Для отношения яркости в центре диска к яркости на краю, т. е. для величины $I(0, 0)/I(0, \pi/2)$, эти формулы соответственно дают: 3, 2,5 и 2,7. Как мы увидим ниже, точное значение этой величины равно 2,9.

Таким образом, яркость в центре диска значительно больше яркости на краю. Объясняется это тем, что в центре диска излучение выходит в среднем из более глубоких слоев, чем на краю.

Приведенный выше теоретический закон распределения яркости по диску звезды в общем подтверждается наблюдательными данными. Эти данные получены в основном при изучении Солнца, так как дисков других звезд мы не видим. Некоторые сведения о потемнении диска звезды при переходе от центра к краю дает также анализ кривых изменения блеска затменных переменных. В этом случае одна звезда периодически закрывает другую и по свечению оставшейся не закрытой части диска звезды можно судить о распределении яркости по диску.

Подчеркнем, что в этом параграфе речь шла о полных (т. е. проинтегрированных по всему спектру) яркостях. Наблюдения же дают не только распределение по диску звезды полной яркости, но и распределение яркости в различных длинах волн. Вопрос о законе потемнения диска звезды при переходе от центра к краю в различных длинах волн будет рассмотрен ниже.

§ 3. Точное решение основных уравнений

1. Уравнение для резольвенты. Приведенное выше интегральное уравнение Милна представляет собой частный случай уравнений, довольно часто встречающихся в астрофизике. Все эти уравнения имеют ядра, зависящие от абсолютного значения разности двух аргументов. Для решения таких уравнений был предложен сравнительно простой метод, который мы сейчас и изложим (см. [5]). Затем этот метод будет использован для получения точного решения задачи о переносе излучения через фотосферу звезды. В дальнейшем тем же методом будут решены другие астрофизические задачи (об образовании линий поглощения в звездных спектрах, о рассеянии света в атмосферах планет и т. д.).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$S(\tau) = \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau' + g(\tau), \tag{3.1}$$

определяющее функцию $S(\tau)$ (не совпадающую, вообще говоря, с введенной ранее функцией $S(\tau)$, но имеющую аналогичный физический смысл). Здесь $K(|\tau - \tau'|)$ — ядро уравнения и $g(\tau)$ — функция, характеризующая распределение источников излучения в среде. Функции $K(\tau)$ и $g(\tau)$ являются заданными и для разных задач различными (с примерами мы познакомимся позднее).

Решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде

$$S(\tau)=g(\tau)+\int_0^\infty \Gamma(\tau,\ \tau')\,g(\tau')\,d\tau', \tag{3.2}$$

где $\Gamma(\tau,\ \tau')$ — резольвента, удовлетворяющая, как известно, уравнению

$$\Gamma(\tau,\ \tau')=K(|\tau-\tau'|)+\int_0^\infty K(|\tau-\tau''|)\,\Gamma(\tau'',\ \tau')\,d\tau''. \tag{3.3}$$

При этом $\Gamma(\tau,\ \tau')$ является симметричной функцией от τ и τ', т. е. $\Gamma(\tau,\ \tau')=\Gamma(\tau',\ \tau)$.

Пользуясь уравнением (3.3), мы можем получить новое уравнение для резольвенты. Для этого перепишем (3.3) в виде

$$\Gamma(\tau,\ \tau')=K(|\tau-\tau'|)+$$
$$+\int_0^\tau K(\alpha)\,\Gamma(\tau-\alpha,\ \tau')\,d\alpha+\int_0^\infty K(\alpha)\,\Gamma(\tau+\alpha,\ \tau')\,d\alpha. \tag{3.4}$$

Дифференцируя (3.4) сначала по τ, затем по τ' и складывая почленно полученные равенства, находим

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau'}=K(\tau)\,\Gamma(0,\ \tau')+\int_0^\infty K(|\tau-\tau''|)\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau'}\right)d\tau''. \tag{3.5}$$

С другой стороны, из уравнения (3.3) имеем

$$\Gamma(0,\ \tau)=K(\tau)+\int_0^\infty K(|\tau-\tau''|)\,\Gamma(\tau'',\ 0)\,d\tau''. \tag{3.6}$$

Сравнение (3.5) и (3.6) дает

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau'}=\Phi(\tau)\,\Phi(\tau'), \tag{3.7}$$

где обозначено

$$\Gamma(0,\ \tau)=\Phi(\tau). \tag{3.8}$$

Из (3.7) следует (при $\tau'>\tau$):

$$\Gamma(\tau,\ \tau')=\Phi(\tau'-\tau)+\int_0^\tau \Phi(\alpha)\,\Phi(\alpha+\tau'-\tau)\,d\alpha. \tag{3.9}$$

Таким образом, резольвента $\Gamma(\tau,\ \tau')$ выражается через функцию $\Phi(\tau)$, зависящую только от одного аргумента.

Для определения функции $\Phi(\tau)$ может быть использовано уравнение

$$\Phi(\tau)=K(\tau)+\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,\Phi(\tau')\,d\tau', \tag{3.10}$$

представляющее собой уравнение (3.6) при учете (3.8). Другое уравнение для определения $\Phi(\tau)$ будет получено ниже.

2. Вспомогательные уравнения. Через функцию $\Phi(\tau)$ выражается решение уравнения (3.1) при любой функции $g(\tau)$. Поэтому функция $\Phi(\tau)$ должна играть фундаментальную роль в теории рассматриваемых уравнений. С целью определения этой функции мы сейчас получим некоторые вспомогательные уравнения. Вместе с тем, как мы увидим дальше, эти уравнения представят интерес и сами по себе.

Рассмотрим уравнение

$$S(\tau,\ x)=\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,S(\tau',\ x)\,d\tau'+e^{-x\tau}, \tag{3.11}$$

являющееся частным случаем уравнения (3.1). На основании формулы (3.2) имеем

$$S(\tau,\ x)=e^{-x\tau}+\int_0^\infty \Gamma(\tau',\ \tau)\,e^{-x\tau'}\,d\tau'. \tag{3.12}$$

Умножая (3.7) на $e^{-x\tau'}$, интегрируя по τ' в пределах от 0 до ∞ и учитывая (3.12), получаем

$$\frac{\partial S(\tau,\ x)}{\partial\tau}=-xS(\tau,\ x)+\Phi(\tau)\left[1+\int_0^\infty \Phi(\tau')\,e^{-x\tau'}\,d\tau'\right]. \tag{3.13}$$

Но из (3.12) следует

$$S(0,\ x)=1+\int_0^\infty \Phi(\tau)\,e^{-x\tau}\,d\tau. \tag{3.14}$$

Поэтому находим

$$\frac{\partial S(\tau,\ x)}{\partial\tau}=-xS(\tau,\ x)+S(0,\ x)\,\Phi(\tau). \tag{3.15}$$

Интегрирование уравнения (3.15) дает

$$S(\tau,\ x)=S(0,\ x)\left[e^{-x\tau}+\int_0^\tau e^{-x(\tau-\tau')}\Phi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{3.16}$$

В большинстве задач о переносе излучения ядро интегрального уравнения (3.1) представляется в виде

$$K(\tau)=\int_a^b A(y)\,e^{-y\tau}\,dy, \tag{3.17}$$

где $A(y)$ — произвольная функция, a и b — некоторые числа. В этом случае для определения функции $S(0, x)$ получаются сравнительно простые уравнения. В свою очередь искомая функция $\Phi(\tau)$ выражается через функцию $S(0, x)$.

Если $K(\tau)$ дается формулой (3.17), то из уравнения (3.11) следует

$$S(0, x)=1+\int_a^b A(y)\,dy\int_0^\infty S(\tau, x)\,e^{-y\tau}\,d\tau. \tag{3.18}$$

Умножая (3.15) на $e^{-y\tau}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ и принимая во внимание (3.14), находим

$$\int_0^\infty S(\tau, x)\,e^{-y\tau}\,d\tau=\frac{S(0, x)\,S(0, y)}{x+y}. \tag{3.19}$$

Подстановка (3.19) в (3.18) дает

$$S(0, x)=1+S(0, x)\int_a^b A(y)\frac{S(0, y)}{x+y}\,dy. \tag{3.20}$$

Мы получили нелинейное интегральное уравнение для определения $S(0, x)$, которое легко может быть решено численно.

Из уравнения (3.20) можно также получить линейное интегральное уравнение для определения $S(0, x)$. Умножая (3.20) на $A(x)/(x-z)$ и интегрируя по x в пределах от a до b, после небольших преобразований находим

$$S(0, z)\left[1-2\int_a^b A(x)\frac{x\,dx}{x^2-z^2}\right]=1-\int_a^b A(x)\frac{S(0, x)}{x-z}\,dx. \tag{3.21}$$

Решение этого уравнения может быть получено в явном виде.

3. Определение функции $\Phi(\tau)$. Сравнивая между собой уравнения (3.10) и (3.11), мы видим, что свободный член уравнения (3.10) является суперпозицией свободных членов уравнения (3.11). Поэтому имеем

$$\Phi(\tau)=\int_a^b A(x)\,S(\tau, x)\,dx. \tag{3.22}$$

Умножая (3.16) на $A(x)$ и интегрируя по x в пределах от a до b, находим

$$\Phi(\tau)=L(\tau)+\int_0^\tau L(\tau-\tau')\,\Phi(\tau')\,d\tau', \tag{3.23}$$

где

$$L(\tau)=\int_a^b A(x)\,S(0,x)\,e^{-x\tau}\,dx. \tag{3.24}$$

Уравнение (3.23) является искомым уравнением для определения функции $\Phi(\tau)$. Применяя к нему преобразование Лапласа, получаем

$$\int_0^\infty \Phi(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau=\frac{1}{1-\int_a^b A(x)\,S(0,x)\frac{dx}{x+s}}-1. \tag{3.25}$$

Таким образом, определение резольвенты уравнения (3.1) сводится к нахождению функции $S(0, x)$ из уравнения (3.20) [или (3.21)] и последующему определению функции $\Phi(\tau)$ из (3.25) путем обращения преобразования Лапласа. Последняя операция легко выполняется методом контурного интегрирования при использовании соотношения (3.21).

Если функция $\Phi(\tau)$ известна, то при помощи формул (3.2) и (3.9) может быть найдена и функция $S(\tau)$ при любых источниках излучения. В некоторых случаях функция $S(\tau)$ выражается через $\Phi(\tau)$ весьма просто. Примером может служить случай, когда источники излучения распределены в среде экспоненциально. Как уже было показано выше, при $g(\tau)=e^{-x\tau}$ функция $S(\tau)$, обозначенная нами через $S(\tau, x)$, дается формулой (3.16).

Особенно простое выражение для функции $S(\tau)$ получается при равномерном распределении источников излучения в среде, т. е. при $g(\tau)=1$. Полагая в формуле (3.16) $x=0$, находим

$$S(\tau,\ 0)=S(0,\ 0)\left[1+\int_0^\tau \Phi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{3.26}$$

Входящая в формулу (3.26) величина $S(0, 0)$ непосредственно выражается через функцию $A(x)$. Положим в (3.20) $x=0$ и в (3.21) $z=0$. Тогда из полученных уравнений следует

$$S^2(0,\ 0)\left[1-2\int_a^b A(x)\frac{dx}{x}\right]=1. \tag{3.27}$$

Простые формулы для функции $S(\tau)$ можно также получить при $g(\tau)=\tau^n$, где n — целое число.

4. Решение однородного уравнения. Выше было показано, что решение неоднородного уравнения (3.1) при любой функции $g(\tau)$ выражается через функцию $\Phi(\tau)$. Теперь мы покажем, что через ту же функцию $\Phi(\tau)$ выражается решение однородного уравнения

$$S(\tau)=\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,S(\tau')\,d\tau'. \tag{3.28}$$

С физической точки зрения это уравнение соответствует случаю, когда источники энергии расположены на бесконечно большой глубине.

Предполагая, что решение уравнения (3.28) существует, продифференцируем его по τ. В результате находим

$$S'(\tau)=\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,S'(\tau')\,d\tau'+S(0)\,K(\tau). \tag{3.29}$$

Сравнивая между собой уравнения (3.29) и (3.10), мы видим, что

$$S'(\tau)=kS(\tau)+S(0)\,\Phi(\tau), \tag{3.30}$$

где k — некоторая постоянная. Из (3.30) следует

$$S(\tau)=S(0)\left[e^{k\tau}+\int_0^\tau e^{k(\tau-\tau')}\,\Phi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{3.31}$$

Для нахождения постоянной k рассмотрим уравнение (3.28) при $\tau=0$. Учитывая (3.17), имеем

$$S(0)=\int_a^b A(x)\,dx\int_0^\infty S(\tau)\,e^{-x\tau}\,d\tau. \tag{3.32}$$

Умножая (3.30) на $e^{-x\tau}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ и принимая во внимание (3.14), находим

$$\int_0^\infty S(\tau)\,e^{-x\tau}\,d\tau=S(0)\,\frac{S(0,\,x)}{x-k}. \tag{3.33}$$

Подстановка (3.33) в (3.32) дает

$$\int_a^b A(x)\,\frac{S(0,\,x)}{x-k}\,dx=1, \tag{3.34}$$

или, при учете (3.21),

$$2\int_a^b A(x)\,\frac{x\,dx}{x^2-k^2}=1. \tag{3.35}$$

Таким образом, решение однородного уравнения (3.28) выражается через функцию $\Phi(\tau)$ формулой (3.31), в которой постоянная k определяется уравнением (3.35).

5. Интенсивность выходящего излучения. Вспомогательная функция $\Phi(\tau)$ представляет интерес не только потому, что через нее выражается резольвента интегрального уравнения (3.1). Не менее существенно и то, что интенсивность излучения, выходящего из среды, во многих случаях также непосредственно выражается через ту же функцию.

Мы сейчас рассмотрим некоторые из этих случаев, однако предварительно получим важную общую формулу для интенсивности выходящего из среды излучения.

Рассмотрим излучение, выходящее из полубесконечной среды под углом ϑ к нормали. Обозначая $\cos\vartheta = \mu$, для интенсивности этого излучения имеем

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty S(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}. \tag{3.36}$$

Здесь под $S(\tau)$ понимается решение интегрального уравнения (3.1) при любой функции $g(\tau)$, т. е. при любых источниках излучения.

Функция $S(\tau)$ выражается через $g(\tau)$ и резольвенту $\Gamma(\tau, \tau')$ при помощи формулы (3.2). Подставляя (3.2) в (3.36), получаем

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty g(\tau) \frac{d\tau}{\mu} \left[e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau')\, e^{-\frac{\tau'}{\mu}}\, d\tau' \right]. \tag{3.37}$$

Отсюда на основании (3.12) следует:

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty g(\tau)\, S\left(\tau, \frac{1}{\mu}\right) \frac{d\tau}{\mu}. \tag{3.38}$$

Это и есть искомая формула для интенсивности излучения. Таким образом, для нахождения функции $I(0, \mu)$ при любых источниках излучения достаточно знать лишь функцию $S(\tau, x)$, определенную уравнением (3.11).

Однако, как уже сказано, во многих частных случаях для определения интенсивности излучения нам должна быть известна только функция $S(0, x)$. Поскольку эта функция определяется непосредственно из уравнений (3.20) или (3.21), то для нахождения $I(0, \mu)$ в этих случаях не требуется знания функции $\Phi(\tau)$.

Рассмотрим следующие частные случаи расположения источников излучения:

1. Пусть функция $g(\tau)$ убывает с оптической глубиной экспоненциально, т. е.

$$g(\tau) = e^{-m\tau}. \tag{3.39}$$

В данном случае, пользуясь формулой (3.19), находим

$$I(0,\ \mu)=\frac{S(0,\ m)\,S\left(0,\ \frac{1}{\mu}\right)}{1+m\mu}. \tag{3.40}$$

2. Допустим, что источники излучения расположены в среде равномерно, т. е. $g(\tau)=1$. В этом случае, полагая в (3.40) $m=0$, получаем

$$I(0,\ \mu)=S(0,\ 0)\,S\left(0,\ \frac{1}{\mu}\right). \tag{3.41}$$

Подстановка S (0, 0) из (3.27) в (3.41) дает

$$I(0,\ \mu)=S\left(0,\ \frac{1}{\mu}\right)\left[1-2\int_a^b A(x)\,\frac{dx}{x}\right]^{-1/2}. \tag{3.42}$$

3. Предположим, что $g(\tau)=\tau$. На основании формулы (3.38) имеем

$$I(0,\ \mu)=\int_0^\infty \tau S\left(\tau,\ \frac{1}{\mu}\right)\frac{d\tau}{\mu}. \tag{3.43}$$

Для определения интеграла (3.43) воспользуемся уравнением (3.15). Умножая это уравнение на τ и интегрируя по τ от 0 до ∞, получаем

$$x\int_0^\infty S(\tau,\ x)\,\tau\,d\tau=\int_0^\infty S(\tau,\ x)\,d\tau+S(0,\ x)\int_0^\infty \Phi(\tau)\,\tau\,d\tau. \tag{3.44}$$

Но из формул (3.38) и (3.41) следует

$$x\int_0^\infty S(\tau,\ x)\,d\tau=S(0,0)\,S(0,\ x). \tag{3.45}$$

Поэтому вместо (3.44) находим

$$x\int_0^\infty S(\tau,\ x)\,\tau\,d\tau=S(0,\ x)\left[\frac{1}{x}S(0,\ 0)+\int_0^\infty \Phi(\tau)\,\tau\,d\tau\right]. \tag{3.46}$$

Для определения интеграла в правой части соотношения (3.46) умножим это соотношение на $A(x)\,dx/x$ и проинтегрируем от a до b. Пользуясь формулой (3.22) и уравнением (3.20) при $x=0$, получаем

$$\int_0^\infty \Phi(\tau)\,\tau\,d\tau=S^2(0,\ 0)\int_a^b A(x)\,S(0,\ x)\,\frac{dx}{x^2}. \tag{3.47}$$

Заменяя в (3.46) x на $1/\mu$ и подставляя (3.47), окончательно находим

$$I(0, \mu) = S(0, 0)\, S\left(0, \frac{1}{\mu}\right)\left[\mu + S(0, 0)\int_a^b A(x)\, S(0, x)\frac{dx}{x^2}\right]. \quad (3.48)$$

Аналогично, пользуясь формулой (3.38) и уравнением (3.15), можно найти интенсивность излучения $I(0, \mu)$ и в случае, когда $g(\tau) = \tau^n$ при любом целом n.

4. Будем считать, что источники излучения расположены на бесконечно большой глубине. В этом случае функция $S(\tau)$, определяемая однородным уравнением (3.28), связана с функцией $\Phi(\tau)$ соотношением (3.30). Умножая это соотношение на $e^{-\tau/\mu}$ и интегрируя по τ от 0 до ∞, находим

$$I(0, \mu)(1 - k\mu) = S(0)\left[1 + \int_0^\infty \Phi(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{\mu}}\, d\tau\right]. \quad (3.49)$$

Отсюда, при использовании формулы (3.14), следует:

$$I(0, \mu) = S(0)\frac{S\left(0, \frac{1}{\mu}\right)}{1 - k\mu}. \quad (3.50)$$

Мы видим, что во всех рассмотренных случаях интенсивность излучения $I(0, \mu)$ выражается через функцию $S(0, x)$ весьма простыми формулами. В дальнейшем эти формулы будут неоднократно применяться.

6. Применение к звездным фотосферам. Применим изложенный выше метод к решению задачи о переносе излучения через фотосферу звезды. Как мы знаем, при предположении о независимости коэффициента поглощения от частоты указанная задача сводится к интегральному уравнению Милна

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty E_1 |\tau - \tau'|\, S(\tau')\, d\tau'. \quad (3.51)$$

Мы видим, что это уравнение является частным случаем однородного уравнения (3.28) при

$$K(\tau) = \frac{1}{2}E_1\tau = \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-\tau x}\frac{dx}{x}, \quad (3.52)$$

т. е. при $A(x) = 1/2x$, $a = 1$ и $b = \infty$.

Применение изложенного метода должно начинаться с составления уравнения для определения функции $S(0, x)$. Для упрощения записи обозначим $x = 1/\mu$, $S(0, x) = \varphi(\mu)$. Тогда уравнение

(3.20) для данного случая принимает вид

$$\varphi(\mu)=1+\frac{\mu}{2}\varphi(\mu)\int_0^1\frac{\varphi(\mu')}{\mu+\mu'}d\mu'. \tag{3.53}$$

Уравнение (3.53) было впервые получено В. А. Амбарцумяном другим способом. Путем численного решения этого уравнения были составлены подробные таблицы функции $\varphi(\mu)$. Эта функция монотонно возрастает от значения $\varphi(0)=1$ до значения $\varphi(1)=2{,}9$. Получено также выражение $\varphi(\mu)$ в явном виде *).

Если функция $\varphi(\mu)$ известна, то может быть найдена и функция $\Phi(\tau)$. Для ее определения мы имеем уравнение

$$\int_0^\infty\Phi(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\int_0^1\varphi(\mu)\frac{d\mu}{1+s\mu}}-1, \tag{3.54}$$

вытекающее из (3.25). Обращение преобразования Лапласа дает

$$\Phi(\tau)=\sqrt{3}+2\int_0^1\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}d\mu}{\left[(\pi\mu)^2+\left(2+\mu\ln\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2\right]\mu\varphi(\mu)}. \tag{3.55}$$

Знание функции $\Phi(\tau)$ позволяет получить как решение однородного уравнения (3.51), так и решение соответствующего ему неоднородного уравнения. Однако нас сейчас интересует только решение уравнения (3.51). Это решение определяется формулой (3.31).

Из уравнения (3.35) следует, что в данном случае $k=0$. Поэтому имеем

$$S(\tau)=S(0)\left[1+\int_0^\tau\Phi(\tau')d\tau'\right]. \tag{3.56}$$

Формулой (3.56) и дается искомое точное решение интегрального уравнения Милна.

Мы можем также получить точный закон распределения яркости по диску звезды. Яркость на угловом расстоянии ϑ от центра диска дается формулой (2.54). Полагая в ней $\cos\vartheta=\mu$, приходим к формуле (3.36). Выше было показано, что интенсивность излучения $I(0,\ \mu)$ при источниках на бесконечности определяется формулой (3.50). Но в данном случае $k=0$ и $S(0,\ 1/\mu)=\varphi(\mu)$. Поэтому яркость на угловом расстоянии $\arccos\mu$ от центра диска будет равна

$$I(0,\ \mu)=S(0)\varphi(\mu). \tag{3.57}$$

*) Подробнее об уравнениях типа (3.53) см. в гл. IV.

Для отношения яркости в центре диска к яркости на краю находим значение $\varphi(1)/\varphi(0)=2{,}9$, уже упоминавшееся в предыдущем параграфе.

Входящую в формулы (3.56) и (3.57) величину $S(0)$ можно выразить через поток излучения в фотосфере πF. Мы имеем

$$F=2\int_0^1 I(0,\ \mu)\,\mu\,d\mu=2S(0)\,\alpha_1, \tag{3.58}$$

где использовано обозначение

$$\alpha_n=\int_0^1 \varphi(\mu)\,\mu^n\,d\mu. \tag{3.59}$$

Величины α_n, представляющие собой моменты функции $\varphi(\mu)$, могут быть найдены из уравнения (3.53). Интегрируя это уравнение по μ в пределах от 0 до 1, получаем

$$\alpha_0=1+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \varphi(\mu)\,\varphi(\mu')\,\frac{\mu}{\mu+\mu'}\,d\mu\,d\mu'=$$

$$=1+\frac{1}{2}\alpha_0^2-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \varphi(\mu)\,\varphi(\mu')\,\frac{\mu'}{\mu+\mu'}\,d\mu\,d\mu'=2+\frac{1}{2}\alpha_0^2-\alpha_0, \tag{3.60}$$

откуда следует, что

$$\alpha_0=2. \tag{3.61}$$

Умножая (3.53) на $\mu^2 d\mu$ и интегрируя в пределах от 0 до 1, аналогично находим

$$\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{3.62}$$

Подстановка (3.62) в (3.58) дает

$$F=\frac{4}{\sqrt{3}}S(0). \tag{3.63}$$

Эта формула, выражающая точную зависимость между величинами F и $S(0)$, уже приводилась в предыдущем параграфе.

Подставляя (3.63) в (3.56), находим

$$S(\tau)=\frac{\sqrt{3}}{4}F\left[1+\int_0^\tau \Phi(\tau')\,d\tau'\right]. \tag{3.64}$$

Сравнение (3.64) с (2.51) дает

$$q(\tau)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+\int_0^\tau \Phi(\tau')\,d\tau'\right]-\tau. \tag{3.65}$$

Если мы подставим в (3.65) выражение (3.55), то придем к формуле, позволяющей вычислить функцию $q(\tau)$ по известным значениям функции $\varphi(\mu)$.

§ 4. Локальное термодинамическое равновесие

1. Поле излучения при термодинамическом равновесии. Как увидим дальше, в теории фотосфер широко используются формулы, описывающие состояние термодинамического равновесия. Поэтому мы должны привести некоторые из этих формул. Особый интерес представляет для нас вопрос о поле излучения при термодинамическом равновесии.

Как известно, термодинамическое равновесие осуществляется в полости, стенки которой нагреты до некоторой постоянной температуры T. Состояние термодинамического равновесия характеризуется тем, что каждый процесс уравновешивается противоположным ему процессом (в этом состоит «принцип детального равновесия»).

Отсюда, в частности, следует, что интенсивность излучения при термодинамическом равновесии не зависит ни от места, ни от направления. Если бы это было не так, то совершался бы переход энергии из одного места в другое в некоторых направлениях.

Очевидно также, что интенсивность излучения при термодинамическом равновесии не зависит от индивидуальных свойств полости. Для уяснения этого достаточно допустить, что имеются две полости с одинаковыми температурами, но с разными значениями интенсивности излучения частоты ν. Тогда при соединении этих полостей начался бы переход энергии из одной полости в другую, в противоречии со вторым началом термодинамики.

Таким образом, интенсивность излучения при термодинамическом равновесии зависит только от частоты и температуры. Мы обозначим эту интенсивность через $B_\nu(T)$.

Применим к рассматриваемому случаю уравнение переноса излучения (1.11). Так как в данном случае $dI_\nu/ds=0$, то из (1.11) следует

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}=B_\nu(T). \tag{4.1}$$

Формулой (4.1) выражается закон Кирхгофа: при термодинамическом равновесии отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения равно интенсивности излучения, являющейся универсальной функцией от частоты и температуры.

Выражение для интенсивности излучения при термодинамическом равновесии впервые было найдено Планком. Формула