Ясно, что при исследовании переноса излучения в спектральных линиях следует одновременно принимать во внимание все линии данного атома, т. е. иметь дело с многоуровенным атомом. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать в основном изолированную спектральную линию, т. е. двухуровенный атом. Это необходимо сделать как для получения первого приближения к действительности, так и для более отчетливого понимания физических процессов, ведущих к образованию линейчатых спектров звезд.

§ 10. Линии поглощения при когерентном рассеянии

1. Модель Шварцшильда — Шустера. В предыдущем параграфе мы сделали допущение о локальном термодинамическом равновесии в звездных атмосферах и в соответствии с этим для коэффициента излучения в линии ε_ν пользовались формулой (9.3). Однако это допущение не подтверждается наблюдениями, и поэтому мы должны рассмотреть те реальные физические процессы, которые обусловливают величину ε_ν. Как уже говорилось, возбуждение атомов во внешних слоях звезд вызывается в основном излучением. Следовательно, энергия, излучаемая каким-либо объемом, зависит от лучистой энергии, поглощаемой этим объемом. Поэтому чтобы написать выражение для ε_ν, надо знать долю энергии, излучаемой в частоте ν внутри данной линии, из общего количества поглощаемой лучистой энергии.

Сначала при нахождении величины ε_ν мы сделаем следующие два предположения:

1. Будем считать, что количество энергии, излучаемое элементарным объемом в данной линии, точно равно количеству энергии, поглощаемому этим объемом в той же линии, т. е. нет перераспределения энергии между линиями, а также нет других процессов, ведущих к появлению или исчезновению квантов в рассматриваемой линии. В таком случае говорят о чистом рассеянии излучения в спектральной линии.

2. Будем считать, что энергия, поглощаемая элементарным объемом в данной частоте внутри линии, испускается им в точности в той же частоте, т. е. нет перераспределения излучения по частотам внутри линии. Такой процесс называется когерентным рассеянием излучения.

Указанные предположения были сделаны еще в первых работах по теории звездных спектров и принимались в течение долгого времени. Впоследствии выяснилось, что они весьма далеки от действительности. Это повело к различным уточнениям теории, которые мы рассмотрим позднее.

Из сделанных предположений вытекает, что каждый элементарный объем излучает столько энергии в данной частоте внутри линии, сколько он ее поглощает. Таким образом, мы считаем, что в звездной атмосфере осуществляется монохроматическое лучистое

равновесие. Уравнение, выражающее это равновесие, записывается, очевидно, так:

$$4\pi\varepsilon_\nu = \sigma_\nu \int I_\nu \, d\omega, \tag{10.1}$$

где интегрирование производится по всем телесным углам.

Как уже говорилось во введении к этой главе, первоначально в теории звездных спектров принималось существование резкой границы между фотосферой и атмосферой. При этом считалось, что из фотосферы идет излучение без линий поглощения, а эти линии возникают при прохождении излучения через атмосферу. Такая модель внешних слоев звезды называется моделью Шварцшильда — Шустера.

Принимая эту модель, мы должны в уравнении переноса излучения (9.1) положить равными нулю коэффициенты поглощения и излучения в непрерывном спектре. В таком случае уравнение переноса излучения принимает вид

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = -\sigma_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu. \tag{10.2}$$

Введем оптическую глубину в частоте ν

$$t_\nu = \int_r^\infty \sigma_\nu \, dr \tag{10.3}$$

и обозначим

$$\varepsilon_\nu = \sigma_\nu S_\nu. \tag{10.4}$$

Тогда вместо уравнений (10.1) и (10.2) получаем

$$\left.\begin{aligned} &\cos\vartheta \frac{dI_\nu(t_\nu, \vartheta)}{dt_\nu} = I_\nu(t_\nu, \vartheta) - S_\nu(t_\nu), \\ &S_\nu(t_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^\pi I_\nu(t_\nu, \vartheta)\sin\vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Заметим, что уравнения (10.5) формально не отличаются от уравнений (2.8) в теории фотосфер. Однако уравнения (2.8) относятся к интегральному излучению, а уравнения (10.5) — к излучению определенной частоты ν внутри линии.

К системе уравнений (10.5) надо добавить еще граничные условия. Условие на верхней границе атмосферы (при $t_\nu=0$) выражает отсутствие излучения, падающего на звезду извне:

$$I_\nu(0, \vartheta) = 0 \quad \text{при} \quad \vartheta > \frac{\pi}{2}. \tag{10.6}$$

Условие на нижней границе атмосферы (при $t_\nu = t_\nu^0$) должно выражать собой тот факт, что интенсивность излучения, входящего из фотосферы в атмосферу, задана и равна интенсивности непре-

рывного спектра в частоте ν (ее, очевидно, можно считать равной интенсивности излучения, выходящего из атмосферы вблизи линии). Обозначая, как и раньше, эту интенсивность через $I_\nu^0(0, \vartheta)$, имеем

$$I_\nu(t_\nu^0, \vartheta) = I_\nu^0(0, \vartheta) \quad \text{при } \vartheta < \frac{\pi}{2}. \tag{10.7}$$

Таким образом, задача состоит в решении системы уравнений (10.5) при граничных условиях (10.6) и (10.7).

Для решения полученной системы уравнений могут быть использованы методы, изложенные в гл. I. Применим к ней первый приближенный метод (т. е. метод Шварцшильда — Шустера).

Обозначая через I'_ν среднюю интенсивность излучения, идущего снизу вверх, и через I''_ν — среднюю интенсивность излучения, идущего сверху вниз, вместо системы уравнений (10.5) приближенно получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{dI'_\nu}{dt_\nu} = I'_\nu - S_\nu, \quad -\frac{1}{2}\frac{dI''_\nu}{dt_\nu} = I''_\nu - S_\nu, \\ &S'_\nu = \frac{1}{2}(I'_\nu + I''_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Из уравнений (10.8) следует

$$I'_\nu - I''_\nu = F_\nu, \quad I'_\nu + I''_\nu = 2F_\nu t_\nu + C_\nu, \tag{10.9}$$

где F_ν и C_ν — произвольные постоянные.

Граничные условия (10.6) и (10.7) в данном случае принимают вид

$$I''_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t_\nu = 0, \quad I'_\nu = \overline{I}_\nu^0 \quad \text{при} \quad t_\nu = t_\nu^0, \tag{10.10}$$

где $\overline{I}_\nu^0$ — средняя интенсивность излучения, входящего из фотосферы в атмосферу. При помощи (10.10) находим

$$C_\nu = F_\nu, \quad F_\nu = \frac{\overline{I}_\nu^0}{1 + t_\nu^0}. \tag{10.11}$$

Знание произвольных постоянных позволяет получить из уравнений (10.8) и (10.9) следующее выражение для функции S_ν:

$$S_\nu = \frac{\overline{I}_\nu^0}{1 + t_\nu^0}\left(\frac{1}{2} + t_\nu\right). \tag{10.12}$$

Интенсивность излучения, выходящего из атмосферы, в рассматриваемом случае равна

$$I_\nu(0, \vartheta) = \int_0^{t_\nu^0} S_\nu(t_\nu)\, e^{-t_\nu \sec\vartheta} \sec\vartheta\, dt_\nu + I_\nu^0(0, \vartheta)\, e^{-t_\nu^0 \sec\vartheta}. \tag{10.13}$$

Если мы подставим сюда найденное выражение для S_ν и воспользуемся формулой (9.10), то получим искомую величину $r_\nu(\vartheta)$, харак-

теризующую профиль линии поглощения на угловом расстоянии ϑ от центра диска.

Чтобы определить величину r_ν, характеризующую профиль линии в спектре всей звезды, надо найти потоки излучения, выходящего из атмосферы в частоте ν внутри линии и в непрерывном спектре вблизи линии. В принятом приближении эти величины равны

$$H_\nu = \pi F_\nu, \quad H_\nu^0 = \pi \bar{I}_\nu^0. \tag{10.14}$$

Подставляя (10.14) в (9.11) и пользуясь второй из формул (10.11), получаем

$$r_\nu = \frac{1}{1+t_\nu^0}. \tag{10.15}$$

Заметим, что величина $1/(1+t_\nu^0)$ представляет собой долю фотосферного излучения, пропущенного атмосферой в частоте ν (вообще говоря, после многократных рассеяний). Величина же $t_\nu^0/(1+t_\nu^0)$ есть доля этого излучения, отраженного обратно в фотосферу.

Мы можем переписать формулу (10.15) в несколько другом виде. Входящая в нее величина t_ν^0, представляющая собой оптическую толщину атмосферы в частоте ν, равна

$$t_\nu^0 = \int_{r_0}^{\infty} \sigma_\nu \, dr, \tag{10.16}$$

где r_0 — радиус основания атмосферы. Представим объемный коэффициент поглощения в виде $\sigma_\nu = nk_\nu$, где n — число атомов в нижнем состоянии для данной линии (или, как иногда говорят, число поглощающих атомов) в 1 см^3 и k_ν — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом. Тогда, считая, что k_ν не зависит от места в атмосфере, вместо (10.16) получаем

$$t_\nu^0 = k_\nu N, \tag{10.17}$$

где

$$N = \int_{r_0}^{\infty} n(r) \, dr. \tag{10.18}$$

Величина N есть число поглощающих атомов в столбе с сечением 1 см^2 над фотосферой. Подставляя (10.17) в (10.15), находим

$$r_\nu = \frac{1}{1+k_\nu N}. \tag{10.19}$$

Если бы для решения системы уравнений (10.5) мы использовали второй приближенный метод (т. е. метод Эддингтона), то получили

бы следующее выражение для величины r_ν:

$$r_\nu = \frac{1}{1+\frac{3}{4}k_\nu N}. \tag{10.20}$$

Как видим, оно не сильно отличается от выражения (10.19).

2. Модель Эддингтона. Сделанное выше предположение о разделении внешних частей звезды на два слоя, фотосферу и атмосферу, является довольно грубым. Теперь мы откажемся от этого предположения и будем считать, что в каждом элементарном объеме происходит поглощение и излучение энергии как в непрерывном спектре, так и в линиях. Такую модель внешних слоев звезды будем называть моделью Эддингтона.

Строго говоря, при принятии модели Эддингтона задачи об образовании непрерывного и линейчатого спектров звезд следует рассматривать совместно. Однако влияние поглощения и излучения в линиях на возникновение непрерывного спектра невелико и в первом приближении им можно пренебречь (это влияние, как мы знаем из § 8, учитывается во втором приближении в виде так называемого «покровного эффекта»). Следовательно, при решении задачи об образовании линейчатых спектров звезд все величины, относящиеся к непрерывному спектру, можно считать известными.

Уравнения, определяющие интенсивность излучения внутри линии в случае модели Эддингтона, уже были получены ранее. Одним из них является уравнение переноса излучения (9.1), а другим — уравнение лучистого равновесия (10.1). Уравнение (9.1) можно переписать в виде

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{dr} = -(\sigma_\nu+\alpha_\nu)\,I_\nu+\varepsilon_\nu+\alpha_\nu B_\nu(T). \tag{10.21}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (9.2), так как считаем справедливым предположение о локальном термодинамическом равновесии для непрерывного спектра. Подставляя (10.1) в (10.21), получаем одно интегро-дифференциальное уравнение для определения величины I_ν:

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{dr} = -(\sigma_\nu+\alpha_\nu)\,I_\nu+\sigma_\nu\int I_\nu\frac{d\omega}{4\pi}+\alpha_\nu B_\nu(T). \tag{10.22}$$

Вводя оптическую глубину в непрерывном спектре τ_ν посредством соотношения $d\tau_\nu = -\alpha_\nu\,dr$, вместо (10.22) находим

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = (\eta_\nu+1)\,I_\nu-\eta_\nu\int I_\nu\frac{d\omega}{4\pi}-B_\nu(T), \tag{10.23}$$

где обозначено

$$\eta_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\alpha_\nu}. \tag{10.24}$$

Вообще говоря, величина η_ν является очень сложной функцией от глубины, однако в дальнейшем для простоты мы примем, что $\eta_\nu = \text{const}$.

Для получения приближенного решения уравнения (10.23) применим метод Эддингтона (см. § 2). Предварительно введем обозначения:

$$\bar{I}_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}, \quad \bar{H}_\nu = \int I_\nu \cos\vartheta \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{10.25}$$

Величина $\bar{I}_\nu$ представляет собой среднюю интенсивность излучения в данном месте, а $4\pi\bar{H}_\nu$ — поток излучения.

Умножив (10.23) сначала на $d\omega/4\pi$, а затем на $\cos\vartheta\, d\omega/4\pi$ и проинтегрировав по всем телесным углам, находим

$$\frac{d\bar{H}_\nu}{d\tau_\nu} = \bar{I}_\nu - B_\nu, \tag{10.26}$$

$$\frac{1}{3}\frac{d\bar{I}_\nu}{d\tau_\nu} = (1+\eta_\nu)\bar{H}_\nu. \tag{10.27}$$

Здесь мы использовали приближенное соотношение

$$\int I_\nu \cos^2\vartheta \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{3}\bar{I}_\nu. \tag{10.28}$$

Из уравнений (10.26) и (10.27) получаем следующее уравнение для определения $\bar{I}_\nu$:

$$\frac{d^2\bar{I}_\nu}{d\tau_\nu^2} = 3(1+\eta_\nu)(\bar{I}_\nu - B_\nu). \tag{10.29}$$

Для величины $B_\nu(T)$, как и раньше, мы возьмем выражение (9.15), т. е. будем считать ее линейной функцией от τ_ν. В таком случае частное решение уравнения (10.29) будет просто равно $B_\nu(T)$. В качестве общего же решения этого уравнения находим

$$\bar{I}_\nu = C_\nu e^{-\tau_\nu\sqrt{3(1+\eta_\nu)}} + D_\nu e^{\tau_\nu\sqrt{3(1+\eta_\nu)}} + B_\nu, \tag{10.30}$$

где C_ν и D_ν — произвольные постоянные.

Очевидно, что в глубоких слоях атмосферы, где линии в спектре отсутствуют, $\bar{I}_\nu = B_\nu$. Поэтому должно быть $D_\nu = 0$. Следовательно, имеем

$$\bar{I}_\nu = C_\nu e^{-\tau_\nu\sqrt{3(1+\eta_\nu)}} + B_\nu(T_0)(1+\beta_\nu^*\tau_\nu), \tag{10.31}$$

где обозначено $\beta_\nu^* = \beta_\nu\bar{\alpha}/\alpha_\nu$. При помощи (10.27) получаем

$$\bar{H}_\nu = \frac{1}{3(1+\eta_\nu)}\left[-C_\nu e^{-\tau_\nu\sqrt{3(1+\eta_\nu)}}\sqrt{3(1+\eta_\nu)} + B_\nu(T_0)\beta_\nu^*\right]. \tag{10.32}$$

Для определения постоянной C_ν надо использовать граничное условие (10.6). В принятом приближении его можно записать в виде

$$\bar{I}_\nu = 2\bar{H}_\nu \quad (\text{при } \tau_\nu = 0). \tag{10.33}$$

Подставляя (10.31) и (10.32) в (10.33), находим

$$C_\nu \sqrt{3(1+\eta_\nu)} = -\frac{3(1+\eta_\nu)-2\beta_\nu^*}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}+2} B_\nu(T_0). \qquad (10.34)$$

Так как нашей задачей является определение профиля линии поглощения в спектре звезды, то нам надо найти поток выходящего из звезды излучения, т. е. величину $H_\nu(0) = 4\pi\overline{H}_\nu(0)$. Полагая в формуле (10.32) $\tau_\nu = 0$ и принимая во внимание (10.34), получаем

$$H_\nu(0) = 4\pi B_\nu(T_0) \frac{1+\dfrac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}}}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}+2}. \qquad (10.35)$$

Вне спектральной линии $\eta_\nu=0$. Следовательно, поток излучения в непрерывном спектре вблизи линии равен

$$H_\nu^0(0) = 4\pi B_\nu(T_0) \frac{1+\dfrac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+2}. \qquad (10.36)$$

Из (10.35) и (10.36) находим

$$r_\nu = \frac{H_\nu(0)}{H_\nu^0(0)} = \frac{1+\dfrac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}}}{1+\dfrac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3(1+\eta_\nu)}+2}. \qquad (10.37)$$

Этой формулой и определяется искомый профиль линии поглощения в звездном спектре.

Заметим, что в центральных частях сильных линий $\eta_\nu \gg 1$. Поэтому в данном случае имеем

$$r_\nu \simeq \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+\beta_\nu^*} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta_\nu}}. \qquad (10.38)$$

Мы видим, что величина r_ν зависит от β_ν^* только через посредство потока в непрерывном спектре. Поток же в центральных частях линии от β_ν^* практически не зависит. Это объясняется тем, что центральные части сильных линий образуются в самых поверхностных слоях атмосферы [где можно считать, что $B_\nu(T)=B_\nu(T_0)$].

Во внешних частях линии $\eta_\nu \ll 1$. В этом случае формула (10.37) дает

$$r_\nu = 1 - \frac{\eta_\nu}{2}\left(\frac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3}+\beta_\nu^*} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}\right). \qquad (10.39)$$

Таким образом, величина $1 - r_\nu$ пропорциональна коэффициенту поглощения в линии σ_ν [как и согласно формуле (9.20)].

При помощи уравнения (10.21) и полученного выражения для величины $\bar{I}_\nu$ мы можем найти также и величину $r_\nu(\vartheta)$, но на этом не будем останавливаться.

3. Флуоресценция в звездных атмосферах. Полученные выше выражения для r_ν определяют собой теоретические профили линий поглощения. Однако эти профили (как в случае модели Шварцшильда — Шустера, так и в случае модели Эддингтона) не находятся в хорошем согласии с наблюденными профилями. Особенно велико расхождение между ними в отношении центральных интенсивностей линий. При этом для сильных линий теоретические значения r_{ν_0} гораздо меньше наблюденных значений (подробнее см. в § 11).

Указанные расхождения говорят о том, что предположения, сделанные нами при составлении уравнения (10.1), в действительности не осуществляются. Одно из этих предположений заключалось в том, что в каждой линии происходит чистое рассеяние излучения. На самом деле в звездных атмосферах происходят и процессы флуоресценции, т. е. перераспределение излучения между линиями, а также между линиями и непрерывным спектром. Очевидно, что перераспределение излучения между линиями не может привести к увеличению центральных интенсивностей всех линий: если интенсивность одной линии увеличилась, то интенсивности других линий должны уменьшиться.

Иначе обстоит дело в случае перераспределения излучения между линиями и непрерывным спектром. Рассмотрим для простоты атом, обладающий только тремя уровнями энергии (1, 2 и 3), причем первые два дискретные, а третий соответствует ионизованному состоянию. Кроме процесса чистого рассеяния в спектральной линии ($1 \to 2 \to 1$), рассмотренного нами ранее, возможны также два следующих взаимно противоположных циклических процесса: 1) переход $1 \to 3 \to 2 \to 1$, т. е. ионизация атома из первого состояния, захват электрона на второй уровень и излучение кванта в линии; 2) переход $1 \to 2 \to 3 \to 1$, т. е. поглощение кванта в линии, ионизация из второго состояния и захват электрона на первый уровень. Очевидно, что процессы первого рода приводят к появлению квантов в линии, а процессы второго рода — к исчезновению таких квантов. В глубоких слоях атмосферы, где можно предполагать наличие термодинамического равновесия, указанные процессы компенсируют друг друга. Однако во внешних слоях атмосферы процессы первого рода преобладают над процессами второго рода. Объясняется это тем, что вероятность процессов первого рода зависит только от плотности излучения за границей основной серии, а вероятность процессов второго рода — как от плотности излучения за границей второй серии, так и от плотности излучения в спектральной линии. Что касается плотности излучения в непрерывном спектре, то она, очевидно, не меняется в атмосфере. Однако плотность излучения в спектральной линии убывает при переходе от глубоких слоев к внешним.

Таким образом, перераспределение излучения между линиями и непрерывным спектром в звездных атмосферах чаще приводит к появлению квантов в линии, чем к их исчезновению. В частности, благодаря этому процессу должны увеличиваться центральные интенсивности линий поглощения.

Чтобы определить профили линий при учете действия указанного флуоресцентного механизма, мы должны составить и решить соответствующее уравнение переноса излучения. Сделаем это, следуя Стрёмгрену.

Примем эддингтоновскую модель атмосферы и будем исходить из уравнения (10.21). Однако вместо формулы (10.1), определяющей величину ε_ν, мы напишем

$$\varepsilon_\nu = (1-\gamma)\,\sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \varepsilon'_\nu, \tag{10.40}$$

где ε'_ν — объемный коэффициент излучения, обусловленный процессами первого рода, а под γ понимается доля квантов в спектральной линии, испытавших истинное поглощение (т. е. доля атомов, перешедших из второго состояния в ионизованное); введением величины γ учитываются процессы второго рода.

Пользуясь изложенными выше соображениями, легко найти выражение для величины ε'_ν. В глубоких слоях атмосферы, где число процессов первого рода равно числу процессов второго рода,

$$\varepsilon'_\nu = \gamma\sigma_\nu \bar{I}_\nu. \tag{10.41}$$

Вместе с тем в тех же слоях $\bar{I}_\nu = B_\nu(T)$. Поэтому вместо (10.41) имеем

$$\varepsilon'_\nu = \gamma\sigma_\nu B_\nu(T). \tag{10.42}$$

Можно считать, что полученное выражение для ε'_ν сохранится и при переходе от глубоких слоев атмосферы к более внешним, так как плотность излучения, вызывающего ионизацию атомов из основного состояния, в атмосфере не меняется. Однако чтобы учесть возможное отличие плотности этого излучения в атмосфере звезды от плотности при термодинамическом равновесии, мы введем в правую часть соотношения (10.42) некоторый поправочный множитель Q. Тогда получаем

$$\varepsilon_\nu = (1-\gamma)\,\sigma_\nu \bar{I}_\nu + Q\gamma\sigma_\nu B_\nu(T). \tag{10.43}$$

Подставляя (10.43) в (10.21), а также переходя от переменной r к τ_ν, находим

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = (1+\eta_\nu)\,I_\nu - (1-\gamma)\,\eta_\nu \bar{I}_\nu - (1+Q\gamma\eta_\nu)\,B_\nu(T), \tag{10.44}$$

где η_ν определяется формулой (10.24).

Получим приближенное решение уравнения (10.44), считая, что $\eta_\nu = \text{const}$. Из этого уравнения имеем

$$\frac{d\overline{H}_\nu}{d\tau_\nu} = (1+\gamma\eta_\nu)\,\overline{I}_\nu - (1+Q\gamma\eta_\nu)\,B_\nu, \tag{10.45}$$

$$\frac{d\overline{I}_\nu}{d\tau_\nu} = 3\,(1+\eta_\nu)\,\overline{H}_\nu. \tag{10.46}$$

Отсюда получается следующее уравнение для определения $\overline{I}_\nu$:

$$\frac{d^2\overline{I}_\nu}{d\tau_\nu^2} = 3\,(1+\eta_\nu)\,[(1+\gamma\eta_\nu)\,\overline{I}_\nu - (1+Q\gamma\eta_\nu)\,B_\nu]. \tag{10.47}$$

Решение уравнения (10.47) имеет вид

$$\overline{I}_\nu = C_\nu e^{-b_\nu\tau_\nu} + \frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\gamma\eta_\nu}\,B_\nu(T_0)\,(1+\beta_\nu^*\tau_\nu), \tag{10.48}$$

где

$$b_\nu^2 = 3\,(1+\eta_\nu)\,(1+\gamma\eta_\nu), \tag{10.49}$$

а C_ν — произвольная постоянная. Постоянная при $e^{b_\nu\tau_\nu}$ равна нулю, так как $\overline{I}_\nu$ не может с увеличением τ_ν возрастать экспоненциально. Подставляя (10.48) в (10.46), находим

$$\overline{H}_\nu = \frac{1}{3\,(1+\eta_\nu)}\left[-b_\nu C_\nu e^{-b_\nu\tau_\nu} + \frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\gamma\eta_\nu}\,B_\nu(T_0)\,\beta_\nu^*\right] \tag{10.50}$$

Определяя постоянную C_ν из условия (10.33), получаем следующее выражение для интересующего нас потока излучения на границе звезды:

$$H_\nu(0) = 4\pi B_\nu(T_0)\,\frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\gamma\eta_\nu}\,\frac{b_\nu+\beta_\nu^*}{3\,(1+\eta_\nu)+2b_\nu}. \tag{10.51}$$

Отсюда вытекает, что

$$r_\nu = \frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\gamma\eta_\nu}\cdot\frac{b_\nu+\beta_\nu^*}{1+\dfrac{\beta_\nu^*}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{3\,(1+\eta_\nu)+2b_\nu}. \tag{10.52}$$

Полученная формула для r_ν является обобщением формулы (10.37) на случай наличия флуоресценции.

Для того чтобы пользоваться формулой (10.52), надо определить величину γ. Как уже сказано, она равна отношению числа ионизаций из второго состояния к сумме числа ионизаций и числа спонтанных переходов из этого состояния. При помощи эйнштейновских коэффициентов переходов (см. § 8) величина γ представляется в виде

$$\gamma = \frac{B_{23}\rho_{23}}{B_{23}\rho_{23}+A_{21}}. \tag{10.53}$$

В этой формуле

$$B_{23}\rho_{23} = c\int\limits_{\nu_{23}}^{\infty} \rho_\nu k_{2\nu}\frac{d\nu}{h\nu}, \tag{10.54}$$

где ν_{23} — частота ионизации из второго состояния, $k_{2\nu}$ — коэффициент поглощения за границей второй серии.

Для грубой оценки величины γ можно поступить так. Будем считать, что величина $B_{23}\rho_{23}$ действительно является произведением плотности излучения непосредственно за границей второй серии ρ_{23} на эйнштейновский коэффициент перехода [определенный в согласии с формулой (10.54)]. Тогда, представляя ρ_{23} и A_{21} в виде

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{e^{\frac{h\nu_{23}}{kT}}-1}, \tag{10.55}$$

$$A_{21} = \frac{g_1}{g_2}\sigma_{12}B_{12}, \tag{10.56}$$

где

$$\sigma_{ik} = \frac{8\pi h\nu_{ik}^3}{c^3}, \tag{10.57}$$

и принимая приближенно $g_2 \approx g_1$, $\sigma_{12} \approx \sigma_{23}$, $B_{12} \approx B_{23}$, получаем

$$\gamma \approx e^{-\frac{h\nu_{23}}{kT}}. \tag{10.58}$$

Оценка величины γ по формуле (10.58) для атомов с потенциалом ионизации из возбужденного состояния около 3 эВ (например, для Na I и Ca I) при температуре Солнца дает $\gamma \approx 10^{-3}$. Вычисления по формулам (10.53) и (10.54) приводят к значениям такого же порядка (γ=0,0015 для линий D_1 и D_2 натрия и γ = 0,0004 для линии λ 4227 Ca I).

Формулу (10.52) для r_ν и сделанные оценки величины γ мы используем ниже (в § 11) при обсуждении вопроса о центральных интенсивностях линий поглощения.

4. Точное решение задачи. Рассматриваемую нами задачу об определении профилей линий поглощения в звездных спектрах при сделанных выше предположениях можно решить точно. Для получения такого решения мы применим способ, изложенный в § 3.

Уравнение переноса излучения мы возьмем в форме (10.21), а коэффициент излучения ε_ν зададим уравнением (10.43), т. е. примем во внимание флуоресценцию. Указанные уравнения можно переписать в виде

$$\cos\vartheta\frac{dI_\nu}{dt_\nu} = I_\nu - S_\nu, \tag{10.59}$$

где $dt_\nu = -(\sigma_\nu+\alpha_\nu)\,dr$ и

$$S_\nu = (1-\gamma)\frac{\eta_\nu}{1+\eta_\nu}\int I_\nu\frac{d\omega}{4\pi} + \frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\eta_\nu}B_\nu(T). \tag{10.60}$$

Функцию $B_\nu(T)$, как и выше, представим формулой (9.15). Переходя в ней от τ_ν к t_ν, имеем

$$B_\nu(T) = B_\nu(T_0)\left(1 + \frac{\beta_\nu^*}{1+\eta_\nu} t_\nu\right), \tag{10.61}$$

где $\beta_\nu^* = \beta_\nu \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_\nu}$.

Решая уравнение (10.59) относительно I_ν и подставляя найденное выражение I_ν через S_ν в уравнение (10.60) (т. е. поступая так же, как в § 2 при получении уравнения Милна), мы приходим к следующему интегральному уравнению для определения функции $S_\nu(t_\nu)$:

$$S_\nu(t_\nu) = \frac{\lambda_\nu}{2} \int_0^\infty E_1 |t_\nu - t'_\nu| S_\nu(t'_\nu)\, dt'_\nu + \frac{1 + Q\gamma\eta_\nu}{1+\eta_\nu} B_\nu(T), \tag{10.62}$$

где обозначено

$$\lambda_\nu = (1-\gamma)\frac{\eta_\nu}{1+\eta_\nu}. \tag{10.63}$$

Перепишем уравнение (10.62) в виде

$$S(t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty E_1 |t - t'| S(t')\, dt' + g(t), \tag{10.64}$$

опуская для простоты на время индекс ν. Свободный член этого уравнения является линейной функцией от t, т. е.

$$g(t) = c_0 + c_1 t. \tag{10.65}$$

Мы видим, что уравнение (10.64) принадлежит к типу уравнений, подробно рассмотренных в § 3. Если в уравнении (3.1) положить

$$K(t) = \frac{\lambda}{2} E_1 t = \frac{\lambda}{2} \int_1^\infty e^{-tx} \frac{dx}{x}, \tag{10.66}$$

то мы получим уравнение (10.64). При представлении ядра $K(t)$ в форме (3.17) имеем $A(x) = \lambda/2x$.

Согласно способу, изложенному в § 3, решение уравнения (10.64) надо начинать с нахождения функции $S(0, x)$, определенной уравнением (3.20). В данном случае, полагая $x = 1/\mu$ и $S(0, x) = \varphi(\mu)$, вместо (3.20) имеем

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \varphi(\mu)\, \mu \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \tag{10.67}$$

При $\lambda = 1$ из (10.67) получается ранее рассмотренное уравнение (3.53).

Функция $\varphi(\mu)$, впервые введенная В. А. Амбарцумяном, была затем подробно изучена рядом авторов. В табл. 11 приведены значения этой функции, а в табл. 12 — значения ее моментов [т. е. величин, определенных формулой (3.59)].

Таблица 11

Значения функции $\varphi(\mu)$

μ \ λ	0	0,4	0,6	0,8	0,85	0,90	0,925	0,95	0,975	1
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1.00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,06	1,09	1,14	1,15	1,17	1,18	1,20	1,21	1,25
0,2	1,00	1,09	1,15	1,23	1,26	1,29	1,31	1,34	1,37	1,45
0,3	1,00	1,11	1,19	1,30	1,34	1,39	1,42	1,46	1,51	1,64
0,4	1,00	1,13	1,22	1,36	1,41	1,48	1,52	1,57	1,64	1,83
0,5	1,00	1,14	1,25	1,41	1,48	1,56	1,61	1,67	1,76	2,01
0,6	1,00	1,15	1,27	1,46	1,53	1,63	1,69	1,77	1,88	2,19
0,7	1,00	1,16	1,29	1,50	1.58	1,69	1,76	1,85	1,98	2,37
0,8	1,00	1,17	1,31	1,54	1,63	1,75	1,83	1,93	2,08	2,55
0,9	1,00	1,18	1,32	1,57	1,67	1,81	1,89	2,01	2,18	2,73
1,0	1,00	1,18	1,34	1,60	1,71	1,85	1,95	2,08	2,27	2,91

Функция $S(t)$, являющаяся решением уравнения (10.64), может быть выражена через функцию $\varphi(\mu)$. Однако нас сейчас интересуют лишь профили линий поглощения. Поэтому мы должны найти только интенсивность излучения, выходящего из атмосферы, т. е. величину $I(0, \mu)$. Как мы знаем, величина $I(0, \mu)$ также выражается непосредственно через функцию $\varphi(\mu)$.

Таблица 12

Значения моментов функции $\varphi(\mu)$

λ	0	0,4	0,6	0,8	0,85	0,90	0,925	0,95	0,975	1
α_0	1,00	1,13	1,23	1,38	1,44	1,52	1,57	1,63	1,73	2,00
α_1	0,50	0,58	0,64	0,74	0,77	0,83	0,86	0,90	0,96	1,15
α_2	0,33	0,39	0,43	0,50	0,53	0,57	0,59	0,63	0,67	0,82

В данном случае, т. е. когда $g(t)$ является линейной функцией от t, для определения интенсивности излучения $I(0, \mu)$ мы должны использовать формулы (3.41) и (3.48). Первая из них получена при $g(t)=1$, вторая — при $g(t)=t$. Как следует из формулы (3.27), при ядре вида (10.66)

$$S(0, 0)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{10.68}$$

Поэтому находим

$$I(0,\ \mu)=\frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{1-\lambda}}\left[c_0+c_1\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\lambda}}\right)\right], \qquad (10.69)$$

где α_1 — первый момент функции $\varphi(\mu)$.

Сопоставляя между собой свободный член уравнения (10.60) и выражение (10.65) для функции $g(t)$, получаем следующее выражение для интенсивности излучения, выходящего из атмосферы в частоте ν:

$$I_\nu(0,\ \mu)=$$
$$=\frac{\varphi_\nu(\mu)}{\sqrt{1-\lambda_\nu}}\frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\eta_\nu}B_\nu(T_0)\left[1+\frac{\beta_\nu^*}{1+\eta_\nu}\left(\mu+\frac{\lambda_\nu}{2}\frac{\alpha_{\nu 1}}{\sqrt{1-\lambda_\nu}}\right)\right]. \qquad (10.70)$$

Здесь под $\varphi_\nu(\mu)$ понимается функция $\varphi(\mu)$, определенная уравнением (10.67) при значении λ, даваемом формулой (10.63).

Интенсивность излучения, выходящего из атмосферы в непрерывном спектре вблизи линии, получается из (10.70) при $\eta_\nu=0$. Она равна

$$I_\nu^0(0,\ \mu)=B_\nu(T_0)(1+\beta_\nu^*\mu). \qquad (10.71)$$

Из (10.70) и (10.71) следует, что величина $r_\nu(\mu)$, определяющая профиль линии поглощения на угловом расстоянии $\arccos\mu$ от центра диска, дается формулой

$$r_\nu(\mu)=\frac{I_\nu(0,\ \mu)}{I_\nu^0(0,\ \mu)}=$$
$$=\frac{\varphi_\nu(\mu)}{(1+\beta_\nu^*\mu)\sqrt{1-\lambda_\nu}}\frac{1+Q\gamma\eta_\nu}{1+\eta_\nu}\left[1+\frac{\beta_\nu^*}{1+\eta_\nu}\left(\mu+\frac{\lambda_\nu}{2}\frac{\alpha_{\nu 1}}{\sqrt{1-\lambda_\nu}}\right)\right]. \qquad (10.72)$$

Для однородной атмосферы (т. е. в случае $\beta_\nu^*=0$) и при отсутствии флуоресценции (т. е. при $\gamma=0$) из формулы (10.72) находим

$$r_\nu(\mu)=\frac{\varphi_\nu(\mu)}{\sqrt{1+\eta_\nu}}. \qquad (10.73)$$

Формула (10.72) (при $Q=1$) была впервые получена Чандрасекаром.

§ 11. Линии поглощения при некогерентном рассеянии

1. Перераспределение излучения по частотам внутри линии. В предыдущем параграфе при рассмотрении вопроса об образовании линий поглощения в звездных спектрах были сделаны два предположения: 1) о чистом рассеянии в спектральной линии (т. е. об отсутствии перераспределения излучения между линиями, а также между линиями и непрерывным спектром), 2) о когерентном рассеянии (т. е. об отсутствии перераспределения излучения по частотам внутри линии). Однако профили линий, вычисленные при