4.3. Калибровочная инвариантность

При описании динамики развития и пространственного распределения возмущений метрики, плотности и скорости материи важнейшую роль играет выбор класса системы отсчёта [Ландау, Лифшиц, 1962]. Эта проблема "выбора" не является чем-то специфическим, присущим именно возмущениям в расширяющейся Вселенной. Суть проблемы уходит своими корнями в ковариантную формулировку уравнений общей теории относительности, в которой вид уравнений не зависит от выбора системы отсчёта, в то время как вид решений – зависит. Это обстоятельство играет принципиальную роль при анализе поведения возмущений в расширяющейся Вселенной, поскольку координатные эффекты без специального анализа легко принять за истинные физические эффекты. Следуя [Hu, 1995], рассмотрим этот вопрос более детально для скалярной моды возмущений. Согласно работе [Hu, 1995], наиболее общая форма записи возмущений метрики для этого типа возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2\left[1+2\varphi^G_{(\xi)}Q\right], \\ g_{0j} &= -a^2\psi^G_{(\xi)}Q_j, \\ g_{\alpha\beta} &= a^2\left[\gamma_{\alpha\beta}+2H^G_{L(\xi)}\gamma_{\alpha\beta}Q+2H^G_T(\xi)Q_{\alpha\beta}\right], \end{aligned} \tag{4.27}$$

где $Q_j \equiv -k^{-1}Q_{;j}$, $Q_{ij} \equiv k^{-2}Q_{;i;j}+\frac{1}{3}\gamma_{ij}Q$, индекс G маркирует принадлежность соответствующих функций к определённой системе отсчёта, $\sigma = \int\frac{dt}{a}$ – конформное время. Рассмотрим сдвиг пространственных (x^α) и временнóй переменной ξ под действием скалярных возмущений Q, автоматически возмущающих и систему отсчёта,

$$\tilde{\xi} = \xi + T\dot{Q}, \quad \tilde{X}^\alpha = X^\alpha + L\dot{Q}^\alpha, \tag{4.28}$$

где тильда соответствует возмущённой системе координат, T и L – соответственно функции времени ξ. Воспользуемся правилом преобразования метрического тензора g_{ik} при переходе из одной системы к другой:

$$g_{ik}(\xi, x^\alpha) = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^k}g_{mn}(\xi - TQ;\ x^\alpha - LQ^\alpha). \tag{4.29}$$

Тогда возмущения метрики $h_{ik} = g_{ik} - \tilde{g}_{ik}$ связаны с возмуще-

ниями координат соотношением

$$h_{ik} = \tilde{g}_{ik}(\xi, x^\alpha) - g_{ik}(\xi, x^\alpha) = g_{nk}(\delta x)^n_{,i} + g_{ni}(\delta x^n)_{,k} - g_{ik,n}(\delta x)^n \quad (4.30)$$

Подставляя уравнения (4.28) и (4.29) в (4.30), получаем следующий закон для преобразования функций:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^G &= \varphi^G - T' - \frac{a'}{a}T, \\ \tilde{\psi}^G &= \psi^G + L' + kT, \\ \tilde{H}^G_L &= H^G_L - \frac{k}{3}L - \frac{a'}{a}T, \\ \tilde{H}^G_T &= H^G_T + kL, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где штрих означает производную по времени t.

4.3.1. Ньютоновская калибровка

Следуя [Hu, 1995], определим ньютоновскую калибровку условием $\tilde{\psi} = \tilde{H}^G_T\Big|_{G=N} = 0$. Систему отсчёта с такой калибровкой мы будем называть ньютоновской. Из второго уравнения системы (4.31) получим

$$T = -\frac{\Psi^G}{k} - \frac{L'}{k}, \quad (4.32)$$

а из последнего уравнения следует, что

$$L = -\frac{1}{k}H^G_T. \quad (4.33)$$

Тогда, подставляя (4.33) в (4.32), видим, что преобразование возмущений из произвольной системы отсчёта в ньютоновскую осуществляется по закону

$$T = -\frac{\Psi^G}{k} + \frac{H'^G_T}{k^2}, \quad L = -\frac{1}{k}H^G_T. \quad (4.34)$$

При этом в ньютоновской системе компоненты возмущений метрики будут равны

$$\Psi \equiv \varphi^N = \varphi^G + \frac{1}{a^k}\left[\frac{a\xi^G}{k} - \frac{aH'^G}{k^2}\right]', \quad (4.35)$$

$$\Phi \equiv H_L^N = H_L^G + \frac{1}{3} H_T^G + \frac{a'}{a}\left(\frac{\xi^G}{k} - \frac{H_T'^G}{k^2}\right).$$

Приведём для справки выражения для возмущенной плотности δx, давления δP_x и скорости υ_x материи в ньютоновской калибровке [Hu, 1995],

$$\delta_x^N = \delta_x^G + 3(1+\omega_x)\frac{a'}{a}\left[-\frac{B^G}{k} + \frac{H_T'^G}{k^2}\right],$$

$$\delta P_x^N = \delta P_x^G + 3(1+\omega_x)C_x^2\frac{a'}{a}\left[-\frac{B^G}{k} + \frac{H_T'^G}{k^2}\right], \tag{4.36}$$

$$V_x^N = V - x^G - \frac{H_T'^G}{k},$$

где индекс x означает компоненту материи, а $\omega_x = \frac{P_x}{\rho_x}$. При этом связь между ньютоновским гравитационным потенциалом и возмущениями плотности даётся следующим соотношением, вытекающим из уравнения Пуассона:

$$\Phi = 4\pi G(a^2)\rho_T\left[\delta_T^G + 3\frac{a'}{a}(1+\omega_T)(\upsilon_T^G - B^G)/k\right]. \tag{4.37}$$

4.3.2. Синхронная калибровка

Выбор синхронной системы отсчёта является одним из наиболее распространённых при анализе поведения возмущений в расширяющейся Вселенной. Формально он соответствует условиям $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi}^S = 0$. Как видно из уравнения (4.27), условие $\varphi^S = 0$ означает, что возмущения g_{00} компоненты метрического тензора отсутствуют, а $\xi^S = 0$ автоматически обращает в ноль компоненту g_{0j}. При этом из уравнения (4.31) следует, что

$$T = \frac{1}{a}\int a\varphi^G d\xi + \frac{C_1}{a}d, \qquad L = -\int(\xi^G + kT)d\xi + C_2, \tag{4.38}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Тогда из уравнений (4.38) легко найти соответствующую связь между $\tilde{H}_L^S$, H_L^G и H_T^S, H_N^G, подставляя уравнение (4.38) в уравнение (4.31). В заключение этого подраздела

приведём связь между возмущениями метрики Φ и Ψ, заданными в ньютоновской системе отсчёта, и возмущениями $h_S \equiv 6H_L^S$ и $\xi_S = -H_L^S - \frac{1}{3}H_T^S$, определяемыми в синхротронной калибровке:

$$\psi = \frac{1}{2k^2 a}[a(h_S' + 6\sigma\xi_S')]', \qquad \Phi = -\xi_S + \frac{a'}{2k^2 a}(h_S' + \sigma\xi_S'). \tag{4.39}$$

4.4. Многокомпонентная среда. Классификация типов скалярных возмущений

Важной особенностью современной теории развития скалярных возмущений в расширяющейся Вселенной является учёт многокомпонентности среды, включающей электромагнитное излучение, барионную фракцию материи, электронные, мюонные и τ-нейтрино и массивные частицы – носители космологической скрытой массы. Каждая из перечисленных выше компонент имеет свою историю взаимодействия с другими компонентами, что неизбежно отражается на динамике развития возмущений скалярного типа как в каждой подсистеме, так и в целом для возмущений плотности материи (включая все компоненты) и связанных с ними возмущений метрики. Ситуация усложняется, если допустить, что "холодная скрытая масса", составляющая на сегодня практически 30% от критической плотности материи, может сама иметь более сложный состав, т.е. включать несколько компонент, каждая из которых отождествляется со своим массивным носителем (частица, чёрная дыра и пр.), имеющим свою историю эволюции в ходе расширения Вселенной.

В этом разделе нас главным образом будет интересовать вопрос о возможных типах возмущений в такой многокомпонентной среде, детализирующих классификацию типов возмущений, относящихся в целом к скалярной моде (см. раздел 4.2).

4.4.1. Адиабатические (изоэнтропийные) моды

Прежде всего, в рамках гидродинамического подхода конкретизируем определение полной плотности материи во Вселенной ε_{tot} и полного давления

$$\varepsilon_{\text{tot}} = \sum_i \varepsilon_i, \qquad P_{\text{tot}} = \sum_i P_i, \tag{4.40}$$

где i означает сорт соответствующей компоненты. Представим ε_i