

§ 5. Зависимость коэффициента поглощения от частоты

1. Излучение и поглощение в непрерывном спектре. До сих пор мы не касались вопроса о том, с какими физическими процессами связано излучение и поглощение энергии в непрерывном спектре. Переходя теперь к рассмотрению этого вопроса, обратимся к схеме энергетических уровней атома (рис. 4).

Как известно, каждый атом может находиться в некоторых устойчивых состояниях с определенными дискретными значениями энергии:

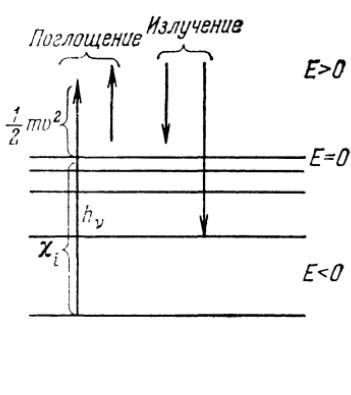


Рис. 4

$E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ Эти значения энергии отрицательны ($E_i < 0$). В соответствующих им состояниях внешний электрон связан с атомом, или, как иногда говорят, находится на эллиптической орбите. При переходах атома между такими состояниями происходит излучение и поглощение квантов в спектральных линиях.

Вместе с тем атом может находиться и в состояниях с положительной энергией ($E > 0$). В таких состояниях электрон не связан с атомом, т. е. находится на гиперболической орбите. Положительные энергетические уровни атома расположены непрерывно.

Переход атома из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией (т. е. переход электрона из связанного состояния в свободное) называется ионизацией атома. Ионизация может происходить под действием излучения; в таком случае она называется фотоионизацией.

При фотоионизации происходит поглощении светового кванта. При этом энергия кванта частично расходуется на отрыв электрона от атома, а частично на сообщение кинетической энергии оторванному электрону. Иными словами, в этом случае имеет место соотношение

$$h\nu = \chi_i + \frac{1}{2}mv^2, \quad (5.1)$$

где обозначено $\chi_i = -E_i$. Величина χ_i представляет собой энергию ионизации атома из i -го состояния. Соотношение (5.1) было впервые получено Эйнштейном при рассмотрении фотоэлектрического эффекта.

При фотоионизации с i -го уровня может быть поглощен любой квант, энергия которого больше или равна энергии ионизации, т. е. $h\nu \geq \chi_i$. Следовательно, при фотоионизации происходит поглощение энергии в непрерывном спектре.

Процесс, обратный ионизации, т. е. захват ионизованным атомом свободного электрона, называется рекомбинацией. При рекомбинации происходит излучение энергии в непрерывном спектре. При этом если электрон со скоростью v захватывается на i -й уровень, то излучается квант частоты ν , определяемой тем же соотношением (5.1).

Кроме фотоионизаций и рекомбинаций, к поглощению и излучению энергии в непрерывном спектре ведут также переходы атомов между состояниями с положительной энергией, т. е. переходы электронов из свободных состояний в свободные. Очевидно, что при таких переходах могут поглощаться и излучаться кванты любой частоты.

Вероятности всех указанных переходов характеризуются соответствующими коэффициентами поглощения и излучения. Мы обозначим через k_{iv} коэффициент поглощения квантов частоты ν , рассчитанный на один атом в i -м состоянии. Тогда объемный коэффициент поглощения квантов частоты ν атомами в i -м состоянии будет равен $\alpha'_{iv} = n_i k_{iv}$, где n_i — число атомов в i -м состоянии в единице объема. А объемный коэффициент поглощения, обусловленный всеми фотоионизациями, будет равен

$$\alpha'_v = \sum_{i=i_0}^{\infty} n_i k_{iv}, \quad (5.2)$$

где i_0 определяется для каждой частоты из того условия, что при $i \geq i_0$ выполняется неравенство $hv \geq \chi_i$.

Объемный коэффициент поглощения, обусловленный свободно-свободными переходами, мы обозначим через α''_v . Очевидно, что он пропорционален числу свободных электронов и числу ионизованных атомов в единице объема (так как свободно-свободные переходы совершаются в поле иона).

Полный объемный коэффициент поглощения α_v (фигурировавший в предыдущем параграфе) является суммой:

$$\alpha_v = \alpha'_v + \alpha''_v. \quad (5.3)$$

Мы видим, что коэффициент поглощения α_v существенно зависит от распределения атомов по состояниям. Как уже было сказано, в теории фотосфер делается предположение о локальном термодинамическом равновесии. Поэтому и распределение атомов по состояниям мы возьмем такое же, как в случае термодинамического равновесия.

Как известно, в указанном случае распределение атомов по дискретным уровням энергии дается формулой Больцмана:

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{g_i}{g_1} e^{-\frac{\chi_1 - \chi_i}{kT}}, \quad (5.4)$$

где g_i — статистический вес i -го уровня. Величина $\chi_1 - \chi_i$ представляет собой энергию возбуждения i -го уровня.

Обобщая (5.4) на состояния атома с положительной энергией, можно получить отношение числа ионизованных атомов к числу нейтральных атомов. Это отношение дается формулой

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = 2 \frac{g^+}{g_1} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}, \quad (5.5)$$

которая называется формулой ионизации или формулой Саха. Здесь n_e — число свободных электронов и n^+ — число ионов в основном состоянии в 1 см³, g^+ — статистический вес основного состояния иона.

В дальнейшем мы приведем выражения для коэффициентов поглощения k_{iv} и α_v' для некоторых атомов и, пользуясь формулами (5.2) — (5.5), составим выражение для объемного коэффициента поглощения α_v . Формулы для коэффициентов излучения, соответствующих разным типам переходов, нам в теории фотосфер не понадобятся, так как при термодинамическом равновесии нужный нам объемный коэффициент излучения ϵ_v выражается через объемный коэффициент поглощения α_v законом Кирхгофа — Планка.

2. Поглощение атомами водорода. Для вычисления коэффициентов поглощения в непрерывном спектре необходимо знать волновые функции атома как для состояний с отрицательной энергией, так и для состояний с положительной энергией. Нахождение волновых функций является, как известно, очень трудной задачей. Только для простейших случаев она более или менее удовлетворительно разрешена.

Мы сейчас приведем результаты определения коэффициентов поглощения для водородного атома. Коэффициент поглощения k_{iv} , рассчитанный на один атом водорода в i -м состоянии, равен

$$k_{iv} = \frac{2^6 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \frac{me^{10}}{ch^6 i \cdot v^3} g_{iv}, \quad (5.6)$$

где m и e — масса и заряд электрона соответственно, g_{iv} — некоторый поправочный множитель, близкий к единице (так называемый множитель Гаунта). Формула (5.6) справедлива лишь для частот, удовлетворяющих неравенству $v \geq v_i = \chi_i/h$, т. е. за пределом i -й серии. Мы видим, что за пределом серии коэффициент поглощения k_{iv} убывает обратно пропорционально кубу частоты. Значения коэффициента поглощения сразу за пределами первых серий порядка 10^{-17} см² ($0,63 \cdot 10^{-17}$ см² сразу за пределом серии Лаймана, $1,4 \cdot 10^{-17}$ см² — сразу за пределом серии Бальмера и т. д.).

Чтобы найти объемный коэффициент поглощения α_v' , надо подставить выражение (5.6) в формулу (5.2). Вместе с тем мы примем, что распределение атомов по состояниям дается формулами (5.4) и (5.5). Из двух последних формул получаем

$$n_i = n_e n^+ \frac{g_i}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) и (5.7) в формулу (5.2), находим

$$\alpha_v' = n_e n^+ \frac{2^5 \pi^2 e^6}{3 \sqrt[3]{3} ch} \frac{\chi_1}{(2\pi m k T)^{3/2}} \cdot \frac{1}{v^3} \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{g_{iv}}{i^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}, \quad (5.8)$$

где величина χ_1 , как и раньше, есть энергия ионизации из первого состояния, равная

$$\chi_1 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}. \quad (5.9)$$

В формуле (5.8) для частот за границей серии Лаймана $i_0=1$, для частот от границы серии Бальмера до границы серии Лаймана $i_0=2$ и т. д.

Для коэффициента поглощения α_v'' , обусловленного свободно-свободными переходами электрона в поле протона, квантовая механика дает

$$\alpha_v'' = n_e n^+ \frac{2^4 \pi^2 e^6 k T}{3 \sqrt[3]{3} ch (2\pi m k T)^{3/2}} \frac{1}{v^3} g_v, \quad (5.10)$$

где n_e и n^+ — число свободных электронов и число протонов в 1 см^3 соответственно, g_v — поправочный множитель Гаунта порядка единицы. При получении формулы (5.10) принято, что распределение свободных электронов по скоростям дается формулой Максвелла с температурой T . Коэффициент поглощения α_v'' , так же как k_{iv} , обратно пропорционален кубу частоты. Однако формула (5.10), в отличие от формулы (5.6), справедлива для всех частот.

Однако формулы (5.8) и (5.10) не вполне точны, так как в них не учтено так называемое отрицательное поглощение. Подробно об отрицательном поглощении речь будет идти в § 8. Пока же заметим, что при термодинамическом равновесии (точнее говоря, при выполнении формул Максвелла, Больцмана и Саха) для учета отрицательного поглощения приведенное выше выражение для коэффициента поглощения следует умножить на величину $1 - e^{-\frac{hv}{kT}}$.

Подставляя (5.8) и (5.10) в формулу (5.3) и учитывая отрицательное поглощение, получаем следующее выражение для объемного коэффициента поглощения, обусловленного водородными атомами:

$$\alpha_v = n_e n^+ \frac{2^4 \pi^2 e^6 k T}{3 \sqrt[3]{3} ch (2\pi m k T)^{3/2}} \left[2 \frac{\chi_1}{kT} \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{g_{iv}}{i^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} + g_v \right] \frac{1}{v^3} \left(1 - e^{-\frac{hv}{kT}} \right). \quad (5.11)$$

Зависимость коэффициента поглощения от частоты, даваемая формулой (5.11), схематически представлена на рис. 5. Мы видим, что эта зависимость является весьма сложной. Бросаются в глаза скачки коэффициента поглощения у пределов серий.

Аналогичный характер носит зависимость коэффициента поглощения от частоты для водородоподобных ионов (He^+ , Li^{++} и т. д.). В этом случае коэффициенты поглощения определяются

приведенными выше формулами с небольшими видоизменениями. Для иона с атомным номером Z в правую часть формулы (5.6) надо ввести множитель Z^4 , а в правые части формул (5.10) и (5.11) — множитель Z^2 . При этом в формуле (5.11) под χ_1 следует понимать энергию ионизации из основного состояния рассматриваемого иона.

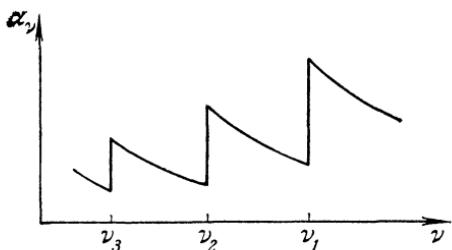


Рис. 5

Приведенные формулы можно использовать и для приближенного вычисления коэффициентов поглощения неводородоподобных атомов. Это можно делать в тех случаях, когда поглощение связано с переходами электронов с высоких энергетических уровней. Вообще же коэффициенты поглощения разных атомов должны определяться специальными расчетами или экспериментально. Оказывается, что зависимость коэффициента поглощения от частоты для разных атомов весьма различна. Например, коэффициент поглощения из основного состояния нейтрального гелия обратно пропорционален квадрату частоты, коэффициент поглощения из основного состояния нейтрального кислорода с увеличением частоты сначала растет, а затем убывает, и т. д.

Из всех неводородоподобных атомов наибольшую роль в фотосферах играет отрицательный ион водорода. Поэтому вопрос о поглощении отрицательными ионами водорода мы должны рассмотреть более подробно.

3. Поглощение отрицательными ионами водорода. Отрицательный ион водорода (обозначаемый через H^-) представляет собой систему, состоящую из нейтрального атома водорода с присоединившимся к нему электроном. Такая система имеет только одно устойчивое состояние с очень небольшой энергией ионизации, равной $\chi_1 = 0,75$ эВ. Для сравнения укажем, что энергия ионизации из основного состояния водорода равна 13,6 эВ, а энергия квантов в видимой части спектра равна 2—3 эВ. Следовательно, частота ионизации отрицательного иона водорода $\nu_1 = \chi_1/h$ находится в далекой инфракрасной части спектра. При фотоионизации отрицательного иона водорода могут поглощаться все кванты с частотами $\nu \geq \nu_1$, в частности, кванты в видимой области спектра.

Определение коэффициента поглощения иона H^- было предметом многих исследований. На рис. 6 приведен коэффициент поглощения k_ν , рассчитанный на один отрицательный ион водорода, в зависимости от частоты. Эта зависимость была получена в работе Чандraseкара [4] (последующие исследования ее мало изменили). Из рис. 6

следует, что в видимой части спектра коэффициент поглощения иона H^- меняется плавно и в сравнительно небольших пределах.

Объемный коэффициент поглощения, обусловленный отрицательным ионом водорода, равен $\alpha'_v = n^- k_v$, где n^- — число ионов H^- в 1 см³. Чтобы получить полный объемный коэффициент поглощения иона H^- , надо к этому выражению добавить еще объемный коэффициент поглощения α''_v , обусловленный свободно-свободными переходами электрона в поле нейтрального атома водорода (который играет роль ионизованного атома для иона H^-). Очевидно, что коэффициент поглощения α''_v пропорционален числу нейтральных атомов водорода и числу свободных электронов в 1 см³. Поэтому мы можем представить его в виде $\alpha''_v = n_1 p_e a_v$, где $p_e = n_e kT$ — электронное давление.

Таким образом, полный объемный коэффициент поглощения иона H^- равен

$$\alpha_v = (n^- k_v + n_1 p_e a_v) \left(1 - e^{-\frac{hv}{kT}} \right), \quad (5.12)$$

где множителем $1 - e^{-\frac{hv}{kT}}$, как и выше, учтено отрицательное поглощение.

Для вычисления коэффициента поглощения α_v по формуле (5.12) необходимо найти число ионов H^- в 1 см³. Это можно сделать с помощью формулы ионизации (5.5), которая в данном случае принимает вид

$$n_e \frac{n_1}{n^-} = g_1 \frac{2 (2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_1}{kT}}, \quad (5.13)$$

где g_1 и g^- — статистические веса основного состояния нейтрального атома водорода и отрицательного иона водорода соответственно ($g_1 = 2$, $g^- = 1$), χ_1 — энергия ионизации иона H^- . Подставляя n^- из (5.13) в (5.12), получаем

$$\alpha_v = n_1 p_e \left[k_v \frac{h^3}{4 (2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}} e^{\frac{\chi_1}{kT}} + a_v \right] \left(1 - e^{-\frac{hv}{kT}} \right). \quad (5.14)$$

Результаты вычисления коэффициента поглощения α_v по формуле (5.14) приведены на графике, взятом из книги Чандрасекара [4]. График дает величину α_v , отнесенную к одному нейтральному атому водорода и к единице электронного давления, в зависимости от длины

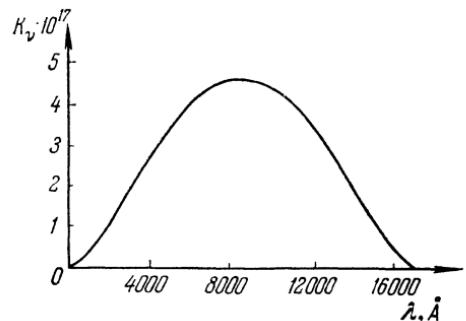


Рис. 6

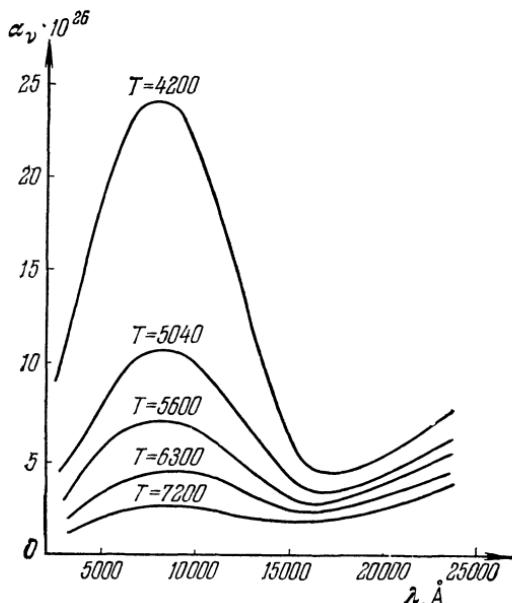


Рис. 7

один свободный электрон, дается формулой Томсона:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2, \quad (5.15)$$

где m и e — заряд и масса электрона, c — скорость света. Числовое значение этого коэффициента равно $\sigma_0 = 6,65 \times 10^{-25} \text{ см}^2$.

Объемный коэффициент рассеяния свободными электронами равен

$$\sigma_e = n_e \sigma_0, \quad (5.16)$$

где n_e — число свободных электронов в 1 см^3 . Очевидно, что в формулу (5.16) не нужно вводить множитель, учитывающий отрицательное поглощение.

Пользуясь формулами (5.16) и (5.11), можно сравнить роль электронного рассеяния и роль поглощения атомами водорода. Находя с помощью указанных формул отношение σ_e/α_v , мы видим, что оно тем больше, чем меньше плотность и чем выше температура. Поэтому роль электронного рассеяния особенно велика в фотосферах горячих сверхгигантов.

Если в элементарном объеме фотосферы происходит поглощение света и рассеяние света свободными электронами, то объемный коэффициент излучения равен

$$\varepsilon_v = \alpha_v \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{\frac{hv}{kT} - 1} + \sigma_e \int I_v \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (5.17)$$

волны для разных температур (рис. 7). Из вычислений, в частности, следует, что поглощение, обусловленное свободно-свободными переходами играет существенную роль только для больших длин волн (примерно для значений $\lambda > 12000 \text{ \AA}$).

4. Рассеяние света свободными электронами. Кроме поглощения света атомами, в переносе излучения через фотосферу некоторую роль играет также рассеяние излучения — свободными электронами (имеющее наибольшее значение), атомами и молекулами. Коэффициент рассеяния, рассчитанный на

где α_v — объемный коэффициент поглощения и I_v — интенсивность падающего на объем излучения. Из формулы (5.17) ясно видно различие между поглощением и рассеянием излучения: только поглощенная энергия перерабатывается в элементарном объеме и переизлучается им согласно закону Кирхгофа — Планка (если имеет место локальное термодинамическое равновесие).

Однако электронное рассеяние все же способствует переработке излучения, так как благодаря электронному рассеянию увеличивается путь фотона в среде, а значит, и вероятность поглощения.

В формуле (5.17) приближенно принимается, что рассеяние света свободными электронами является изотропным. В действительности интенсивность излучения, рассеянного элементарным объемом, зависит от угла γ между направлениями падающего и рассеянного излучения (а именно, пропорциональна $1 + \cos^2 \gamma$). Отметим также, что излучение, рассеянное свободными электронами, является поляризованным.

5. Средний коэффициент поглощения. Выше были приведены результаты определения коэффициентов поглощения для некоторых атомов. На самом деле в каждом объеме фотосферы находится смесь атомов разных химических элементов. Поэтому объемный коэффициент поглощения зависит не только от физических условий в данном месте (т. е. от температуры и плотности), но и от химического состава. Вследствие этого еще более усложняется зависимость объемного коэффициента поглощения от частоты.

Между тем в изложенной в предыдущих параграфах теории фотосфер делалось предположение о независимости коэффициента поглощения от частоты. При отказе от этого предположения теория фотосфер становится гораздо более сложной. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли воспользоваться результатами изложенной теории фотосфер и для того случая, когда коэффициент поглощения зависит от частоты, по крайней мере в первом приближении. С этой целью в теорию фотосфер вводится средний коэффициент поглощения (т. е. коэффициент поглощения, усредненный по частоте). Его пытаются определить так, чтобы сохранилась ранее полученная зависимость температуры от оптической глубины.

Возьмем уравнение переноса излучения

$$\cos \vartheta \frac{dI_v}{dr} = -\alpha_v I_v + \varepsilon_v. \quad (5.18)$$

Умножая это уравнение на $\cos \vartheta$, интегрируя по всем направлениям и вынося за знак интеграла среднее значение $\cos^2 \vartheta$, равное $1/3$, получаем

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d\bar{I}_v}{dr} = -\alpha_v H_v, \quad (5.19)$$

где H_v — поток излучения и \bar{I}_v — средняя интенсивность излучения, равная

$$\bar{I}_v = \int I_v \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (5.20)$$

Интегрируя (5.19) по всем частотам и вводя обозначение

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \alpha_v H_v dv}{H}, \quad (5.21)$$

находим

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d\bar{I}}{dr} = -\bar{\alpha} H, \quad (5.22)$$

где H — полный поток излучения в фотосфере и \bar{I} — средняя полная интенсивность излучения.

Величина $\bar{\alpha}$, определенная формулой (5.21), есть средний коэффициент поглощения. Вводя соответствующую ему оптическую глубину τ по формуле

$$\tau = \int_r^\infty \bar{\alpha} dr, \quad (5.23)$$

вместо (5.21) имеем

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d\bar{I}}{d\tau} = H. \quad (5.24)$$

Так как поток излучения H постоянен в фотосфере, то интегрирование (5.24) дает

$$\bar{I} = \frac{H}{2\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (5.25)$$

Здесь мы воспользовались граничным условием: $2\pi\bar{I}=H$ при $\tau=0$.

Считая, что величина \bar{I} равна полной интенсивности излучения при термодинамическом равновесии, т. е. $\bar{I}=\sigma T^4/\pi$, и выражая полный поток излучения через эффективную температуру T_e по формуле $H=\sigma T_e^4$, вместо (5.25) находим

$$T^4 = T_e^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau \right), \quad (5.26)$$

т. е. ранее полученную формулу (4.20).

Таким образом, определяя средний коэффициент поглощения $\bar{\alpha}$ формулой (5.21) и пользуясь приближением Эддингтона, мы приходим к такой же зависимости между температурой и оптической глубиной, как и в случае, когда коэффициент поглощения не зависит от частоты. Однако вычислить точно величину $\bar{\alpha}$ мы не можем, так как в формулу (5.21) входит поток излучения H_v в реальной фотосфере, в которой коэффициент поглощения зависит от частоты. Поэтому средний коэффициент поглощения $\bar{\alpha}$ приходится вычислять приближенно.

Для приближенного вычисления величины $\bar{\alpha}$ были предложены следующие способы.

1. Будем считать, что поток излучения H_v равен потоку излучения из абсолютно черного тела, т. е. $H_v = \pi B_v(T)$, где $B_v(T)$ — планковская интенсивность при температуре T . Тогда

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \alpha_v B_v(T) dv}{\int B_v(T) dv}. \quad (5.27)$$

2. Возьмем выражение для H_v , даваемое формулой (5.19). Заменяя в ней \bar{I}_v на планковскую интенсивность $B_v(T)$, находим

$$H_v = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\alpha_v} \frac{dB_v(T)}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (5.28)$$

Подстановка (5.28) в (5.21) дает

$$\bar{\alpha} = \frac{\int \frac{dB_v(T)}{dT} dv}{\int \frac{1}{\alpha_v} \frac{dB_v(T)}{dT} dv}. \quad (5.29)$$

Формула (5.29) была предложена Росселандом [2].

3. Примем для H_v выражение, которое получается в случае, когда коэффициент поглощения не зависит от частоты. Обозначая поток излучения для этого случая через $H_v^0(\tau)$, получаем

$$\bar{\alpha} = \int \alpha_v \frac{H_v^0(\tau)}{H} dv. \quad (5.30)$$

Формулу (5.30) предложил Чандрасекар [4], табулировавший также величину $H_v^0(\tau)/H$.

Мы не будем сравнивать между собой различные способы вычисления величины $\bar{\alpha}$. Отметим только, что вычисления по формулам (5.27) и (5.30) проще, чем по формуле (5.29). Это особенно заметно в случае сложного химического состава, так как в формулы (5.27) и (5.30) члены, соответствующие разным атомам, входят аддитивно. Однако формула (5.29), по-видимому, точнее.

Для примера найдем средний коэффициент поглощения по формуле (5.27) в случае, когда поглощение вызывается атомами водорода.

Пользуясь формулой (5.11) для α_v и формулой (4.2) для $B_v(T)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha_v B_v(T) dv &= \\ &= n_e n^+ \frac{2^4 \pi^2 e^6 k T}{3 \sqrt[3]{3} c h (2\pi m k T)^{1/2}} \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \left[1 + 2 \frac{\chi_1}{kT} \sum_{i=i_0}^\infty \frac{1}{i^3} e^{\frac{\chi_i}{kT}} \right] e^{-\frac{h\nu}{kT}} dv. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Здесь для простоты мы положили $g_{iv}=1$ и $g_v=1$. Меняя порядок интегрирования и суммирования и производя интегрирование, находим

$$\int_0^\infty \alpha_v B_v(T) dv = n_e n^+ \frac{2^4 \pi^2 e^6 k T}{3 \sqrt[3]{3} \operatorname{ch}(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{2h}{c^2} \frac{kT}{h} \left[1 + 2,4 \frac{\chi_1}{kT} \right]. \quad (5.32)$$

Кроме того, имеем

$$\int_0^\infty B_v(T) dv = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15}. \quad (5.33)$$

Подстановка (5.32) и (5.33) в формулу (5.27) дает

$$\bar{\alpha} = \frac{40}{\pi^4 \sqrt[3]{3}} \frac{e^6 h^4}{mc (2\pi m)^{3/2}} \chi_1 \left[1 + 2,4 \frac{\chi_1}{kT} \right] \frac{n_e n^+}{(kT)^{7/2}}. \quad (5.34)$$

Формулу (5.34) мы получили для атома водорода, но она справедлива без изменений и для водородоподобных ионов (так как атомный номер Z входит в χ_1). Приближенно формула (5.34) справедлива и для других атомов.

Напомним, что первый член в квадратных скобках формулы (5.34) соответствует свободно-свободным переходам, а второй член — связанно-свободным переходам. В случае поглощения излучения водородными атомами первый член преобладает при температурах, больших 400 000 К, а второй член — при температурах, меньших 400 000 К (так как для водорода $\chi_1/k=157 200$).

Считая, что водородные атомы полностью ионизованы (а значит, $n_e=n^+ \sim \rho$), в двух указанных случаях из формулы (5.34) получаем

$$\bar{\alpha} \approx \frac{\rho^2}{T^{7/2}} \quad (5.35)$$

(при сравнительно высоких температурах) и

$$\bar{\alpha} \approx \frac{\rho^2}{T^{9/2}} \quad (5.36)$$

(при сравнительно низких температурах). Формулы (5.35) и (5.36) довольно часто применяются в астрофизике.

§ 6. Теория фотосфер при коэффициенте поглощения, зависящем от частоты

1. Приближенная теория. Самый простой путь для построения приближенной теории фотосфер при коэффициенте поглощения, зависящем от частоты, состоит в использовании результатов изложенной выше теории фотосфер при предположении о независи-