долгопериодических членов. Гамильтониан, остающийся после второго этапа, определяет вековые члены в l, g и h.

Для исключения короткопериодических членов напишем

$$F(L, G, H, l, g, -) = F^*(L', G', H', -, g', -)$$

и введем разложение по степеням J_2 по формуле

$$S(L', G', H', l, g, h) = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots,$$
$$S_0 = L'l + G'g + H'h,$$

где S_1, S_2, ... суть функции от L', G', H', l, g и

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad H = \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{\partial S_0}{\partial h} = H', \\ l' &= \frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}. \end{aligned} \tag{40}$$

Разложение с точностью до второй степени относительно J_2, подобное использованному в разд. 9, дает

$$F_0 = F_0^*,$$
$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} + F_1 = F_1^*,$$
$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g} = \frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'} + F_2^*.$$

Положим для краткости

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 I = A, \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 I = B;$$

тогда получим следующее выражение:

$$F_1 = \frac{\mu^4 J_2 R^2}{2L^6}\left(A\frac{L^3}{G^3} + A\sigma_1 + B\sigma_2\right),$$

в котором слагаемые $A\sigma_1$, $B\sigma_2$ являются периодическими функциями от l, не содержащими членов, не зависящих от l, тогда как слагаемое AL^3/G^3 не зависит от l. Поскольку

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'} = -\frac{\mu^2}{L'^3},$$

то часть первого порядка дает

$$F_1^* = \frac{A}{2}\,\frac{\mu^4 J_2 R^2}{L'^3 G'^3}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2L'^3}(A\sigma_1 + B\sigma_2). \tag{42}$$

В большинстве задач небесной механики необходимо было бы на этом этапе ввести разложения в бесконечные ряды. Здесь же упрощающее обстоятельство заключается в том, что уравнение для $\partial S_1/\partial l$ является не дифференциальным уравнением в частных производных, а обыкновенным дифференциальным уравнением. Поэтому S_1 можно определить из соотношения

$$S_1 = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2L'^3}\int (A\sigma_1 + B\sigma_2)\,dl.$$

Используя метод, примененный для доказательства того, что $Q_0 = 0$, легко найти

$$\int \sigma_1\,dl = \int\left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{L^3}{G^3}\right)dl = \frac{L^3}{G^3}(f - l + e\sin f),$$

$$\int \sigma_2\,dl = \int \frac{a^3}{r^3}\cos(2g + 2f)\,dl =$$

$$= \frac{L^3}{G^3}\left[\frac{1}{2}\sin(2g+2f) + \frac{e}{2}\sin(2g+f) + \frac{e}{6}\sin(2g+3f)\right].$$

Не нужно никаких постоянных интегрирования. Результат имеет вид

$$S_1 = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3}\Big\{A'(f - l + e'\sin f) +$$
$$+ B'\left[\frac{1}{2}\sin(2g+2f) + \frac{e'}{2}\sin(2g+f) + \frac{e'}{6}\sin(2g+3f)\right]\Big\}, \tag{43}$$

где штрихи у A, B, e указывают на то, что L, G, H в этих функциях должны быть заменены на L', G', H'.

При помощи выражения для S_1 можно получить решение первого порядка. Необходимые для этого вспомогательные соотношения имеют вид

$$\frac{\partial e}{\partial L} = \frac{1-e^2}{eL} = \frac{G^2}{eL^3}, \quad \frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{eL} = -\frac{G}{eL^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \left[\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right]\sin f.$$

Поскольку A', B' являются простыми функциями от H'/G', то выражение (43) для S_1 получается как функция от G', H', e', f, g, в которой f

представляет собой функцию от e' и l. Пусть $\partial S_1/\partial e'$ означает производную от S_1 по e', так что

$$\frac{\partial S_1}{\partial e'}=\left(\frac{\partial S_1}{\partial e'}\right)+\frac{\partial S_1}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial e'}=$$
$$=\frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3}\left\{A'\left[(1+e'\cos f)\frac{\partial f}{\partial e'}+\sin f\right]+\right.$$
$$+B'\left[\left(\cos(2g+2f)+\frac{e'}{2}\cos(2g+f)+\frac{e'}{2}\cos(2g+3f)\right)\frac{\partial f}{\partial e'}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sin(2g+f)+\frac{1}{6}\sin(2g+3f)\right]\right\}.$$

Это выражение можно упростить, используя тождество

$$(1+e'\cos f)\cos(2g+2f)=\cos(2g+2f)+\frac{e'}{2}[\cos(2g+f)+\cos(2g+3f)],$$

откуда

$$\frac{\partial S_1}{\partial e'}=\frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3}\left\{A'\left[(1+e'\cos f)\frac{\partial f}{\partial e'}+\sin f\right]+\right.$$
$$+B'\left[(1+e'\cos f)\frac{\partial f}{\partial e'}\cos(2g+2f)+\frac{1}{2}\sin(2g+f)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{6}\sin(2g+3f)\right]\right\}.$$

Поскольку

$$(1+e'\cos f)\frac{\partial f}{\partial e'}=\left[\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)+\frac{a}{r}\right]\sin f,$$

то это выражение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial S_1}{\partial e'}=\frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3}\left\{A'\left(\frac{a^2}{r^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a}{r}+1\right)\sin f+\right.$$
$$+\frac{1}{2}B'\left[\left(-\frac{a^2}{r^2}\frac{G'^2}{L'^2}-\frac{a}{r}+1\right)\sin(2g+f)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{a^2}{r^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a}{r}+\frac{1}{3}\right)\sin(2g+3f)\right]\right\}.$$

Пусть теперь

$$j_2=\frac{\mu^2 J_2 R^2}{L'^4}.$$

Так как

$$\frac{\partial S_1}{\partial L'}=\frac{\partial S_1}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial L'},\quad \frac{\partial S_1}{\partial G'}=\left(\frac{\partial S_1}{\partial G'}\right)+\frac{\partial S_1}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial G'},\quad \frac{\partial S_1}{\partial l}=\frac{\partial S_1}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial l},$$

то решение, получаемое при $S=S_0+S_1$, может быть написано в следующей форме:

$$L=L'\left\{1+j_2\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 I'\right)\left(\frac{a^3}{r^3}-(1-e'^2)^{-3/2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 I'\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\right]\right\},$$
$$G=G'\left\{1+j_2(1-e'^2)^{-2}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 I'\right)\left[\cos(2g+2f)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+e'\cos(2g+f)+\frac{1}{3}e'\cos(2g+3f)\right]\right\},$$

$$l=l'-\frac{j_2}{e'}(1-e'^2)^{-1/2}\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 I'\right)\left(\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)+\frac{a}{r}+1\right)\sin f+\right.$$
$$+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos^2 I'\right)\left[\left(-\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)-\frac{a}{r}+1\right)\sin(2g+f)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)+\frac{a}{r}+\frac{1}{3}\right)\sin(2g+3f)\right]\right\},$$

$$g=g'+\frac{j_2}{e'}(1-e'^2)^{-1}\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 I'\right)\left(\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)+\frac{a}{r}+1\right)\sin f+\right.$$
$$+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos^2 I'\right)\left[\left(-\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)-\frac{a}{r}+1\right)\sin(2g+f)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{a^2}{r^2}(1-e'^2)+\frac{a}{r}+\frac{1}{3}\right)\sin(2g+3f)\right]\right\}+$$
$$+j_2(1-e'^2)^{-2}\left\{\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\cos^2 I'\right)(f-l+e'\sin f)+\right.$$
$$+\left(\frac{9}{4}-\frac{15}{4}\cos^2 I'\right)\left[\frac{1}{2}\sin(2g+2f)+\frac{e'}{2}\sin(2g+f)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{e'}{6}\sin(2g+3f)\right]\right\},$$

$$h=h'-j_2(1-e'^2)^{-2}\cos I'\left[\frac{3}{2}(f-l+e'\sin f)-\frac{3}{4}\sin(2g+2f)-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{4}e'\sin(2g+f)-\frac{1}{4}e'\sin(2g+3f)\right].$$

Этим завершается исключение короткопериодических членов, если достаточно вычислить эти члены в элементах только с точностью до первой степени j_2. В этом случае мы не интересуемся определением функции S_2.

В силу того что F_1^* не зависит от g', долгопериодические члены, т. е. такие члены, которые включают в себя только аргумент g, должны возникнуть из F_2^*. Уравнение для F_2^* может быть приведено к следующему виду:

$$F_2^*=[\quad]+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g},$$

где квадратные скобки [ ] означают ту часть выражения $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2$, которая не зависит от l. Эти вычисления не представляют трудностей, но являются трудоемкими. В результате окончательно получается

$$F_2^*=\frac{\mu^2 j_2^2}{4L'^2}\left\{\left[\frac{3}{32}(5-18\cos^2 I'+5\cos^4 I')(1-e'^2)^{-5/2}+\right.\right.$$
$$+\frac{3}{8}(1-6\cos^2 I'+9\cos^4 I')(1-e'^2)^{-3}-$$
$$-\frac{15}{32}(1-2\cos^2 I'-7\cos^4 I')(1-e'^2)^{-7/2}+$$
$$\left.\left.+\frac{3}{16}(1-16\cos^2 I'+15\cos^4 I')e'^2(1-e'^2)^{-7/2}\cos 2g'\right]\right\},$$

где g' подставлено вместо g, причем разность имеет множителем j_2.

Новый гамильтониан

$$F^*=\frac{\mu^2}{2L'^2}+\frac{\mu^2 j_2 L'}{2G'^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)+F_2^*$$

является функцией от L', G', H', g'. Следовательно, L' и H' суть постоянные. Если вводится новая определяющая функция S^* и если

$$S^* = L''l' + G''g' + H''h' + S_1^*(L'', G'', H'', g'),$$

то подстановка выражения

$$G' = G'' + \frac{\partial E_1^*}{\partial g'}$$

в гамильтониан F^* дает

$$F_0^* + F_1^*\left(L'', G'' + \frac{\partial S_1^*}{\partial g'}, H''\right) + F_2^*(L'', G'', H'', g') = F_0^{**} + F^{**} + F_2^{**}.$$

Приравнивая слагаемые равного порядка, получаем

$$F_0^* = F_0^{**},$$
$$F_1^* = F_1^{**},$$
$$\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + F_2^* = F_2^{**},$$

где

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial G''} = \frac{3}{4}\frac{\mu^2 j_2 L''}{G''^4}(1 - 5\cos^2 I'').$$

Часть функции F_2^*, которая зависит от g', дает следующие соотношения

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} = -\frac{j_2 e''^2 (1-e''^2)^{-2} G''}{16}\frac{(1-16\cos^2 I'' + 15\cos^4 I'')}{(1-5\cos^2 I'')}\cos 2g',$$

$$S_1^* = -\frac{j_2 e''^2 (1-e''^2)^{-2} G''}{32}\frac{(1-16\cos^2 I'' + 15\cos^4 I'')}{(1-5\cos^2 I'')}\sin 2g'',$$

где g' заменено на g''. Дифференцирование по g'', L'', G'', H'' дает

$$G' = G''\Big\{1 + j_2 e''^2 (1-e''^2)^{-2}\Big[-\frac{1}{16}(1 - 11\cos^2 I'') + \frac{5}{2}\cos^4 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-1}\Big]\cos 2g''\Big\},$$

$$l' = l'' + j_2 (1-e''^2)^{-1/2}\Big[\frac{1}{16}(1 - 11\cos^2 I'') - \frac{5}{2}\cos^4 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-1}\Big]\sin 2g'',$$

$$g' = g'' + j_2 (1-e''^2)^{-2}\Big[-\frac{1}{32}(2 + e''^2) + \frac{11}{32}(2 + 3e''^2)\cos^2 I'' + \frac{5}{4}(2 + 5e''^2)\cos^4 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-1} + \frac{25}{2}e''^2\cos^6 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-2}\Big]\sin 2g'',$$

$$h' = h'' + j_2 e''^2 (1-e''^2)^{-2}\cos I''\Big[-\frac{11}{16} - 5\cos^2 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-1} - \frac{25}{2}\cos^4 I''(1 - 5\cos^2 I'')^{-2}\Big]\sin 2g''.$$

Благодаря тому что $\partial F_1^*/\partial G''$ имеет множителем j_2, долгопериодические члены в элементах имеют первый порядок относительно j_2, хотя они возникают из функции F_2^*, имеющей множителем j_2^2. Деление на j_2

будет также происходить и с теми долгопериодическими членами, которые порождаются четвертой гармоникой. Факты наблюдений свидетельствуют о том, что J_4 одного и того же порядка величины, как и J_2^2. Следовательно, в вычисления значений долгопериодических членов крайне необходимо включать четвертую гармонику.

Эти члены не представляют затруднений. Дальнейшие подробности можно найти в статье Брауэра (Astron. J., 64, 378—397, 1959). Следует заметить, что величины γ_2, γ_4, используемые в этой статье, эквивалентны соответственно $\frac{1}{2}j_2$ и $-\frac{3}{8}j_4$ и что $j_4=\mu^4 J_4 R^4 L'^{-8}$. Результаты приводятся здесь без вывода:

$$\Delta_4 G' = \frac{j_4}{j_2} G''e''^2(1-e''^2)^{-2}\left[-\frac{5}{16}+\frac{15}{16}\cos^2 I'' + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{2}\cos^4 I''(1-5\cos^2 I'')^{-1}\right]\cos 2g'',$$

$$\Delta_4 l' = \frac{j_4}{j_2}(1-e''^2)^{-1/2}\left[\frac{5}{16}-\frac{15}{16}\cos^2 I'' - \frac{5}{2}\cos^4 I''(1-5\cos^2 I'')^{-1}\right]\sin 2g'',$$

$$\Delta_4 g' = \frac{j_4}{j_2}(1-e''^2)^{-2}\left[-\frac{5}{32}(2+e''^2)+\frac{15}{32}(2+3e''^2)\cos^2 I'' + \right.$$
$$+\frac{5}{4}(2+5e''^2)\cos^4 I''(1-5\cos^2 I'')^{-1} +$$
$$\left. +\frac{25}{2}e''^2\cos^6 I''(1-5\cos^2 I'')^{-2}\right]\sin 2g'',$$

$$\Delta_4 h' = \frac{j_4}{j_2}e''^2(1-e''^2)^{-2}\cos I''\left[-\frac{15}{16}-5\cos^2 I''(1-5\cos^2 I'')^{-1} - \right.$$
$$\left. -\frac{25}{2}\cos^4 I''(1-5\cos^2 I'')^{-2}\right]\sin 2g''.$$

Вековые движения, полученные из F_2^{**} и включающие влияния, обусловленные четвертой гармоникой, имеют следующие выражения:

$$\frac{dl''}{dt} = n''\left\{1+\frac{3}{4}j_2\eta^{-3}(-1+3\cos^2 I'')+\frac{3}{128}j_2^2\eta^{-7}[-15+16\eta+25\eta^2 + \right.$$
$$+(30-96\eta-90\eta^2)\cos^2 I''+(105+144\eta+25\eta^2)\cos^4 I''] +$$
$$\left. +\frac{45}{128}j_4\eta^{-7}e''^2[-3+30\cos^2 I''-35\cos^4 I'']\right\},$$

$$\frac{dg''}{dt} = n''\left\{\frac{3}{4}j_2\eta^{-4}(-1+5\cos^2 I'')+\frac{3}{128}j_2^2\eta^{-8}[-35+24\eta+25\eta^2 + \right.$$
$$+(90-192\eta-126\eta^2)\cos^2 I''+(385+360\eta+45\eta^2)\cos^4 I''] +$$
$$+\frac{15}{128}j_4\eta^{-8}[-21+9\eta^2+(270-126\eta^2)\cos^2 I'' +$$
$$\left. +(-385+189\eta^2)\cos^4 I'']\right\},$$

$$\frac{dh''}{dt} = n''\cos I''\left\{-\frac{3}{2}j_2\eta^{-4}+\frac{3}{32}j_2^2\eta^{-8}[-5+12\eta+9\eta^2 + \right.$$
$$+(-35-36\eta-5\eta^2)\cos^2 I''\Big] +$$
$$\left. +\frac{15}{32}j_4\eta^{-8}(-5+3\eta^2)(3-7\cos^2 I'')\right\},$$

где $n''=a''^{-3/2}\mu^{1/2}$, $\eta=\sqrt{1-e''^2}$.

Особенный интерес представляет характерное свойство долгопериодических возмущений, выражающееся в появлении делителя $1-5\cos^2 I''$ в некоторых членах. В G' и l' появляется первая степень этого делителя; в g' и h' присутствует вторая степень этого делителя в добавление к его первой степени. Для наклонностей, которые дают малые значения выражения $1-5\cos^2 I''$, т. е. для I'', близких к $63°26'$, эти малые делители делают указанные выражения нереальными. Это означает, что выбранная форма решения непригодна для наклонностей, близких к этой критической наклонности. Эта проблема исследована Хори в статье, опубликованной в Astron. J. (65, 291—300, 1960). Хори показал, что трудность, связанная с малым делителем вблизи критической наклонности, преодолевается при разложении решения по степеням $\sqrt{j_2}$, а не по степеням j_2.

13. Связь с проблемой двух неподвижных центров. Неожиданное свойство рассмотренного решения заключается в том, что при $j_4=-j_2^2$ те члены. которые содержат делители $1-5\cos^2 I''$ и $(1-5\cos^2 I'')^2$ и умножены на j_2, взаимно уничтожаются с аналогичными членами, умноженными на j_4/j_2. Поэтому для частного значения отношения $j_4/j_2^2=-1$ малые делители исчезают, и решение имеет силу для любых наклонностей, даже для критической наклонности и ее близкой окрестности. Результаты, полученные из анализа наблюдений искусственных спутников, свидетельствуют о том, что для Земли отношение j_4/j_2^2 приблизительно равно $-1{,}4$. Поэтому для Земли это частное решение не годится, но является лучшим приближением, чем то решение, в котором пренебрегают четвертой гармоникой.

Уничтожение членов с делителями $I-5\cos^2 I''$ и $(1-5\cos^2 I'')^2$ при частном значении отношения $j_4/j_2^2=-1$ должно иметь более глубокую причину. Ответ на этот вопрос дал Винти, который показал, что для силовой функции

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l (J_2)^l R^{2l}}{r^{2l}}P_{2l}(\sin\beta)\right]$$

может быть получено решение, выраженное через эллиптические интегралы. Это решение не имеет особенности в окрестности критической наклонности. Вывод, данный Винти, сложен; более простой подход состоит в следующем.

Рассмотрим движение частицы с пренебрежимо малой массой под действием гравитационного притяжения двух неподвижных центров с одинаковыми массами, равными $m/2$, и координатами $x=y=0$, $z=\pm c$. В силу осевой симметрии относительно оси z и симметрии относительно плоскости xy потенциальная функция будет иметь следующий вид:

$$U=\frac{k^2 m}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{B_{2l}P_{2l}(\sin\beta)}{r^{2l}}\right], \tag{44}$$

где коэффициенты B_{2l} являются постоянными, которые могут зависеть только от c. Эти коэффициенты могут быть вычислены заданием значения U для некоторой точки, лежащей на оси симметрии, т. е. оси z.

В данном случае имеем

$$U_1=\frac{k^2m}{2}\left[\frac{1}{r-c}+\frac{1}{r+c}\right]=$$

$$=\frac{k^2m}{2r}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^j+1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{c}{r}\right)^j\right]=$$

$$=\frac{k^2m}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{c^{2l}}{r^{2l}}\right].$$

На оси $z\sin\beta=\pm 1$. Поскольку $P_{2l}(\pm 1)=+1$, то общее выражение дает

$$U_{(\sin\beta=\pm 1)}=U_1=\frac{k^2m}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{B_{2l}}{r^{2l}}\right],$$

откуда

$$B_{2l}=c^{2l}.$$

Со времен Эйлера (1760) известно, что проблема двух неподвижных центров принадлежит к числу разрешимых проблем динамики; решение можно выразить через эллиптические интегралы, не прибегая к бесконечным рядам.

Потенциальная функция (44) при $B_{2l}=c^{2l}$ соответствует частному случаю вытянутого сфероида, т. е. внешнее гравитационное поле в частном случае вытянутого сфероида можно моделировать гравитационным полем двух неподвижных центров с равными массами. Такая модель неприменима к внешнему гравитационному полю сжатого сфероида, которое требует отрицательного значения для коэффициента B_2. Единственное изменение, необходимое для перехода от случая двух неподвижных центров, лежащих на оси z, к специальному потенциалу в форме Винти для сжатого сфероида, заключается в замене c на $c\sqrt{-1}$. В решение проблемы двух неподвижных центров с одинаковыми массами $m/2$ входят только четные степени c. Путем замены c^2 на $-c^2$ можно совершить переход к решению Винти.

14. Влияние сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника. В большинстве реально существующих случаев движения искусственных спутников влияние сопротивления атмосферы является наиболее значительным после влияния сжатия. Принимая во внимание уменьшение большой полуоси вследствие влияния сопротивления атмосферы, можно утверждать, что теория, в которой не учитывается сопротивление атмосферы, вряд ли пригодна. Это особенно верно, если высота перигея меньше, чем, например, 200 *миль* (320 *км*).

Подход, сочетающий свободную от учета сопротивления атмосферы теорию возмущений, вызываемых сжатием, с теорией влияния сопротивления атмосферы на эллиптическое движение, несомненно дает лишь грубое решение этой задачи.

В данном разделе мы будем заниматься проблемой совместного учета возмущений, обусловливаемых сжатием планеты и влиянием сопротивления атмосферы, в едином решении. Такой подход представляет собой по сути дела знакомый уже принцип метода вариации произвольных постоянных. Использование канонических переменных имеет особые преимущества при рассмотрении этой задачи вследствие легкости, с которой можно совершить необходимое преобразование переменных.

Уравнения движения искусственного спутника с учетом сопротивления атмосферы имеют в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 следующий вид:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_j}+X_j, \qquad j=1,\ 2,\ 3, \tag{45}$$

в которых силовая функция U включает члены, учитывающие возмущения от сжатия, а члены X_j представляют влияние сопротивления.

Эти уравнения можно привести к каноническому виду

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \eta_j}+X_j, \qquad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \xi_j},$$

если

$$\xi_j=\dot{x}_j, \quad \eta_j=x_j,$$

$$F=-\frac{1}{2}\sum_j \dot{x}_j^2+U.$$

Здесь введено в отличие от более распространенных обозначений взаимное изменение роли переменных ξ и η с тем, чтобы знак функции F совпадал со знаком F в переменных Делонэ.

Мы предполагаем, что влияние сопротивления на мгновенную скорость прямо пропорционально площади поперечного сечения спутника, плотности атмосферы и квадрату скорости V относительно атмосферы и обратно пропорционально массе.

Для того чтобы сделать эту задачу более доступной, допустим, что плотность атмосферы, начиная с высоты перигея, можно представить простой показательной формулой. Это предположение подразумевает не только упрощенную формулу для плотности атмосферы в пространстве между перигеем и апогеем, но также и сферически симметричную атмосферу. Дальнейшие уточнения можно ввести после того, как эта основная задача будет решена.

Пусть ω есть угловая скорость вращения атмосферы, r — радиус-вектор и a — мгновенная большая полуось орбиты. Тогда выражение для X_j имеет следующий вид:

$$X_j=-A(\dot{x}_j+\delta_j)V\exp(-\alpha r), \tag{46}$$

где A и α — постоянные,

$$V^2=\mu\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]-2\omega(x_1\dot{x}_2-x_2\dot{x}_1)+\omega^2(x_1^2+x_2^2) \tag{47}$$

и

$$\delta_1=+\omega x_2, \quad \delta_2=-\omega x_1, \quad \delta_3=0.$$

Первое слагаемое выражения для V^2 является знакомым выражением для квадрата орбитальной скорости при эллиптическом движении, применимым к возмущенному движению, если a представляет собой оскулирующее значение большой полуоси.

Уравнения в прямоугольных координатах при $X_j=0$ эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{dL_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l_k}, \qquad \frac{dl_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L_k}, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{48}$$

(если используются обозначения L_k, l_k вместо L, G, H, l, g, h), где

$$F=\frac{\mu^2}{2L_1^2}-\frac{\mu}{r}+U.$$

Решение проблемы движения искусственного спутника без сопротивления найдено в следующем виде:

$$\frac{dL_k''}{dt}=\frac{\partial F^{**}}{\partial l_k''}=0, \qquad \frac{dl_k''}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial L_k''}=\text{const} \tag{49}$$

с $F^{**}(L_1'', L_2'', L_3'')$ при условии, что наклонность не слишком близка к критической наклонности. Соотношения, которые выражают L_k, l_k через L_k'', l_k'', уже имеются.

Если включены возмущающие ускорения X_j, вызванные сопротивлением атмосферы, то уравнения (48) принимают следующий вид:

$$\frac{dL_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l_k}+P_k, \qquad \frac{dl_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L_k}-Q_k, \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned} P_k&=\sum_j X_j\frac{\partial x_j}{\partial l_k}, \\ Q_k&=\sum_j X_j\frac{\partial x_j}{\partial L_k}, \end{aligned} \tag{51}$$

а уравнения (49) приводятся к следующим:

$$\frac{dL_k''}{dt}=P_k'', \qquad \frac{dl_k''}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial L_k''}=-Q_k'', \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} P_k''&=\sum_j P_j\frac{\partial l_j}{\partial l_k''}+\sum_j Q_j\frac{\partial L_j}{\partial l_k''}, \\ Q_k''&=\sum_j P_j\frac{\partial l_j}{\partial L_k''}+\sum_j Q_j\frac{\partial L_j}{\partial L_k''}. \end{aligned} \tag{53}$$

Общее доказательство для преобразований типа встречающихся в уравнениях (50)—(53) состоит в следующем. Пусть заданы уравнения

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_j}+X_j, \qquad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_j}-Y_j, \qquad j=1, \ldots, n, \tag{54}$$

в которых X_j, Y_j — произвольные функции от переменных x_j, y_j и t. Пусть

$$\begin{aligned} x_j&=x_j(x_k', y_k'), \\ y_j&=y_j(x_k', y_k') \end{aligned}$$

есть каноническое преобразование, при котором гамильтониан остается неизменным. Тогда уравнения после этого преобразования имеют вид

$$\frac{dx_j'}{dt}=\frac{\partial F^*}{\partial y_j'}+X_j', \qquad \frac{dy_j'}{dt}=-\frac{\partial F^*}{\partial x_j'}-Y_j', \tag{55}$$

где

$$F(x_j,\ y_j) = F^*(x'_j,\ y'_j).$$

Задача состоит в выражении X'_j, Y'_j через x'_j, y'_j.

Умножая уравнения (54) на $\partial y_j/\partial y'_p$, $-\partial x_j/\partial y'_p$ и складывая произведения, получаем следующие выражения:

$$\sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + X_j\frac{\partial y_j}{\partial y'_p}\right),$$

$$-\sum_j \frac{dy_j}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial y'_p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y'_p} + Y_j\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right),$$

сумма которых имеет вид

$$\sum_j \left[\frac{dx_j}{dt}\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{dy_j}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right] = \frac{\partial F^*}{\partial y'_p} + \sum_j \left(X_j\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + Y_j\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right). \tag{56}$$

Подстановка в левую часть

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\frac{dx'_k}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial y'_k}\frac{dy'_k}{dt}\right),$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial x'_k}\frac{dx'_k}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial y'_k}\frac{dy'_k}{dt}\right)$$

дает

$$\sum_j\sum_k \left\{\left[\frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{\partial y_j}{\partial x'_k}\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right]\frac{dx'_k}{dt} + \left[\frac{\partial x_j}{\partial y'_k}\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{\partial y_j}{\partial y'_k}\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right]\frac{dy'_k}{dt}\right\} =$$

$$= \sum_k \left([x'_k,\ y'_p]\frac{dx'_k}{dt} + [y'_k,\ y'_p]\frac{dy'_k}{dt}\right) =$$

$$= \frac{dx'_p}{dt},$$

поскольку все скобки Лагранжа равны нулю, за исключением

$$[x'_p,\ y'_p] = +1.$$

Подставляя в уравнение (56) с учетом уравнения (55), получаем

$$X'_p = \sum_j \left(X_j\frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + Y_j\frac{\partial x_j}{\partial y'_p}\right). \tag{57}$$

Если при этом выводе используются множители $\partial y_j/\partial x'_p$, $\partial x_j/\partial x'_p$, то в результате получится выражение вида

$$\sum_k \left([x'_k,\ x'_p]\frac{dx'_k}{dt} + [y'_k,\ x'_p]\frac{dy'_k}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial x'_p} + \sum_j \left(X_j\frac{\partial y_j}{\partial x'_p} + Y_j\frac{\partial x_j}{\partial x'_p}\right),$$

левая часть которого равна $-dy'_k/dt$. Принимая во внимание уравнение (55), получаем

$$Y'_p = \sum_j \left(X_j\frac{\partial y_j}{\partial x'_p} + Y_j\frac{\partial x_j}{\partial x'_p}\right). \tag{58}$$

Выражения (57), (58) в точности соответствуют выражениям (53), тогда как (51) представляет собой просто частный случай.

Основные черты этой теории полностью содержатся в уравнениях (45)—(53). Ближайшая задача заключается в составлении подробных выражений, необходимых для получения конкретных выражений для P''_k и Q''_k в уравнениях (53). В этом разделе будет рассмотрен частный случай $\omega=0$. Это упрощение означает пренебрежение вращением атмосферы и заметно уменьшает сложность этой задачи.

При допущении, что $\omega=0$, выражения для X_j принимают следующий вид:

$$X_j=-A\dot{x}_jV\exp(-\alpha r).$$

Поэтому, если p_k, q_k, p''_k, q''_k суть те же функции от $\dot{x}_j$, что и P_k, Q_k, P''_k, Q''_k от X_j, то мы имеем

$$\frac{dL''_k}{dt}=-AVp''_k\exp(-\alpha r),$$

$$\frac{dl''_k}{dt}=-\frac{\partial F^{**}}{\partial L''_k}+AVq''_k\exp(-\alpha r).$$

Функции p''_k, q''_k могут быть получены в два приема. Легко найти, что

$$\begin{aligned} &p_1=L_1\left(\frac{2a}{r}-1\right), && q_1=2e\sin u+\frac{2}{e}\frac{L_2}{L_1}\sin f,\\ &p_2=L_2, && q_2=-\frac{2}{e}\sin f,\\ &p_3=L_3, && q_3=0, \end{aligned} \tag{59}$$

где u — эксцентрическая аномалия, f — истинная аномалия.

Далее, мы можем положить

$$p''_k=\sum_j\left(p_j\frac{\partial l_j}{\partial l''_k}+q_j\frac{\partial L_j}{\partial l''_k}\right)=p_k+\delta p_k,$$

$$q''_k=\sum_j\left(p_j\frac{\partial l_j}{\partial L''_k}+q_j\frac{\partial L_j}{\partial L''_k}\right)=q_k+\delta q_k,$$

где δp_k, δq_k — члены, имеющие множителем j_2 (по крайней мере). В этих слагаемых мы можем заменить p_k, q_k их выражениями (59), но со всеми величинами, замененными на соответствующие им эквиваленты с двумя штрихами. Это допустимо, если можно предположить, что A того же порядка величины, как и j_2. Возвращаясь теперь к обозначениям L, G, H, l, g, h вместо L_k, l_k, получаем

$$\delta p_1=(p_1)''\left(\frac{\partial l}{\partial l''}-1\right)+(p_2)''\frac{\partial g}{\partial l''}+(p_3)''\frac{\partial h}{\partial l''}+(q_1)''\frac{\partial L}{\partial l''}+(q_2)''\frac{\partial G}{\partial l''},$$

$$\delta p_2=(p_1)''\frac{\partial l}{\partial g''}+(p_2)''\left(\frac{\partial g}{\partial g''}-1\right)+(p_3)''\frac{\partial h}{\partial g''}+(q_1)''\frac{\partial L}{\partial g''}+(q_2)''\frac{\partial G}{\partial g''},$$

$$\delta p_3=0,$$

$$\delta q_1=(p_1)''\frac{\partial l}{\partial L''}+(p_2)''\frac{\partial g}{\partial L''}+(p_3)''\frac{\partial h}{\partial L''}+(q_1)''\left(\frac{\partial L}{\partial L''}-1\right)+(q_2)''\frac{\partial G}{\partial L''},$$

$$\delta q_2=(p_1)''\frac{\partial l}{\partial G''}+(p_2)''\frac{\partial g}{\partial G''}+(p_3)''\frac{\partial h}{\partial G''}+(q_1)''\frac{\partial L}{\partial G''}+(q_2)''\left(\frac{\partial G}{\partial G''}-1\right),$$

$$\delta q_3=(p_1)''\frac{\partial l}{\partial H''}+(p_2)''\frac{\partial g}{\partial H''}+(p_3)''\frac{\partial h}{\partial H''}+(q_1)''\frac{\partial L}{\partial H''}+(q_2)''\frac{\partial G}{\partial H''},$$

если значения функций p_j, q_j, в которых элементы L_k, l_k заменены элементами L''_k, l''_k, обозначить через $(p_j)''$, $(q_j)''$. Все эти выражения следует взять из теории, свободной от учета сопротивления атмосферы, с точностью до первой степени j_2.

В качестве примера типа разложения, которое требуется для практических приложений, приведем вычисление членов уравнения для dL''/dt. Оно связано с определением члена δp_1, более простого, чем δp_2, так как аргумент l'' входит только в короткопериодические члены.

Для краткости напишем θ вместо $\cos I''$. Мы находим, что δp_1 состоит из двух частей, одна из которых имеет множителем $-1+3\theta^2$, а другая $-3(1-\theta^2)$. Окончательный результат дается следующим выражением:

$$\delta p_1 = \frac{3}{4} j_2 L'' \left\{(-1+3\theta^2)\left[-\eta^{-3}+\frac{a''^3}{r''^3}-2\frac{a''^4}{r''^4}\right]+\right.$$
$$\left.+3(1-\theta^2)\left(\frac{a''^3}{r''^3}-2\frac{a''^4}{r''^4}\right)\cos(2g''+2f'')\right\}.$$

Двойной штрих означает, что функции эллиптического движения должны быть вычислены при помощи элементов с двумя штрихами.

Если теперь ввести

$$x=\frac{r}{a}-1, \quad x''=\frac{r''}{a''}-1,$$

то δp_1 можно написать с точностью до второй степени x, т. е. до второй степени e'', в следующем виде:

$$\delta p_1 = -\frac{3}{2} j_2 L'' \left\{(-1+3\theta^2)\left[1+\frac{3}{4}e''^2-\frac{5}{2}x''+7x''^2\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}(1-\theta^2)\left[1-5x''+14x''^2\right]\cos(2g''+2f'')\right\}.$$

Аналогичным образом разложение до второй степени x дает

$$-AV\exp(-\alpha r)=\frac{-A\mu}{L}\exp(-\alpha a)\times$$
$$\times\left[1-(1-\alpha a)x+\left(\frac{1}{2}+\alpha a+\frac{1}{2}\alpha^2a^2\right)x^2\right],$$

и, следовательно,

$$-AV''\exp(-\alpha r'')\,\delta p_1 =$$
$$=\frac{3}{2}Aj_2\exp(-\alpha a'')\left\{(-1+3\theta^2)\left[\left(1+\frac{3}{4}e''^2\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{7}{2}+\alpha a''\right)x''\left(10+\frac{7}{2}\alpha a''+\frac{1}{2}\alpha^2a''^2\right)x''^2\right]+$$
$$+\frac{3}{2}(1-\theta^2)\left[1-(6+\alpha a'')x''+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{39}{2}+6\alpha a''+\frac{1}{2}\alpha^2a''^2\right)x''^2\right]\cos(2g''+2f'')\right\}.$$

При помощи таблиц Кэли получаем следующий окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
-AV'' \exp(-\alpha r'')\, \delta p_1 = \\
&= \frac{3}{2} A j_2 \exp(-\alpha a'') \Big\{ (-1+3\theta^2) \Big[1 + \Big(4 + \frac{5}{4}\alpha a'' + \frac{1}{4}\alpha^2 a''^2\Big) e''^2 + \\
&+ \Big(\frac{7}{2} + \alpha a''\Big) e'' \cos l'' + \Big(\frac{27}{4} + \frac{9}{4}\alpha a'' + \frac{1}{4}\alpha^2 a''^2\Big) e''^2 \cos 2l'' \Big] + \\
&+ \frac{3}{2}(1-\theta^2) \Big[\Big(\frac{9}{8} + \frac{3}{4}\alpha a'' + \frac{1}{8}\alpha^2 a''^2\Big) e''^2 \cos 2g'' + \\
&+ \Big(1 + \frac{1}{2}\alpha a''\Big) e'' \cos(2g'' + l'') + \\
&+ \Big[1 + \Big(\frac{11}{4} + \frac{5}{2}\alpha a'' + \frac{1}{4}\alpha^2 a''^2\Big) e''^2 \Big] \cos(2g'' + 2l'') + \\
&+ \Big(5 + \frac{1}{2}\alpha a''\Big) e'' \cos(2g'' + 3l'') + \\
&+ \Big(\frac{125}{8} + \frac{11}{4}\alpha a'' + \frac{11}{8}\alpha^2 a''^2\Big) e''^2 \cos(2g'' + 4l'') \Big] \Big\} .
\end{aligned}
$$

Главную часть dL/dt можно разложить по x в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
-AVL\Big(\frac{2a}{r} - 1\Big) \exp(-\alpha r) = -A\mu \exp(-\alpha a) \times \\
\times \Big[1 - (3 - \alpha a)\, x + \Big(\frac{9}{2} + 3\alpha a + \frac{1}{2}\alpha^2 a^2\Big) x^2 \Big] .
\end{aligned}
$$

В эту функцию A входит в качестве единственного малого множителя; следовательно, необходимо подставить полные значения элементов с точностью до первой степени j_2. Если эту функцию от a и x обозначить через ψ и применить двойные штрихи обычным образом, то мы получим следующее выражение:

$$
\psi = \psi'' + \Big(\frac{\partial \psi}{\partial a}\Big)'' \delta a + \Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)'' \delta x,
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} e^2 - e \cos l - \frac{1}{2} e^2 \cos 2l, \\
x^2 &= \frac{1}{2} e^2 \qquad\qquad + \frac{1}{2} e^2 \cos 2l.
\end{aligned}
$$

Теория, свободная от учета влияния сопротивления атмосферы, дает выражения для величин $a - a''$, $e - e''$, $l - l''$. Из последних двух можно вычислить выражение для $\delta x = x - x''$.

Дальнейшие подробности можно найти в статье Брауэра и Хори (Astron. J. 66, 1961).

15. Приложение к движению малой планеты, возмущаемой Юпитером. Мы предположим, что Юпитер движется по невозмущенной эллиптической орбите с большой полуосью a_1, эксцентриситетом e_1 и что плоскость орбиты Юпитера совпадает с плоскостью xy. Уравнения движения астероида с пренебрежимо малой массой будут иметь следующий вид:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial l}, \qquad \frac{\partial l}{\partial t}=-\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial L},$$
$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial g}, \qquad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial G},$$
$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\widetilde{h}}, \qquad \frac{d\widetilde{h}}{dt}=-\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial H},$$

где

$$\widetilde{F}=\frac{\mu^2}{2L^2}+F_1,$$
$$F_1=k^2m_1\left[\frac{1}{\Delta}-\frac{xx_1+yy_1}{r_1^3}\right].$$

Возмущающую функцию можно разложить в бесконечный ряд по косинусам с аргументами вида

$$\begin{aligned} &j_1(l+g+\widetilde{h}-l_1-\widetilde{\omega}_1)+j_2l+j_3(l+g)+j_4l_1=\\ &\quad=(j_1+j_2+j_3)\,l+(j_1+j_3)\,g+j_1(\widetilde{h}-\widetilde{\omega}_1)+(j_4-j_1)\,l_1=\\ &\quad=p_1l+p_2g+p_3h+p_4k, \end{aligned}$$

если h вводится вместо $\widetilde{h}-\widetilde{\omega}_1$, k вместо l_1. Без ограничения общности p_1 можно считать положительным целым числом или нулем; p_2, p_3 и p_4 — целые числа как положительные, так и отрицательные, включая нуль. Поскольку

$$l_1=n_1t+\varepsilon_1-\widetilde{\omega}_1,$$

то в этих аргументах в явном виде присутствует время. Для того чтобы получить гамильтониан, не зависящий от времени t, мы вводим четвертую степень свободы, полагая

$$\frac{dk}{dt}=\nu=-\frac{\partial F}{\partial K},$$

если ν используется вместо n_1. Необходимым дополнением к $\widetilde{F}$ является член $-\nu K$. Новая система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l}, \qquad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},$$
$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g}, \qquad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G},$$
$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h}, \qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H},$$
$$\frac{dK}{dt}=\frac{\partial F}{\partial k}, \qquad \frac{dk}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial K},$$

где

$$F=F_0+F_1,$$
$$F_0=\frac{\mu^2}{2L^2}-\nu K,$$
$$F_1=\sum C^{m_2,\,m_3,\,m_4}_{p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4}e^{m_2}\left(\sin\frac{1}{2}I\right)^{2m_3}e_1^{m_4}\cos(p_1l+p_2g+p_3h+p_4k).$$

Коэффициенты C являются функциями от a и a_1 степени -1. При помощи разложения, данного Леверрье или Ньюкомом, их можно выразить через коэффициенты Лапласа и их производные. Соотношения Даламбера дают

$$m_2=|j_2|+2k_2=|p_1-p_2|+2k_2,$$
$$2m_3=|j_3|+2k_3=|p_2-p_3|+2k_3,$$
$$m_4=|j_4|+2k_4=|p_3+p_4|+2k_4,$$

где k_2, k_3, k_4 — положительные целые числа или нуль. Пусть для краткости записи введено обозначение

$$\frac{\partial F_0}{\partial L}=-\frac{\mu^2}{L^3}=-n,$$

причем подразумевается, что n всегда означает функцию $\mu^2 L^{-3}$.

Введем теперь определяющую функцию S с целью исключения короткопериодических членов, т. е. аргументов, которые содержат l и k. Соответствующее преобразование должно дать

$$F(L,\ G,\ H,\ K,\ l,\ g,\ h,\ k)=F^*(L',\ G',\ H',\ K',\ -,\ g',\ h',-).$$

При

$$S(L',\ G',\ H',\ K',\ l,\ g,\ h,\ k),$$
$$S_0=L'l+G'g+H'h+K'k$$

производим разложение по степеням m_1 с тем, чтобы получить

$$F=F_0+F_1,$$
$$F^*=F_0^*+F_1^*+F_2^*+\ldots,$$
$$S=S_0+S_1+S_2+\ldots.$$

Разложение в ряд Тэйлора дает

$$F_0=F_0^*,$$
$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_0}{\partial K'}\frac{\partial S_1}{\partial k}+F_1=F_1^*,$$

или

$$-n'\frac{\partial S_1}{\partial l}-\nu\frac{\partial S_1}{\partial k}+F_1=F_1^*.$$

Этому уравнению можно удовлетворить следующими разложениями:

$$S_1=\sum{}'\frac{C'}{p_1n'+p_4\nu}\sin(p_1l+p_2g+p_3h+p_4k), \tag{60}$$
$$F_1^*=\sum{}''C'\cos(p_2g'+p_3h'),$$

в которых члены, включенные в $\sum'$, являются теми членами из F_1, у которых по крайней мере одно из p_1 и p_4 отлично от нуля, а $\sum''$ есть сумма членов, для которых $p_1=p_4=0$. Обозначение C' указывает, что эти коэффициенты являются функциями от L', G', H'.

Члены второго порядка получаются из следующего уравнения:

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\frac{\partial F_0}{\partial K'}\frac{\partial S_2}{\partial k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial F_1}{\partial H'}\frac{\partial S_1}{\partial h}=$$
$$=\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\frac{\partial F_1^*}{\partial h}\frac{\partial S_1}{\partial H'}+F_2^*,$$

из которого члены с $p_1 = p_4 = 0$ используются для определения функции F_2^*, а все остальные члены — для получения S_2.

В планетной теории, кроме членов первого порядка относительно возмущающей массы, часто представляется достаточным вычислить только вековые члены и некоторые из наиболее значительных периодических членов до второго порядка. В этом отношении планетная теория в значительной степени отличается от теории движения Луны: в планетной теории главную трудность представляет разложение возмущающей функции, но приближения должны быть доведены, вообще говоря, только до второго или же, в исключительных случаях, до третьего порядка относительно возмущающих масс. В основной задаче теории движения Луны, напротив, разложение возмущающей функции является простым делом, тогда как приближения должны быть доведены до высокого порядка относительно ν/n.

Здесь можно дать лишь самый краткий очерк метода, предложенного Цейпелем. Важно заметить, что исключение l и k возможно только в том случае, когда отсутствуют малые делители $p_1 n' + p_4 \nu$, которые могут сделать ряд для S_1 и последующие ряды для S_2 и т. д. нереальными. С математической точки зрения это представляет собой серьезный вопрос: всегда существуют такие целые числа p_1 и p_4, что $(p_1 n' + p_4 \nu)/\nu$ для заданного отношения ν/n' может стать меньше любой указанной наперед величины. Замечания по этому поводу, сделанные в гл. XI, приложимы и здесь. В большинстве случаев применения планетной теории соизмеримость связана с такими далекими членами в разложении возмущающей функции, что с практической точки зрения можно без риска пренебречь этими членами.

С другой стороны, предположим, что среднее движение слишком близко к соизмеримости, так что нельзя включить члены с аргументами, например, вида $p(\alpha l - \beta k) + p_2 g + p_3 h$ в определяющую функцию. Нам ничто не мешает включить члены с подобными аргументами в F^*.

В первом случае единственными угловыми переменными, остающимися после исключения короткопериодических членов, являются g и h; в новой системе уравнений L и K — постоянные. Остающиеся при этом уравнения фактически являются уравнениями вековых возмущений.

Преобразованием переменных их можно привести к виду, рассмотренному в гл. XVI. Если определяются возмущения только первого порядка на основании функций S_1 и F^*, то эти уравнения вековых возмущений как раз соответствуют уравнениям, полученным простым отбрасыванием всех тех членов, которые в своих аргументах содержат l и k. Продолжая вычисления до второго порядка, т. е. получая F_2^* в дополнение к F_1, мы прибавляем к уравнениям вековых возмущений вековые члены, порождаемые квадратами и произведениями периодических членов.

Во втором случае, когда в F^* сохраняется единственная линейная комбинация вида $\alpha l - \beta k$ и ее кратные, новую систему можно привести от первоначальных четырех степеней свободы к трем степеням свободы при помощи преобразования к линейной комбинации $\alpha l - \beta k$ как к одной из переменных. Может оказаться предпочтительным включение кратных g и h в этот аргумент в зависимости от индивидуальных характерных свойств рассматриваемой проблемы.

Характер разложений, необходимых в общем приложении этого метода, становится ясным из исследования решения, основанного на функции S_1. Переменные l, g, h, k получаются из следующих уравнений

$$l = l' - \sum{}' \left[\frac{\frac{\partial C'}{\partial L'}}{p_1 n' + p_4 \nu} + \frac{3 p_1 n' \frac{C'}{L'}}{(p_1 n' + p_4 \nu)^2} \right] \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k),$$

$$g = g' - \sum{}' \frac{\frac{\partial C'}{\partial G'}}{p_1 n' + p_4 \nu} \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k),$$

$$h = h' - \sum{}' \frac{\frac{\partial C'}{\partial H'}}{p_1 n' + p_4 \nu} \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k),$$

$$k = k'.$$

Поскольку коэффициенты C' содержат множителем возмущающую массу, то достаточно в возмущениях первого порядка заменить l, g, h в аргументах на l', g', h'. Чтобы получить согласие с точностью до второго порядка, необходимо принять во внимание разности между l и l', g и g', h и h' в аргументах. Для этого требуется выполнить перемножения рядов в дополнение к тем, которые были необходимы для получения функции S_2.

Если возмущающая функция разложена по кеплеровым элементам, то коэффициенты C являются функциями от a_1, $\alpha = a/a_1$, e, $\gamma^2 = \sin^2 \frac{1}{2} I, e_1$. Соотношения между переменными Кеплера и Делонэ дают

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \frac{na}{\mu} \left(2\alpha \frac{\partial C}{\partial \alpha} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial C}{\partial e} \right),$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{na}{\mu} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial C}{\partial e} + \frac{1-2\gamma^2}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial C}{\partial (\gamma^2)} \right],$$

$$\frac{\partial C}{\partial H} = -\frac{na}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial C}{\partial (\gamma^2)}.$$

Множитель na/μ использован вместо L с целью получить для конечного результата безразмерное выражение. Необходимо помнить, что коэффициенты C содержат множитель $k^2 m_1$, который имеет ту же размерность, что и μ. Переменные L, G, H определяются из следующих уравнений:

$$L = L' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu} \sum{}' \frac{p_1 C'}{p_1 n' + p_4 \nu} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right],$$

$$G = G' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu \sqrt{1-e'^2}} \sum{}' \frac{p_2 C'}{p_1 n' + p_4 \nu} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right],$$

$$H = H' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu \sqrt{1-e'^2}(1-2\gamma'^2)} \sum \frac{p_3 C'}{p_1 n' + p_4 \nu} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right];$$

переменная K не представляет для нас интереса.

Наконец, возмущения первого порядка в кеплеровых элементах получаются из следующих соотношений:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2\delta L}{L}, \quad \delta e = \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta G}{G} \right) \frac{1-e^2}{e},$$

$$\delta\gamma = \left(\frac{\delta G}{G} - \frac{\delta H}{H} \right) \frac{1-2\gamma^2}{4\gamma}.$$

Использование кеплеровых переменных в разложении возмущающей функции добавляет осложнения, которые частично могут быть устранены в том случае, если разложение ведется по переменным, более близким к переменным Делонэ. Можно использовать следующую систему видоизмененных переменных Делонэ:

$$L,\ L-G,\ G-H,\ K,\ l+g+h,\ -g-h,\ -h,\ k.$$

Поскольку

$$e_2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} = 2\frac{L-G}{L} - \left(\frac{L-G}{L}\right)^2,$$

$$\gamma^2 = \sin^2\frac{I}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H}{G}\right) = \frac{G-H}{2L}\left(1 - \frac{L-G}{L}\right)^{-1},$$

то нетрудно показать, что коэффициенты в возмущающей функции можно разложить в ряды по степеням

$$E_1 = \frac{L-G}{L}, \quad E_2 = \frac{G-H}{L}.$$

Если, далее, коэффициенты C считать функциями от L, E_1 E_2, то необходимые соотношения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial L} = \left(\frac{\partial C}{\partial L}\right) - \frac{E_1}{L}\frac{\partial C}{\partial E_1} - \frac{E_2}{L}\frac{\partial C}{\partial E_2},$$

$$\frac{\partial C}{\partial (L-G)} = \frac{1}{L}\frac{\partial C}{\partial E_1},$$

$$\frac{\partial C}{\partial (G-H)} = \frac{1}{L}\frac{\partial C}{\partial E_2}.$$

16. Уравнения в переменных Делонэ для общей задачи движения планет. В задачах, рассматривавшихся до сих пор в этой главе, преобразования от прямоугольных координат к переменным Делонэ имели общую особенность, которая состоит в том, что была задана только единственная система уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

с аналогичными уравнениями для y и z. Эти уравнения затем заменялись следующей эквивалентной системой:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G},$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H},$$

где

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = G\cos I,$$

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R.$$

В планетной задаче, в которой рассматривается Солнце с массой m_0 и две планеты с массами m_1 и m_2, первоначально имеется девять уравнений, каждое из которых второго порядка. Интегралы центра масс позволяют привести эту систему уравнений к шести уравнениям второго порядка. При соответствующем выборе координат, предложенном Якоби, эти уравнения обладают общей силовой функцией.

В качестве отправного пункта могут служить уравнения, полученные в разд. 8 гл. X. Если ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 — координаты Солнца и двух планет в декартовой системе координат, начало которой лежит в центре масс этих трех тел, и если

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0,$$
$$x_2 = \xi_2 - \xi_0 - \varkappa_1(\xi_1 - \xi_0),$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1},$$

то уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)\,m_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{61}$$

где

$$F = k^2\left[\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right].$$

Здесь записаны только уравнения для x_1 и x_2; уравнения для y и z имеют ту же структуру. Пусть

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

в таком случае

$$r_{01}^2 = r_1^2,$$
$$r_{02}^2 = (x_2 + \varkappa_1 x_1)^2 + (y_2 + \varkappa_1 y_1)^2 + (z_2 + \varkappa_1 z_1)^2 =$$
$$= r_2^2 + 2\varkappa_1(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + \varkappa_1^2 r_1^2.$$

Если массы m_1 и m_2 малы по сравнению с m, то разность $r_{02}^{-1} - r_2^{-1}$ может быть разложена в быстро сходящийся ряд по степеням $\varkappa_1$.

Если ввести $\varkappa_2$, m_1', m_2' посредством следующих формул:

$$\varkappa_2 = \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$
$$\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1} = \frac{1}{\varkappa_1 m_0} = \frac{1}{m_1'},$$
$$\frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)\,m_2} = \frac{1}{\varkappa_2(m_0+m_1)} = \frac{1}{m_2'},$$

то уравнения (61) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k^2 m_0 m_1}{m_1'}\frac{x_1}{r_1^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k^2 m_0 m_2}{m_2'}\frac{x_2}{r_2^3} &= \frac{\partial R_2}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{62}$$

где

$$R_1 = \frac{R}{m_1'}, \quad R_2 = \frac{R}{m_2'},$$

$$R = k^2 \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + m_0 m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Эти уравнения можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{L}_j}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}_j}{\partial l_j}, & \frac{dl_j}{dt} &= -\frac{\partial \overline{F}_j}{\partial \overline{L}_j}, \\ \frac{d\overline{G}_j}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}_j}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} &= -\frac{\partial \overline{F}_j}{\partial \overline{G}_j}, \\ \frac{d\overline{H}_j}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}_j}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} &= -\frac{\partial \overline{F}_j}{\partial \overline{H}_j}, \end{aligned} \tag{63}$$

$$j = 1,\ 2,$$

если

$$\overline{F}_j = \frac{\mu_j}{2a_j} + R_j, \quad \mu_j = \frac{k^2 m_0 m_j}{m_j'},$$

$$\overline{L}_j = \sqrt{\mu_j a_j}, \quad \overline{G}_j = \overline{L}_j \sqrt{1 - e_j^2}, \quad \overline{H}_j = \overline{G}_j \cos I_j.$$

Уравнения (63) неудобны тем, что гамильтонианы различны для этих двух систем уравнений. Это неудобство можно устранить, полагая

$$L_j = \overline{L}_j m_j, \quad F = \overline{F}_j m_j'.$$

Поэтому окончательные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dL_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_j}, & \frac{\partial l_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_j}, \\ \frac{dG_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_j}, \\ \frac{dH_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_j}, \end{aligned} \tag{64}$$

$$j = 1,\ 2,$$

где

$$\begin{aligned} F &= k^2 \frac{m_0 m_1}{2a_1} + k^2 \frac{m_0 m_2}{2a_2} + k^2 \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + m_0 m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right], \\ L_1 &= m_1' \sqrt{\mu_1 a_1} = m_1 \sqrt{\frac{k^2 m_0^2 a_1}{m_0 + m_1}}, \\ L_2 &= m_2' \sqrt{\mu_2 a_2} = m_2 \sqrt{\frac{k^2 m_0 (m_0 + m_1) a_2}{m_0 + m_1 + m_2}} \end{aligned} \tag{62}$$

и с обычными выражениями для G_1, G_2, H_1, H_2.

Этот результат можно распространить на любое число планет. Пусть $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$, где x_j, y_j, z_j — прямоугольные координаты, отнесенные к центру масс тел $m_0, m_1, \ldots, m_{j-1}$. Тогда

$$F=\sum_{j=1}^{n}\frac{k^2m_0m_j}{2a_j}+\sum_{j=2}^{n}k^2m_0m_j\left(\frac{1}{r_{0j}}-\frac{1}{r_j}\right)+\sum_{j\neq p}k^2\frac{m_jm_p}{r_{jp}}, \tag{66}$$

$$L_j=m_j\sqrt{k^2m_0\frac{m_0+m_1+\ldots+m_{j-1}}{m_0+m_1+\ldots+m_j}a_j},$$

$$G_j=L_j\sqrt{1-e_j^2}, \quad H_j=G_j\cos I_j.$$

Небольшое неудобство этих уравнений заключается в том, что переменные L_j, G_j, H_j имеют множителем планетную массу m_j. Его можно преодолеть, вводя

$$m_j=\beta_j\sigma,$$

где σ — величина порядка планетных масс, а β_j — конечные числовые множители. Если затем разделить переменные L_j, G_j, H_j и гамильтониан F на σ, то получится

$$L_j=\beta_j\sqrt{k^2m_0\frac{m_0+m_1+\ldots+m_{j-1}}{m_0+m_1+\ldots+m_j}a_j},$$

$$F=\sum_{j=1}^{n}\frac{k^2m_0\beta_j}{2a_j}+\sum_{j=2}^{n}k^2m_0\beta_j\left(\frac{1}{r_{0j}}-\frac{1}{r_j}\right)+\sigma\sum_{j\neq p}\frac{k^2\beta_j\beta_p}{r_{jp}}, \tag{67}$$

$$G_j=L_j\sqrt{1-e_j^2}, \quad H_j=G_j\cos I_j.$$

Поэтому теория возмущений для проблемы Солнца и n планет должна быть построена по степеням единственного малого параметра σ. Если результаты необходимо получить в самой общей форме, то отношения $B_j=m_j/\sigma$ следует сохранить в разложениях в явном виде. В некоторых задачах их можно заменить численными значениями с самого начала.

Замечания. Литература

В этой главе буква F использована для обозначения гамильтониана системы канонических дифференциальных уравнений. Мы избегали привычного обозначения H, чтобы сохранить этот символ для одной из переменных Делонэ. Необходимо отметить, что символ F использовался для различных целей в предшествующих главах.

Метод Уиттекера, использованный в гл. XI, приводит к уравнениям возмущенного движения в переменных Делонэ настолько естественным путем, что оказывается ненужным снова выводить эти уравнения в настоящей главе. Обычная процедура заключается в выражении уравнений задачи двух тел в канонической форме, используя сферические полярные координаты и связанные с ним импульсы, и в получении дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных. При этом выборе координат переменные могут быть разделены, и таким образом можно получить решение этой проблемы. Из последних работ, которые приводят это решение, мы сошлемся на следующие: M. Finlay-Freundlich, Celestial Mechanics, Pergamon Press, London, 1958; W. M. Smart, Celestial Mechanics, Longmans, Green, London, 1953 (готовится русский перевод — *Ред.*); H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1951; E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933.

Единственным вопросом, рассмотренным в этой главе, для которого было существенным решение уравнения Гамильтона — Якоби путем разделения переменных, был вопрос о движении искусственного спутника. Метод, использованный Гарфинкелем (B. Garfinkel, Astron. J., 64, 353, 1959), зависит от решения задачи с видоизмененным гамильтонианом в качестве приближения к гамильтониану реально существующей задачи. Этот метод впервые был предложен Штерном (Th. F. Sterne, Astron. J., 63, 28, 1958). Другим методом является метод Винти (J. P. Vinti,

J. Research Nat. Bur. Standards, 63B, 105, 1959), оказывающийся, по существу, аналитически тождественным классической проблеме двух неподвижных центров, которая может быть решена путем разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. Связь между проблемой движения искусственного спутника под действием притяжения вытянутого сфероида и проблемой движения частицы, притягиваемой двумя неподвижными центрами, была открыта впервые в 1959 г. Пайнсом. В одной из дискуссий между Пайнсом и Брауэром было найдено преобразование в задаче двух неподвижных центров, необходимое для получения потенциала сжатого сфероида.

Относительно решения проблемы двух неподвижных центров см. книгу Шарлье (C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Band 1, Kapitel 3, Leipzig, 1903) или Уиттекера «Аналитическая динамика» (ОНТИ, М.-Л., 1937).

Вообще для разрешимых проблем динамики можно выбрать обобщенные координаты и импульсы и получить уравнение Гамильтона — Якоби, которое может быть решено посредством разделения переменных. Проблема трех тел не принадлежит к числу проблем этого типа. Поэтому для решения этой проблемы методами теории возмущений требуется другой, отличный принцип.

В своей основе этот принцип является принципом метода Делонэ, которым восхищались и который пропагандировали Хилл и Пуанкаре. Справочным мемуаром по этому вопросу является работа Хилла (G. W. Hill, On the extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motion, Collected Mathematical Works, vol. IV, Memoir 66, Carnegie Inst. of Washington, 1907, p. 169—206).

Вклад Цейпеля, сделанный им в труде «Recherches sur le mouvement des petites planètes» (Arkiv Mat., Astron., Fysik, 11, №№ 1 и 7; 12, № 9; 13, № 3 (1916—1917)), представляет собой двойной вклад. Цейпель вводит определяющую функцию как средство для выполнения преобразования Делонэ и использует эту процедуру для исключения при одном преобразовании членов с любыми аргументами (а не просто кратными одного аргумента, как это сделал Хилл) при условии, что они не порождают малых делителей.

В сущности этот же метод, по-видимому, независимо открыт Брауном (E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, chapt. 6, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933). Интересно отметить, что если η, y — старые и новые угловые переменные, а ξ, x — импульсы, то определяющей функцией Цейпеля является $S(x,\eta)$, тогда как Браун и Шук применяют $S(\xi, y)$. В принципе обе эти функции эквивалентны. В этой главе мы использовали методику Цейпеля, которая, по-видимому, обладает явными преимуществами. (Теоретически имеются две другие альтернативы $S(\xi, x)$ и $S(\eta, y)$, но для теории возмущений небесной механики эти формы непригодны.)

Содержание этой главы ограничено изложением метода канонических переменных как мощного общего метода для решения задач небесной механики. Относительно приложений к резонансным проблемам мы ссылаемся на упомянутые выше мемуары Хилла и Цейпеля, на «Новые методы небесной механики» (t. II, Gauthier-Villars, Paris, 1893) Пуанкаре, на «Теорию планет» (гл. 8) Брауна и Шука и на статью Хори (Astron. J., 65, 291, 1960) об орбитах в окрестности критической наклонности в задаче о движении искусственного спутника.