При наблюдениях планетарных туманностей в инфракрасном участке спектра было обнаружено, что от некоторых из них идет весьма интенсивное излучение в области длин волн 5—20 мкм. Поток этого излучения по порядку величины сравним с потоком излучения туманности в видимой области спектра. Инфракрасное излучение таких туманностей складывается из двух частей: теплового излучения газа (обусловленного в основном рекомбинациями и свободно-свободными переходами атома водорода) и значительного избыточного излучения.

Для объяснения избыточного излучения предполагается, что оно идет от находящихся в туманности пылевых частиц, которые нагреваются L_α-квантами. Как мы знаем, из каждого L_c-кванта звезды, поглощенного туманностью, обязательно образуется один L_α-квант, который весьма долго диффундирует в туманности. Если в ходе диффузии L_α-квантов вся их энергия тратится на нагревание пылевых частиц, то этой энергии вполне достаточно, чтобы вызвать наблюдаемое инфракрасное излучение туманностей. Вместе с тем подсчеты показывают, что максимум этого излучения должен быть при длине волны около 10 мкм, т. е. положение его также соответствует наблюдениям.

В действительности некоторая часть L_α-квантов выходит из туманности наружу. Как увидим далее, это происходит в основном вследствие перехода квантов в крылья линии, вызванного перераспределением по частоте при элементарном акте рассеяния, а также благодаря наличию градиента скорости. Однако учет этих эффектов не сильно влияет на упомянутые выше оценки, если количество пыли в туманности не слишком мало. Чтобы объяснить наблюдаемое инфракрасное излучение туманностей действием указанного механизма надо считать, что оптическая толщина пылевой компоненты туманности в видимой части спектра порядка одной десятой.

В пользу предположения о наличии пыли в планетарных туманностях говорит также и тот факт, что в спектрах одних туманностей избыточное инфракрасное излучение очень сильное, а в спектрах других — слабое. Это можно объяснить тем, что в одних туманностях пыли много, а в других мало.

§ 27. Диффузия излучения в туманностях

1. Поле L_c-излучения. При определении интенсивностей эмиссионных линий мы предполагали, что туманности прозрачны для излучения в этих линиях. Такое предположение не вызывает сомнения по отношению к линиям субординатных серий, так как в возбужденных состояниях находится очень мало атомов. Оно справедливо также и по отношению к запрещенным линиям (даже если нижнее состояние — основное) вследствие чрезвычайной ма-

лости для них коэффициента поглощения, рассчитанного на один атом.

Однако, вообще говоря, туманности не прозрачны для излучения в частотах основной серии. Это сильно усложняет расчет поля излучения в указанных частотах, так как при этом приходится применять уравнение переноса излучения. Мы сейчас сделаем расчет поля излучения в частотах лаймановской серии водорода. При этом для простоты примем, что туманность ограничена двумя концентрическими сферами с радиусами r_1 и r_2, а в центре этих сфер находится ядро туманности. Толщину туманности будем считать малой по сравнению с ее расстоянием от ядра (т. е. $r_2 - r_1 \ll r_1$). В таком случае туманность может считаться состоящей из плоскопараллельных слоев, а коэффициент дилюции излучения — постоянным.

Рассмотрим сначала поле излучения в лаймановском континууме. При поглощении L_c-квантов, приходящих от звезды в туманность, происходит ионизация водородных атомов, а при последующих рекомбинациях на первый уровень L_c-кванты излучаются. Такие процессы поглощения и излучения L_c-квантов могут продолжаться и дальше. Следовательно, в туманности происходит диффузия L_c-излучения. При этом вероятность «выживания» кванта при элементарном акте рассеяния равна отношению числа рекомбинаций на первый уровень к числу рекомбинаций на все уровни.

Чтобы определить плотность диффузного L_c-излучения, мы должны написать уравнение переноса излучения и уравнение лучистого равновесия. В данном случае уравнение лучистого равновесия должно выражать собой тот факт, что в каждом элементарном объеме туманности число ионизаций равно числу рекомбинаций. Следовательно, мы имеем

$$n_e n^+ \sum_1^\infty C_i = n_1 \int_{\nu_1}^\infty k_{1\nu} \frac{d\nu}{h\nu} \int (I_\nu + I_\nu^0)\, d\omega, \tag{27.1}$$

где I_ν — интенсивность диффузного излучения и I_ν^0 — интенсивность излучения, приходящего в данное место туманности непосредственно от звезды. Ранее (в § 23) мы писали подобное уравнение без учета диффузного излучения.

Обозначим через p долю рекомбинаций на первый уровень. Кроме того, примем во внимание, что для водорода коэффициент поглощения на основании формулы (5.6) меняется с частотой по закону

$$k_{1\nu} = k_{1\nu_1} \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3. \tag{27.2}$$

Тогда вместо уравнения (27.1) получаем

$$\frac{n_e n^+ C_1}{n_1 k_{1\nu_1}} = p \int_{\nu_1}^\infty \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 \frac{d\nu}{h\nu} \int (I_\nu + I_\nu^0)\, d\omega. \tag{27.3}$$

В случае туманности, состоящей из плоскопараллельных слоев, уравнение переноса излучения имеет вид

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{dr} = -n_1 k_{1\nu} I_\nu + \varepsilon_{1\nu}, \tag{27.4}$$

где $\varepsilon_{1\nu}$ — объемный коэффициент излучения при рекомбинациях на первый уровень. Как следует из формулы (26.2), величина $\varepsilon_{1\nu}$ может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{1\nu} = \varepsilon_{1\nu_1} e^{-\frac{h(\nu-\nu_1)}{kT_e}}. \tag{27.5}$$

Пусть τ — оптическое расстояние какого-либо места в туманности от ее внутренней границы в частоте ν_1, т. е.

$$\tau = \int_{r_1}^{r} n_1 k_{1\nu_1}\, dr. \tag{27.6}$$

При помощи формул (27.2), (27.5) и (27.6) вместо уравнения (27.4) находим

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{d\tau} = -\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 I_\nu + \frac{\varepsilon_{1\nu_1}}{n_1 k_{1\nu_1}} e^{-\frac{h(\nu-\nu_1)}{kT_e}}. \tag{27.7}$$

Очевидно, что величины C_1 и $\varepsilon_{1\nu_1}$ должны быть связаны между собой. Подстановка (27.5) в (26.3) дает

$$n_e n^+ C_1 = 4\pi \frac{\varepsilon_{1\nu_1}}{h} E_1\left(\frac{\chi_1}{kT_e}\right) e^{\frac{\chi_1}{kT_e}}. \tag{27.8}$$

Введем обозначение

$$S_c(\tau) = \frac{n_e n^+ C_1}{4\pi n_1 k_{1\nu_1}}. \tag{27.9}$$

Тогда уравнения (27.7) и (27.3) принимают вид

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{d\tau} = -\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 I_\nu + \frac{h}{E_1\left(\frac{\chi_1}{kT_e}\right)} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} S_c(\tau) \tag{27.10}$$

и

$$S_c(\tau) = p\int_{\nu_1}^{\infty}\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 \frac{d\nu}{h\nu}\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + S_c^0(\tau), \tag{27.11}$$

где

$$S_c^0(\tau) = p\int_{\nu_1}^{\infty}\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 \frac{d\nu}{h\nu}\int I_\nu^0 \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{27.12}$$

Интенсивность излучения, приходящего от звезды в данное место туманности, очевидно, равна

$$I_\nu^0 = I_\nu^* e^{-\tau\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3}, \tag{27.13}$$

где I_ν^* — интенсивность излучения, выходящего из атмосферы звезды. Поэтому находим

$$S_c^0(\tau) = pW \int\limits_{\nu_1}^{\infty} \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 I_\nu^* e^{-\tau\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3} \frac{d\nu}{h\nu}, \tag{27.14}$$

где W — коэффициент дилюции излучения.

Таким образом, для определения двух искомых величин $I_\nu(\tau, \vartheta)$ и $S_c(\tau)$ мы получили два уравнения, (27.10) и (27.11). К этим уравнениям надо добавить еще граничные условия, которые в данном случае имеют вид

$$I_\nu(0, \vartheta) = I_\nu(0, \pi - \vartheta), \quad I_\nu(\tau_0, \vartheta) = 0 \text{ при } \vartheta > \frac{\pi}{2}. \tag{27.15}$$

Первое из этих условий, имеющее место на внутренней границе туманности (при $\tau=0$), означает, что интенсивность излучения, выходящего из туманности, равна интенсивности излучения, входящего в туманность. Это происходит потому, что излучение, входящее в туманность в каком-либо месте на внутренней границе под углом ϑ к нормали, есть не что иное, как излучение, выходящее из туманности под углом $\pi - \vartheta$ на противоположной стороне (рис. 34). Второе же условие показывает, что на внешней границе туманности (при $\tau=\tau_0$) нет излучения, идущего внутрь. Из уравнения (27.10) при граничных условиях (27.15) можно найти выражение для интенсивности излучения $I_\nu(\tau, \vartheta)$ через функцию $S_c(\tau)$. Подставляя это выражение в уравнение (27.11), получаем следующее интегральное уравнение для определения функции $S_c(\tau)$:

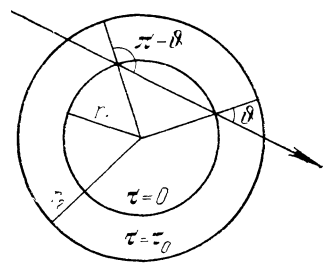

Рис. 34

$$S_c(\tau) = \frac{p}{2} \int\limits_0^{\tau_0} [K(|\tau - \tau'|) + K(\tau + \tau')] S_c(\tau') d\tau' + S_c^0(\tau), \tag{27.16}$$

где

$$K(\tau) = \frac{\int\limits_{\nu_1}^{\infty} \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3 E_1\left[\tau\left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3\right] e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \frac{d\nu}{\nu}}{E_1\left(\frac{\chi_1}{kT_e}\right)}. \tag{27.17}$$

Уравнение (27.16) может быть изучено методами, изложенными в § 3. В частности, при $\tau_0=\infty$ можно получить точное решение этого уравнения в явном виде.

Для упрощения рассматриваемой задачи иногда вводят средний коэффициент поглощения для всего лаймановского континуума и под τ понимают соответствующее ему оптическое расстояние. Как легко видеть, тогда вместо уравнения (27.16) имеем

$$S_c(\tau)=\frac{p}{2}\int_0^{\tau_0}[E_1|\tau-\tau'|+E_1(\tau+\tau')]S_c(\tau')\,d\tau'+S_c^0(\tau). \quad (27.18)$$

Что же касается величины $S_c^0(\tau)$, то ее можно представить в виде

$$S_c^0(\tau)=p\frac{N_c}{4\pi}e^{-\tau}, \quad (27.19)$$

где N_c — число квантов лаймановского континуума, падающих от звезды на 1 см² внутренней границы туманности за 1 с.

При $\tau_0=\infty$ точное решение уравнения (27.18), полученное указанным выше методом, имеет вид

$$S_c(\tau)=p\frac{N_c}{4\pi}\left\{e^{-\tau}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\Phi(\tau')\left[e^{-|\tau-\tau'|}+e^{-(\tau+\tau')}\right]d\tau'\right\}, \quad (27.20)$$

где

$$\Phi(\tau)=4p\int_1^{\infty}\frac{xe^{-x\tau}\,dx}{(p\pi)^2+\left(2x+p\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}+\frac{2k(1-k^2)}{p+k^2-1}e^{-k\tau}, \quad (27.21)$$

Таблица 42

Значения величины $\frac{4\pi S_c(\tau)}{p}$

τ \ p	0,0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,0	1,00	1,13	1,20	1,30	1,42	1,61	1,93	2,68
0,2	0,82	0,97	1,04	1,14	1,27	1,46	1,79	2,54
0,4	0,67	0,81	0,87	0,96	1,09	1,27	1,59	2,32
0,6	0,55	0,67	0,71	0,81	0,92	1,10	1,40	2,11
0,8	0,45	0,55	0,60	0,68	0,78	0,94	1,23	1,91
1,0	0,37	0,46	0,50	0,57	0,66	0,81	1,08	1,73
1,5	0,22	0,28	0,32	0,36	0,43	0,55	0,76	1,34
2,0	0,14	0,17	0,20	0,23	0,28	0,37	0,54	1,03
2,5	0,08	0,11	0,12	0,15	0,18	0,25	0,38	0,80
3,0	0,05	0,06	0,08	0,09	0,12	0,16	0,27	0,62

и k определяется из уравнения

$$\frac{p}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}=1. \tag{27.22}$$

В таблице 42 приведены значения величины $4\pi S_c(\tau)/p$, вычисленные при помощи формулы (27.20).

При $\tau \gg 1$ из формулы (27.20) можно получить следующее асимптотическое выражение для функции $S_c(\tau)$:

$$S_c(\tau)=\frac{N_c}{2\pi}\frac{kp}{p+k^2-1}e^{-k\tau}. \tag{27.23}$$

Значения величины k, найденные из уравнения (27.22), приведены в таблице:

p	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
k	1,00	0,96	0,91	0,82	0,70	0,52	0

Из таблицы 42 видно, что роль диффузного излучения существенно зависит от величины параметра p. В случае диффузии L_c-излучения этот параметр равен

$$p=\frac{C_1(T_e)}{\sum\limits_1^\infty C_i(T_e)}. \tag{27.24}$$

Вычисления по формуле (27.24) дают:

T_e, К	5000	10 000	20 000	50 000
p	0,39	0,44	0,49	0,57

Как мы знаем, электронные температуры туманностей порядка 10 000 К. Поэтому из табл. 42 следует, что в туманностях содержится примерно такое же число квантов диффузного L_c-излучения, как и число L_c-квантов, приходящих непосредственно от звезды. Таким образом, надо признать, что роль диффузного L_c-излучения в туманностях не очень велика (даже в рассмотренном нами случае $\tau_0=\infty$, когда она максимальна).

Такой результат объясняется тем, что доля захватов на первый уровень, т. е. величина p, сравнительно мала. Если бы p было

близко к единице, то диффузное излучение преобладало бы над прямым. Особенно это было бы заметным при $\tau \gg 1$ вследствие малости величины k.

После определения функции $S_c(\tau)$ мы можем, пользуясь уравнением (27.10), найти и величину $I_\nu(\tau, \vartheta)$, т. е. интенсивность диффузного L_c-излучения в любом месте туманности. Как видно из уравнения (27.10), распределение диффузного L_c-излучения по частотам сильно зависит от электронной температуры T_e.

В каждом месте туманности диффузное L_c-излучение добавляется к L_c-излучению, приходящему непосредственно от звезды. Интенсивность приходящего от звезды излучения дается формулой (27.13). Очевидно, что спектральный состав суммарного L_c-излучения (т. е. диффузного и приходящего от звезды) должен существенно меняться при переходе от одного места туманности к другому.

2. Поле L_α-излучения в неподвижной туманности. Оптические толщины туманностей в линиях серии Лаймана гораздо больше, чем в лаймановском континууме. Даже в тех случаях, когда туманность прозрачна для L_c-излучения, она может быть в высокой степени непрозрачной для излучения в лаймановских линиях. Поэтому для определения плотности излучения в лаймановских линиях необходимо рассматривать диффузию излучения в этих линиях (см. [8] и [9]).

Очевидно, что плотность излучения в высоких членах серии Лаймана (начиная с L_β) не может быть большой. Объясняется это тем, что из высоких состояний (начиная с третьего) атом может совершить спонтанный переход не только в первое состояние, но и в другие. Поэтому кванты в рассматриваемых линиях после небольшого числа рассеяний превращаются в другие кванты (в частности, в кванты L_α). Иначе обстоит дело с излучением в линии L_α. Из второго состояния атом совершает спонтанный переход только в первое состояние с излучением L_α-кванта, а переходы из него под действием излучения и столкновений происходят крайне редко (в условиях туманностей они редки даже из метастабильных состояний). Поэтому возникший L_α-квант не может исчезнуть в туманности. Вследствие же огромной оптической толщины туманности в линии L_α этот квант выходит из туманности наружу лишь после большого числа рассеяний. Это приводит к весьма большой плотности L_α-излучения в туманностях.

При рассмотрении диффузии L_α-излучения в туманностях мы примем такую же геометрическую модель туманности, как и выше (см. рис. 34). Уравнение переноса излучения в любой частоте ν внутри линии может быть записано в виде

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = -n_1 k_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu. \qquad (27.25)$$

где k_ν — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом, и ε_ν — объемный коэффициент излучения.

Уравнение лучистого равновесия для L_α-излучения может быть получено из уравнения стационарности для второго уровня атома водорода. Как мы знаем, атомы водорода попадают во второе состояние в результате поглощения L_c-квантов и последующих рекомбинаций. При этом каждая рекомбинация на высокий уровень (начиная со второго) приводит к попаданию атома во второе состояние. Поэтому в качестве уравнения стационарности для этого состояния мы имеем

$$n_2 A_{21} = n_1 B_{12} \rho_{12} + n_e n^+ \sum_2^\infty C_i. \tag{27.26}$$

Очевидно, что

$$n_2 A_{21} = \frac{4\pi}{h\nu_{12}} \int \varepsilon_\nu \, d\nu \tag{27.27}$$

и

$$B_{12}\rho_{12} = \frac{1}{h\nu_{12}} \int k_\nu \, d\nu \int I_\nu \, d\omega, \tag{27.28}$$

где $h\nu_{12}$ — энергия L_α-кванта. Кроме того, используя формулу (27.9), получаем

$$n_e n^+ \sum_2^\infty C_i = \frac{1-p}{p} n_e n^+ C_1 = 4\pi \frac{1-p}{p} n_1 k_{1\nu_1} S_c(\tau), \tag{27.29}$$

где функция $S_c(\tau)$ определяется уравнением (27.16). Подстановка трех последних соотношений в уравнение (27.26) дает

$$\int \varepsilon_\nu \, d\nu = n_1 \int k_\nu \, d\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \frac{1-p}{p} n_1 k_{1\nu_1} S_c(\tau) \, h\nu_{12}. \tag{27.30}$$

Как было выяснено в теории образования линий поглощения (в § 11), диффузия излучения в спектральной линии сопровождается перераспределением излучения по частотам при элементарном акте рассеяния. При этом в качестве хорошего приближения к действительности можно принять предположение о полном перераспределении излучения по частотам (или о полностью некогерентном рассеянии), при котором коэффициент излучения ε_ν пропорционален коэффициенту поглощения k_ν. Сделав такое предположение, мы можем представить величину ε_ν в виде

$$\varepsilon_\nu = n_1 k_\nu S, \tag{27.31}$$

где S не зависит от частоты.

При выполнении соотношения (27.31) уравнение переноса излучения (27.25) и уравнение лучистого равновесия (27.30) могут быть переписаны так:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = n_1 k_\nu (S - I_\nu) \tag{27.32}$$

и

$$S\int k_\nu\,d\nu=\int k_\nu\,d\nu\int I_\nu\frac{d\omega}{4\pi}+\frac{1-p}{p}k_{1\nu_1}S_c h\nu_{12}. \qquad (27.33)$$

Обозначим через k_0 коэффициент поглощения в центре линии L_α и введем оптические расстояния в туманности:

$$t=\int_{r_1}^{r} n_1 k_0\,dr, \qquad t_0=\int_{r_1}^{r_2} n_1 k_0\,dr. \qquad (27.34)$$

Кроме того, представим коэффициент поглощения в виде

$$k_\nu=k_0\alpha(x), \qquad (27.35)$$

где x — безразмерная частота, представляющая собой отношение расстояния от центра линии к доплеровской полуширине линии, т. е.

$$x=\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}. \qquad (27.36)$$

При принятых обозначениях вместо уравнений (27.32) и (27.33) имеем

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{dt}=\alpha(x)(S-I_\nu) \qquad (27.37)$$

и

$$S=A\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x)\,dx\int I_\nu\frac{d\omega}{4\pi}+\frac{1-p}{p}\frac{Aqh\nu_{12}}{\Delta\nu_D}S_c(\tau), \qquad (27.38)$$

где

$$q=\frac{k_{1\nu_1}}{k_0} \quad \text{и} \quad A\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x)\,dx=1. \qquad (27.39)$$

Уравнения (27.37) и (27.38) должны быть решены при граничных условиях, аналогичных (27.15). Пользуясь этими условиями, из указанных уравнений получаем следующее интегральное уравнение для определения функции $S(t)$:

$$S(t)=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}[K(|t-t'|)+K(t+t')]S(t')\,dt'+S_0(t), \qquad (27.40)$$

где

$$K(t)=A\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha^2(x)\,E_1[t\alpha(x)]\,dx \qquad (27.41)$$

и

$$S_0(t)=\frac{1-p}{p}\frac{Aqh\nu_{12}}{\Delta\nu_D}S_c(\tau). \qquad (27.42)$$

Заметим, что между оптическими расстояниями t и τ существует очевидная связь:

$$\tau = qt, \qquad \tau_0 = qt_0. \tag{27.43}$$

Как показывают вычисления, $q \approx 10^{-4}$. Поэтому мы видим, что при оптической толщине туманности сразу за пределом серии Лаймана порядка единицы (такие значения τ_0 следует принять для зоны H II) оптическая толщина туманности в центре линии L_α будет порядка десятка тысяч.

Нахождение функции $S(t)$ из уравнения (27.40) полностью определяет поле L_α-излучения в туманности, так как после этого из уравнения (27.37) может быть найдена и интенсивность излучения $I_\nu(t, \vartheta)$. Через функцию $S(t)$ можно выразить и другие физические величины, связанные с L_α-излучением. Например, из формул (27.27) и (27.31) мы получаем следующее выражение для степени возбуждения второго уровня атома водорода:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} S(t). \tag{27.44}$$

Здесь мы воспользовались также формулами (8.12) и (8.5).

Ядро интегрального уравнения (27.40) выражается через функцию $K(t)$, которая в свою очередь зависит от величины $\alpha(x)$. Поэтому и искомая функция $S(t)$ будет существенно зависеть от величины $\alpha(x)$, характеризующей контур коэффициента поглощения.

Первоначально в теории диффузии L_α-излучения в туманностях принимался прямоугольный контур коэффициента поглощения, т. е. считалось, что $\alpha(x)=1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\alpha(x)=0$ при $|x|>1$. В таком случае уравнение (27.40) имеет вид

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} [E_1 |t-t'| + E_1(t+t')] S(t')\, dt' + S_0(t). \tag{27.45}$$

Здесь мы не будем заниматься решением этого уравнения, а только укажем, что в результате получаются очень большие значения для плотности L_α-излучения в туманности. Это значит, что L_α-квант испытывает в туманности очень большое число рассеяний. Именно, среднее число рассеяний оказывается порядка квадрата оптической толщины туманности в центре линии L_α, т. е.

$$N \approx t_0^2. \tag{27.46}$$

Следовательно, при $t_0 \approx 10^4$ будет $N \approx 10^8$.

Однако предположение о прямоугольном контуре коэффициента поглощения является весьма грубым. В действительности коэффициент поглощения максимален в центре линии и постепенно убывает с удалением от него. Вследствие этого диффузия излучения в спектральной линии обладает следующей особенностью. Каждый

квант, поглощенный в каком-либо месте туманности, может быть затем излучен на любом расстоянии от центра линии (так как $\varepsilon_\nu \sim k_\nu$). В частности, он может быть излучен с такой частотой, что оптическая толщина туманности в этой частоте будет по порядку меньше единицы (т. е. $t_\nu^0 = t_0 \alpha(x) \ll 1$). Такой квант беспрепятственно выйдет из туманности. Следовательно, для каждого кванта, поглощенного в любом месте туманности, имеется определенная вероятность выйти из туманности наружу сразу после переизлучения. Очевидно, что такой процесс не может происходить в случае прямоугольного контура коэффициента поглощения. В этом случае квант выходит из туманности наружу только после длительной диффузии, подойдя близко к границе туманности.

Указанная особенность диффузии излучения в спектральной линии позволяет легко получить приближенное решение уравнения (27.40). Из сказанного выше следует, что L_α-квант, возникший в каком-либо месте туманности, выходит из нее наружу после диффузии в сравнительно небольшой области. Следовательно, плотность L_α-излучения в данном месте мало зависит от плотности излучения в далеких от него частях туманности. Поэтому в уравнении (27.40) мы можем приближенно вынести за знак интеграла значение функции $S(t')$ при $t'=t$. Сделав это, получаем

$$S(t)\left[1-\int_0^\infty K(u)\,du+\frac{1}{2}\int_{t_0-t}^\infty K(u)\,du+\frac{1}{2}\int_{t_0+t}^\infty K(u)\,du\right]=S_0(t). \tag{27.47}$$

Но из (27.41) следует

$$\int_0^\infty K(u)\,du=1. \tag{27.48}$$

Поэтому из (27.47) находим

$$S(t)=\frac{2S_0(t)}{L(t_0-t)+L(t_0+t)}, \tag{27.49}$$

где

$$L(t)=\int_t^\infty K(u)\,du=A\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x)\,E_2[\alpha(x)\,t]\,dx, \tag{27.50}$$

а $E_2 t$ — вторая интегрально-показательная функция.

Легко видеть, что величина $\frac{1}{2}[L(t_0-t)+L(t_0+t)]$ представляет собой долю L_α-квантов, выходящих из туманности, из общего числа L_α-квантов, излучаемых на оптическом расстоянии t от внутренней границы туманности. Следовательно, соотношение (27.49) выражает равенство между собой числа L_α-квантов, возникающих в данном объеме из L_c-излучения, и числа L_α-квантов, излучаемых этим объемом и покидающих туманность.

Мы можем считать, что отношение $S(t)/S_0(t)$ приближенно определяет собой среднее число рассеяний, испытываемых L_α-квантом, возникшим на оптическом расстоянии t. Из формулы (27.49) следует, что это число приближенно равно

$$N(t)=\frac{2}{L(t_0-t)+L(t_0+t)}. \tag{27.51}$$

Формулу (27.51) легко понять и на основании физического смысла величины $L(t)$.

Рассмотрим в виде примера случай, когда коэффициент поглощения имеет доплеровский профиль, т. е. $\alpha(x)=e^{-x^2}$. В этом случае

$$K(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-2x^2}E_1(te^{-x^2})\,dx \tag{27.52}$$

и

$$L(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}E_2(te^{-x^2})\,dx. \tag{27.53}$$

При $t\gg1$ из (27.52) и (27.53) вытекают следующие асимптотические формулы:

$$K(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^2\sqrt{\ln t}} \tag{27.54}$$

и

$$L(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t\sqrt{\ln t}}. \tag{27.55}$$

Подставляя выражение (27.55) в формулы (27.49) и (27.51), мы получаем приближенные формулы для величин $S(t)$ и $N(t)$ соответственно. В частности, среднее число рассеяний L_α-кванта, возникшего на внутренней границе туманности, приближенно равно

$$N(0)=2\sqrt{\pi}\,t_0\sqrt{\ln t_0}. \tag{27.56}$$

Мы видим, что формула (27.56) дает для величины N гораздо меньшие значения, чем формула (27.46). Например, при $t_0=10^4$ по формуле (27.56) получается значение $N\approx10^5$ вместо значения $N\approx10^8$, даваемого формулой (27.46). Такой результат вполне понятен: при доплеровском профиле коэффициента поглощения квант может выходить наружу во внешних частях линии при излучении в любом месте туманности, в то время как при прямоугольном контуре коэффициента поглощения он лишен этой возможности. Вместе с тем следует заметить, что среднее число рассеяний L_α-кванта в туманности, даваемое формулой (27.56), остается все же очень большим. Объясняется это малостью доли квантов, которые могут

выйти из туманности во внешних частях линии [т. е. там, где $t_0\alpha(x) \ll 1$] при большой оптической толщине туманности в центре линии.

Если функция $S(t)$ известна, то с помощью уравнения (27.37) можно найти интенсивность выходящего из туманности излучения в линии L_α, т. е. величину $I_\nu(t_0, \vartheta)$, а также поток выходящего излучения $H_\nu(t_0)$. Тем самым определяется профиль линии L_α в спектре туманности. Как было выяснено, L_α-кванты выходят из туманности главным образом во внешних частях линии. Поэтому линия L_α может иметь двухвершинный профиль. Очевидно, что расстояние между вершинами будет тем больше, чем больше оптическая толщина туманности t_0.

3. Поле L_α-излучения в расширяющейся туманности. До сих пор мы считали, что туманность неподвижна. На самом деле разные части туманностей могут двигаться друг относительно друга. В частности, как уже говорилось, планетарные туманности расширяются со скоростями порядка нескольких десятков километров в секунду.

Относительное движение вещества в туманностях должно быть принято во внимание при рассмотрении диффузии излучения в них. Движение вещества влияет на поле излучения благодаря эффекту Доплера. Очевидно, что это влияние очень мало в случае непрерывного спектра, но очень велико в случае спектральных линий.

Сейчас мы рассмотрим процесс диффузии L_α-излучения в расширяющейся туманности. При этом, как и выше, будем представлять себе туманность в виде тонкого сферического слоя.

Допустим сначала, что скорость расширения v не зависит от расстояния r от центра звезды. В этом случае расширение туманности будет сказываться на постановке граничного условия при $r=r_1$. Когда мы рассматривали неподвижную туманность, то считали, что интенсивность излучения, выходящего из туманности через внутреннюю границу, точно равна интенсивности излучения, вступающего в туманность в обратном направлении. Однако в случае расширяющейся туманности оба эти излучения смещены друг относительно друга по частоте, вследствие чего указанное равенство не будет иметь места. Если мы предположим, что скорость расширения гораздо больше средней тепловой скорости атома (т. е. $v \gg u$), то излучение, приходящее в туманность с ее противоположной стороны, уже не будет поглощаться в туманности. Поэтому интенсивность этого излучения можно считать равной нулю. Таким образом, вместо граничных условий (27.15), имеющих место для неподвижной туманности, мы должны написать следующие граничные условия для туманности, расширяющейся с большой скоростью:

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(0, \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ I_\nu(t_0, \vartheta) &= 0 \quad \text{при} \quad \vartheta > \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{27.57}$$

Разумеется, если скорость расширения туманности сравнима со средней тепловой скоростью атома, то первое из этих условий надо соответствующим образом изменить.

Из уравнений (27.37) и (27.38) при граничных условиях (27.57) получаем следующее интегральное уравнение для определения функции $S(t)$:

$$S(t)=\frac{1}{2}\int_0^{t_0} K(|t-t'|)\,S(t')\,dt+S_0(t), \tag{27.58}$$

где функция $K(t)$ определяется формулой (27.41). Приближенное решение этого уравнения имеет вид

$$S(t)=\frac{2S_0(t)}{L(t)+L(t_0-t)}, \tag{27.59}$$

где $L(t)$ дается формулой (27.50). Очевидно, что плотность L_α-излучения в расширяющейся туманности будет меньше, чем в неподвижной.

Будем теперь считать, что скорость расширения туманности зависит от r. В этом случае влияние эффекта Доплера надо учесть в уравнении переноса излучения и в уравнении лучистого равновесия (см. [4]).

Рассмотрим излучение частоты ν, направление которого образует угол ϑ с нормалью к плоскопараллельным слоям туманности. Вдоль этого луча центральная частота для коэффициента поглощения будет меняться по закону

$$\nu_0'=\nu_0+\nu_0\frac{v(t)}{c}\cos\vartheta, \tag{27.60}$$

где ν_0 — центральная частота линии для неподвижного наблюдателя. Поэтому коэффициент поглощения может быть представлен в виде

$$k_\nu=k_0\alpha\left(\frac{\nu-\nu_0'}{\Delta\nu_D}\right)=k_0\alpha\left[x-\frac{v(t)}{u}\cos\vartheta\right], \tag{27.61}$$

где принято во внимание, что $x=\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}$ и $\Delta\nu_D=\nu_0\frac{u}{c}$. Считая, как и выше, что диффузия излучения сопровождается перераспределением по частотам при элементарном акте рассеяния, мы для коэффициента излучения ε_ν возьмем выражение (27.31). На основании сказанного в качестве уравнения переноса излучения имеем

$$\cos\vartheta\,\frac{dI_\nu}{dt}=\alpha\left[x-\frac{v(t)}{u}\cos\vartheta\right](S-I_\nu). \tag{27.62}$$

Уравнение лучистого равновесия будет теперь иметь вид

$$S(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int \alpha \left[x - \frac{v(t)}{u} \cos \vartheta \right] I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + S_0(t). \qquad (27.63)$$

При $v=0$ два последних уравнения переходят в уравнения (27.37) и (27.38).

Из уравнений (27.62) и (27.63) при граничных условиях (27.15) или (27.57) можно получить интегральное уравнение для определения функции $S(t)$. Для простоты мы примем, что скорость расширения v линейно возрастает с ростом оптического расстояния t, т. е. $v(t) = v(0) + \frac{dv}{dt} \cdot t$, где $\frac{dv}{dt} = \text{const}$ и $\frac{dv}{dt} > 0$. Тогда функция $S(t)$ будет определяться уравнением (27.40) или (27.58), в которых функция $K(t)$ равна

$$K(t) = A \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, \alpha(x + \gamma t \mu)\, e^{-\int_0^t \alpha(x+\gamma z \mu) \frac{dz}{\mu}} dx, \qquad (27.64)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{u} \frac{dv}{dt}. \qquad (27.65)$$

Приближенное решение упомянутых уравнений дается формулами (27.49) или (27.59), в которых

$$L(t) = A \int_0^1 d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, e^{-\int_0^t \alpha(x+\gamma z \mu) \frac{dz}{\mu}} dx =$$

$$= A \int_0^1 d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\, e^{-\frac{1}{\gamma \mu^2} \int_x^{x+\gamma t \mu} \alpha(y)\, dy} dx. \qquad (27.66)$$

В газовых туманностях обычно величина γ очень мала, а величина t очень велика. Рассмотрим поэтому два частных случая формулы (27.66).

1. Будем считать, что $\gamma t \ll 1$, т. е. туманность расширяется с небольшим градиентом скорости. В предельном случае можем положить $\gamma = 0$. Тогда формула (27.66) переходит в формулу (27.50), и поле L_α-излучения в туманности определяется выходом из нее квантов в крыльях линии (таким путем, какой был подробно рассмотрен выше).

2. Допустим, что $\gamma t \gg 1$, т. е. градиент скорости в туманности велик. В предельном случае положим $t = \infty$. Тогда выход квантов в крыльях линии будет невозможен, и поле L_α-излучения в туман-

ности определяется выходом из нее квантов вследствие эффекта Доплера. В данном случае формула (27.66) принимает вид

$$L = A\gamma \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{1}{A\gamma\mu^2}}\right) \mu^2 \, d\mu. \tag{27.67}$$

При $A\gamma \ll 1$ из (26.67) находим

$$L = \frac{1}{3} A\gamma. \tag{27.68}$$

Следует отметить, что величина $A\gamma$ не зависит от контура коэффициента поглощения. В самом деле, мы имеем

$$\int k_\nu \, d\nu = k_0 \Delta\nu_D \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) \, dx = \frac{k_0 \nu_0 u}{cA}. \tag{27.69}$$

Поэтому, пользуясь формулой (8.12), получаем

$$\frac{k_0 u}{A} = hB_{12}. \tag{27.70}$$

Следовательно,

$$A\gamma = \frac{A}{n_1 u k_0} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{n_1 h B_{12}} \frac{dv}{dr}. \tag{27.71}$$

В рассматриваемом случае приближенное выражение для функции $S(t)$ имеет вид

$$S(t) = \frac{3S_0(t)}{A\gamma}. \tag{27.72}$$

Разумеется, этой формулой можно пользоваться только для областей туманности, далеких от границ [как и вообще выражениями для $S(t)$, полученными изложенным методом].

Интересно выяснить, при каких условиях указанные частные случаи формулы (27.66) осуществляются в действительности. Как уже было установлено, ответ на этот вопрос зависит от значения величины

$$\delta = \gamma t = \frac{t}{u} \frac{dv}{dt}. \tag{27.73}$$

Если $\delta \gg 1$, то кванты в линии выходят из туманности в основном вследствие эффекта Доплера, и функция $S(t)$ определяется формулой (27.72). Если же $\delta \ll 1$, то кванты покидают туманность в основном в крыльях линии. Такое заключение вполне понятно, так как величина δ на основании формул (27.55) и (27.68) по порядку равна отношению доли квантов, выходящих из туманности вследствие эффекта Доплера, и доли квантов, выходящих в крыльях линии.

Формулу (27.73) мы можем переписать в виде

$$\delta = \frac{\Delta r}{u} \cdot \frac{dv}{dr}, \tag{27.74}$$

где Δr — толщина туманности. Оценить величину dv/dr весьма трудно, однако надо иметь в виду, что для реальных туманностей вместо dv/dr надо брать $\overline{\frac{dv}{ds}}$, т. е. градиент скорости, усредненный по всем направлениям. Как будет показано в § 28, в туманностях всегда $\overline{\frac{dv}{ds}} \approx \frac{v}{r}$ (вследствие кривизны слоев). Поэтому вместо формулы (27.74) получаем

$$\delta \approx \frac{\Delta r}{r} \frac{v}{u}. \tag{27.75}$$

Применим формулу (27.75) к планетарным туманностям. Так как толщина туманности составляет несколько десятых ее радиуса, а скорость расширения туманности в несколько раз больше средней термической скорости атома, то в данном случае δ — порядка единицы. Следовательно, функция $L(t)$ определяется самой формулой (27.66), а не ее предельными случаями. Иными словами, при нахождении поля L_α-излучения в туманности надо принимать во внимание как выход кванта в крыльях линии, так и выход вследствие эффекта Доплера.

Представляет также интерес задача о нахождении поля L_α-излучения в оболочках новых звезд. Скорости расширения этих оболочек гораздо больше скорости расширения планетарных туманностей. Поэтому в данном случае будет выполняться неравенство $\delta \gg 1$. Следовательно, поле L_α-излучения в оболочках новых звезд определяется в основном выходом квантов из оболочки вследствие эффекта Доплера.

4. Световое давление в туманностях. Определение поля L_α-излучения в туманности дает возможность вычислить давление, обусловленное этим излучением. Впервые такое вычисление сделал В. А. Амбарцумян [6], указавший на большую роль давления L_α-излучения в динамике туманностей. Особенно велика сила светового давления на границах туманности, где наибольшего значения достигает поток излучения. При этом сила светового давления различна на границах неподвижной и расширяющейся туманностей. Если туманность неподвижна, то поток L_α-излучения на внутренней границе равен нулю и сила светового давления действует только на внешней границе, причем она направлена наружу. В расширяющейся же туманности поток излучения отличен от нуля не только на внешней, но и на внутренней границе. Поэтому в данном случае сила светового давления действует на обеих границах, причем на внешней границе она направлена от звезды, а на внутренней — к звезде. В обоих случаях диффундирующее в ту-

манности L_α-излучение своим давлением приводит к увеличению толщины туманности.

Сила светового давления в линии L_α, действующая на единицу объема за 1 с, равна

$$f_r = \frac{n_1}{c} \int k_\nu H_\nu \, d\nu, \tag{27.76}$$

где n_1 — число атомов водорода в 1 см^3, k_ν — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом, H_ν — поток излучения и c — скорость света.

Будем сначала считать, что туманность неподвижна или расширяется без градиента скорости. При прямоугольном контуре коэффициента поглощения вместо формулы (27.76) имеем

$$f_r = \frac{n_1 k_0 H}{c}, \tag{27.77}$$

где H — полный поток излучения в линии L_α. Определение величины f_r по формуле (27.77) для границ туманности не составляет труда, так как число L_α-квантов, выходящих из туманности, равно числу L_c-квантов звезды, поглощенных в туманности. Подсчеты дают, что под действием светового давления в линии L_α внешние части неподвижной туманности должны испытывать ускорение порядка 1 км/с за 10 лет. Примерно такой же величины торможение должны испытывать ближайшие к звезде слои расширяющейся туманности.

Однако, как мы знаем, предположение о прямоугольном контуре коэффициента поглощения является весьма грубым. В действительности силу светового давления в линии L_α надо определять не по формуле (27.77), а по формуле (27.76). При этом предварительно должна быть решена задача о диффузии излучения в линии при реальном контуре коэффициента поглощения и при учете перераспределения излучения по частотам. Как было выяснено ранее, в ходе диффузии излучения происходит переход квантов из центральных частей линии в ее крылья. Поэтому при большой оптической толщине туманности в центре линии L_α поток излучения H_ν оказывается большим в крыльях линии и малым в ее центральных частях. Между тем коэффициент поглощения k_ν велик в центральных частях линии и мал в ее крыльях. Вследствие сказанного формула (27.76) дает для силы светового давления на границе туманности гораздо меньшие значения, чем формула (27.77) (примерно в 100 раз при оптической толщине туманности в центре линии L_α порядка 10^4).

В туманности, расширяющейся с градиентом скорости, сила светового давления в линии L_α будет также гораздо меньше значения, найденного по формуле (27.77) (см. [4]).

Чтобы уяснить смысл полученных результатов, надо иметь в виду, что планетарная туманность не может существовать долго. Вследствие расширения туманности плотность в ней уменьшается

и туманность перестает быть видимой. Если туманность расширяется со скоростью 30 км/с, то за время порядка 10^4 лет ее радиус станет порядка 10^{18} см, а ее плотность — порядка 10^{-24} г/см^3, т. е. примерно такой же, как и средняя плотность межзвездной среды. За это же время, как следует из указанных подсчетов, световое давление в линии L_α может создать разность скоростей в туманности порядка 10 км/с. Хотя этот эффект и не очень велик, но при решении некоторых вопросов его надо принимать во внимание.

Приведенные результаты относятся к туманности, у которой нет зоны H I. В таких туманностях большинство атомов водорода находится в ионизованном состоянии. Между тем световое давление в линии L_α испытывают лишь нейтральные атомы водорода. Поэтому ускорение элементарного объема, вызываемое световым давлением, оказывается не очень большим. Точнее говоря, это ускорение w определяется уравнением

$$(n_1 + n^+)\, m_{\mathrm{H}} w = \frac{n_1}{c} \int k_\nu H_\nu \, d\nu, \tag{27.78}$$

а в зоне H II выполняется неравенство $n^+ \gg n_1$.

В зоне H I имеет место обратное соотношение, т. е. $n_1 \gg n^+$. Однако в этой зоне почти не возникают L_α-кванты, вследствие чего поток излучения H_ν очень мал. Излучение же в линии L_α, идущее от зоны H II, в своей основной части не поглощается в зоне H I, а значит, и не производит светового давления. Объясняется это тем, что доплеровская ширина линии $\Delta\nu_D$ в зоне H I очень мала вследствие малости температуры T_e. Поэтому световое давление в линии L_α в зоне H I не может быть значительным.

Интересно отметить, что в туманностях, обладающих зонами H II и H I, световое давление в линии L_α достигает максимума в переходной области между этими зонами. Как показывают вычисления, в тех случаях, когда масса зоны H I сравнительно невелика, световое давление может даже вызвать движение этой зоны относительно зоны H II. Таким путем, по мнению Г. А. Гурзадяна [2], образуются планетарные туманности, состоящие из двух оболочек.

Тот факт, что давление излучения в линии L_α может создать заметные относительные движения в туманностях, объясняется как большим числом L_α-квантов в туманности, так и большой величиной коэффициента поглощения в линии L_α. Как мы знаем, некоторые эффекты, связанные с диффузией излучения (уход квантов в крылья линии, эффект Доплера, вызванный наличием градиента скорости), уменьшают давление L_α-излучения в туманностях, но оно все же остается значительным.

Кроме давления излучения в линии L_α, некоторую роль в туманностях играет также давление L_c-излучения. Однако, в отличие от давления L_α-излучения, создающего относительные движения

в туманности, давление излучения в лаймановском континууме вызывает ускоренное расширение всей туманности. Очевидно, что величина этого ускорения определяется уравнением

$$Mw = \frac{E_c}{c}, \tag{27.79}$$

где M — масса туманности и E_c — энергия, излучаемая звездой в лаймановском континууме за 1 с (или часть этой энергии, если оптическая толщина туманности за границей серии Лаймана не превосходит единицу). Величину w можно легко оценить. Как мы знаем, масса планетарной туманности составляет приблизительно 0,01 $M_\odot$, а величина E_c должна быть порядка 10^{36} эрг/с. Поэтому из формулы (27.79) находим, что под действием давления L_c-излучения скорость расширения туманности должна возрастать примерно на 1 км/с за 1000 лет, т. е. на довольно заметную величину за время существования туманности. Можно считать, что такое заключение подтверждается наблюдательными данными, так как скорость расширения туманности v оказывается в среднем тем больше, чем меньше значение коэффициента дилюции в туманности.

Наблюдаемое расширение планетарных туманностей делает очень вероятным предположение о возникновении туманности в результате сбрасывания звездой своих внешних слоев. В качестве подтверждения этой гипотезы можно отметить тот факт, что масса туманности составляет лишь небольшую долю массы звезды. Однако сейчас мы не можем указать ту катастрофу со звездой, которая приводит к образованию планетарной туманности. Одно время думали, что туманности возникают при вспышках новых или сверхновых звезд. Против этого говорит сопоставление скоростей расширения выброшенных оболочек (порядка 1000 км/с) со скоростями расширения туманностей (которые всего порядка 10 км/с). К тому же масса оболочки новой звезды оказывается гораздо меньше (примерно в 1000 раз) массы планетарной туманности. В связи с этим высказывались предположения, что планетарные туманности образуются при отрыве оболочки с небольшой скоростью от каких-либо неустойчивых звезд (например, от красных сверхгигантов). Совершенно другая точка зрения состоит в том, что планетарная туманность возникает вместе со своим ядром из дозвездного вещества (см. [2]).

Следует еще отметить, что космогоническая роль планетарных туманностей, по-видимому, довольно велика. К настоящему времени обнаружено около 600 таких объектов, однако их общее число в Галактике, вероятно, не менее 10 000. По мере расширения туманности она перестает быть видимой и, как уже говорилось, средняя продолжительность существования туманности порядка 10 000 лет. Отсюда следует, что ежегодно в Галактике исчезает (т. е. делается ненаблюдаемой) в среднем одна туманность. Вместе с тем каждый год должна, очевидно, одна туманность возникать. А так

как возраст нашей Галактики порядка 10^{10} лет, то всего в Галактике должно было возникнуть (а затем исчезнуть) примерно 10^{10} туманностей. Поэтому мы можем сделать вывод, что значительная часть звезд была когда-то ядрами планетарных туманностей.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V

1. Воронцов-Вельяминов Б. А. Газовые туманности и новые звезды.— М.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Гурзадян Г. А. Планетарные туманности.— М.: Физматгиз, 1962.
3. Aller L., Liller W. Planetary Nebulae, 1968 (русский перевод: Аллер Л., Лиллер У. Планетарные туманности.— М.: Мир, 1971).
4. Соболев В. В. Физика планетарных туманностей.— В кн.: «Вопросы космогонии», т. VI.— М.: Изд-во АН СССР, 1958.
5. Мензел Д., Бэкер Д., Аллер Л., Шортли Д., Хэбб М., Гольдберг Л. Физические процессы в газовых туманностях.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
6. Амбарцумян В. А. Научные труды, т. I.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960.
7. Киппер А. Я. Свечение газовых туманностей.— В кн.: «Вопросы космогонии», т. IV,— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
8. Соболев В. В. Диффузия излучения в газе.— В кн.: «Теория звездных спектров».— М.: Наука, 1966.
9. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел.— М.: Наука, 1969.
10. Никитин А. А., Рудзикас З. Б. Основы теории спектров атомов и ионов.— М.: Наука, 1983.