Заметим, что $P(u) \propto \exp(-u^2)$ является стационарным решением уравнения (7.68). Это отражает хорошо известный факт, что гауссово случайное поле остаётся таковым и после сглаживания, да и после любой линейной фильтрации. Однако для поля χ^2 распределение вероятности отлично от нуля только при $u \ll 1/\sqrt{2}$ (см. уравнение (7.1)) и не дифференцируется на внешней границе поля. Поэтому поле при сглаживании эволюционирует от распределения χ^2 и в конце концов приближается к распределению, близкому к стационарному гауссову решению при больших длинах сглаживания.

Таким образом, влияние антенны (как гауссова фильтра) может приводить к тому, что первичная негауссовость сигнала, локализованная на масштабах, меньших полуширины диаграммы её направленности, будет тестироваться как гауссов сигнал. Именно поэтому особую важность приобретают эксперименты с максимально высоким угловым разрешением, позволяющие в принципе ограничить угловой масштаб θ_* возможной первичной негауссовой системы.

7.10. Топологические особенности поля поляризации

В отличие от анализа статистических свойств поля анизотропии, для поляризации реликтового излучения вопрос о тестировании её природы разработан гораздо менее детально. Это обусловлено главным образом более сложными свойствами поля поляризации, которое, в отличие от анизотропии, не является скаляром. Кроме того, как мы видели в предыдущей главе, для описания поляризации используются как локальный, так и нелокальный подходы, причём выбор между ними диктуется, на наш взгляд, свойствами шумов, присутствующих на картах поляризации наряду с первичным сигналом. Первый вопрос, на котором мы хотим заострить внимание, заключается в том, какие именно характеристики поляризации несут информацию о статистической природе возмущений на поверхности последнего рассеяния квантов. В разделе 3.5 мы уже рассматривали геометрические характеристики поляризации реликтового излучения и, в частности, обратили внимание на появление аномалий поля в окрестности точек Q, где одновременно обращаются в нуль и U-, и Q-компоненты Стокса. Ниже мы проанализируем результаты

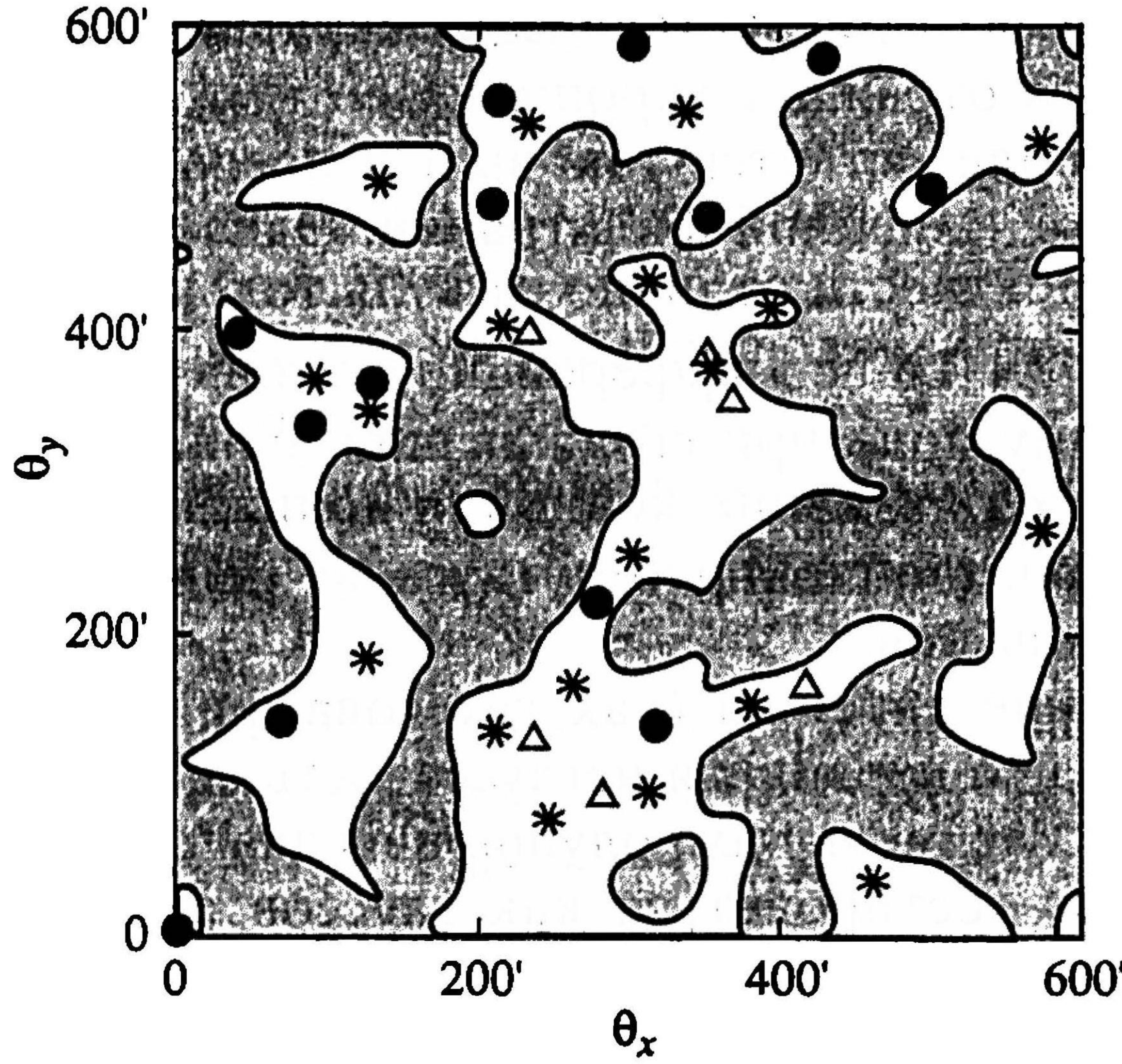

Рис. 7.22. Карта $10° \times 10°$ поля поляризации реликтового излучения для CDM-модели. Серая область соответствует участкам со степенью поляризации $p > p_t$. Сплошными линиями изображены границы между областями с $p > p_t$ и $p < p_t$. Кружки, треугольнички и звёздочки изображают фокусы, узлы и сёдла соответственно. Эта карта содержит 13 фокусов, 6 узлов и 19 сёдел

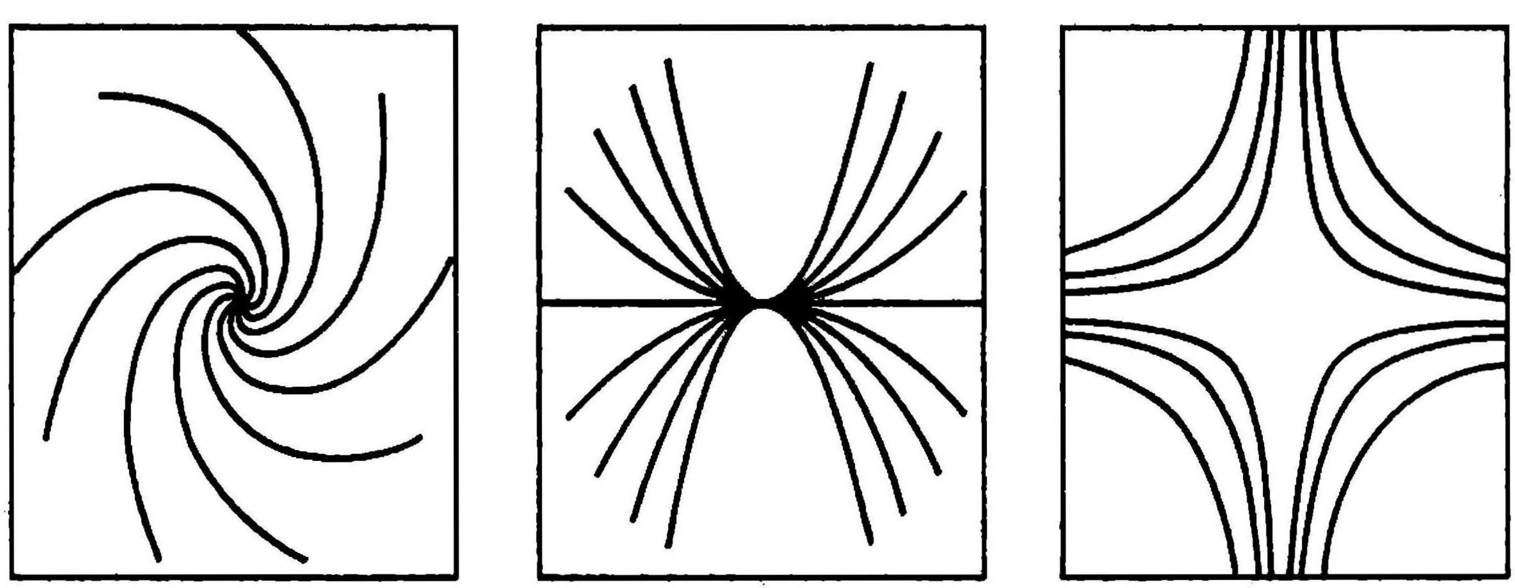

Рис. 7.23. Классификация особых точек для поля поляризации в окрестности особых точек $p = 0$. Линии показывают направление псевдовектора P (но не его величины). Слева направо: фокус, узел, седло

расчётов статистики гéнуса величины $p = \dfrac{|\overline{P}|}{\sigma_0}$, где σ_0^2 – дисперсия, а $|P|$ – модуль вектора поля поляризации [Naselsky, D. Novikov, 1998].

Разделим карту поляризации реликтового излучения на два вида областей: области с относительно сильной поляризацией $p > p_0$ (“сильно поляризованные зоны”) и области с относительно слабой поляризацией $p < p_0$ (“слабо поляризованные зоны”) (рис. 7.22 ÷ 7.25). Предположим, что мы можем измерить сигнал, имеющий поляризацию $p \geq p_t$, где p_t – порог, который определяется чувствительностью прибора. Если возможно измерить только “сильно поляризованный” сигнал $p_t > 0$, то будут видны

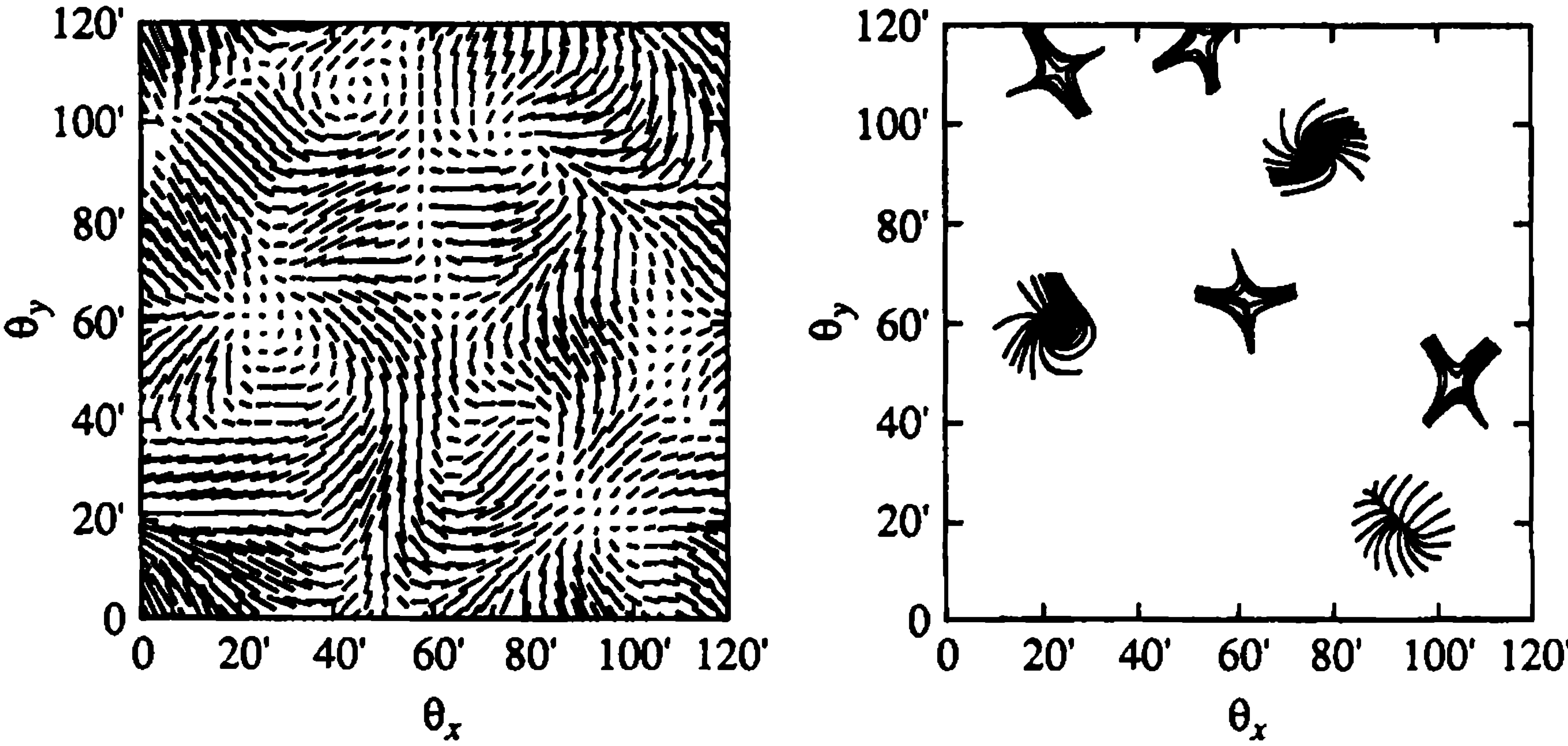

Рис. 7.24. Карта $2° \times 2°$ поля поляризации реликтового излучения для масштабно-инвариантной адиабатической модели холодной тёмной материи с $\Omega = 1$, $\Omega_b = 0{,}03$ и $h = 0{,}075$, с углом сглаживания $5'$(FWHM). Техника расчёта для небольших частей неба и спектр заимствованы из работы [Bond, Efstathiou, 1987]. Левая картинка – поле поляризации. Длина каждого вектора пропорциональна степени поляризации, а ориентация даёт направление поляризации. Для простоты визуального восприятия использовано лишь 50×50 векторов. Правая картинка та же, что и левая, но там нанесена только ориентация поляризации в окрестности неполяризованных точек (сплошные линии). Эта карта содержит 7 неполяризованных точек: два фокуса, один узел и четыре седла

только отдельные поляризованные пятна и перколяция между ними невозможна. Поэтому перколяция через поляризованные зоны может быть возможна только при чувствительности прибора $p_t \leq p_0$.

Значение p_0 может быть найдено аналитически. Будем считать величину $\left|\overline{P}\right|$ случайным двумерным скалярным полем с распределением Релея [Coles, Barrow 1987]. Это поле можно представить как двумерную поверхность в трёхмерном пространстве. Эта поверхность имеет точки экстремумов: минимумы, максимумы, седловые точки и особые точки. Плотности максимумов, минимумов и седловых точек для релеевского поля P определяются следующим образом:

$$N_{\max}(p) = \int_p^\infty n_{\max}(p')dp',$$

$$N_{\min}(p) = \int_p^\infty n_{\min}(p')dp', \tag{7.69}$$

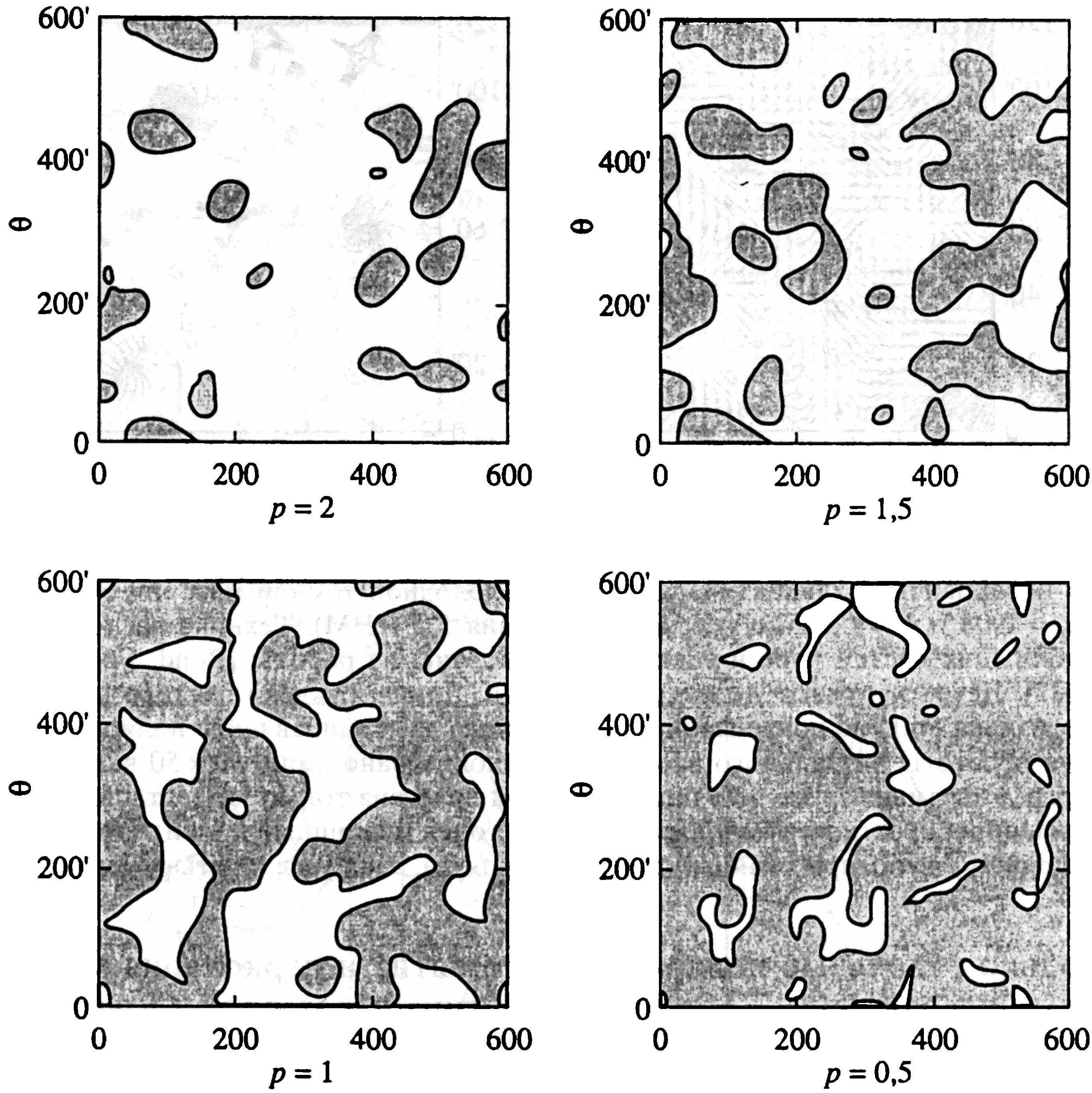

Рис. 7.25. То же, что и на рис. 7.22, но без неполяризованных точек. Здесь нанесена область с $p > p_t$ для $p_t = 2$, 1,5, 1 и 0,5. Области с $p > p_t$ сообщаются (перколируют) при $p_t = 1$, их площадь составляет ~ 61% площади карты

$$N_{\text{sad}}(p) = \int_p^\infty n_{\text{sad}}(p')dp'$$

Здесь $n_{\max}(p)$, $n_{\min}(p)$ и $n_{\text{sad}}(p)$ – концентрации максимумов, минимумов и седловых точек соответственно на некотором интервале $(p, p + dp)$, а $N_{\max}(p)$, $N_{\min}(p)$ и $N_{\text{sad}}(p)$ – концентрации максимумов, минимумов и седловых точек выше некоторого уровня p. Заметим, что в данном случае седловые точки – это седловые точки двумерной поверхности $p(x, y)$. Как и для поля анизотропии, определим генус для поля поляризации:

$$g(p) = n_{\max}(p) + n_{\min}(p) - n_{\text{sad}}(p). \tag{7.70}$$

Интегрируя (7.70) от некоторого уровня сечения P и до ∞, получим

$$G(p)=N_{\max}(p)+N_{\min}(p)-N_{\text{sad}}(p)=\int\limits_{p}^{\infty} g(p')dp' \qquad (7.71)$$

Прежде всего, с учётом определения (7.70), найдём уровень перколяции для поля поляризации из условия $G(p_0) = 0$. Заметим, что это условие не означает, что p_0 автоматически является уровнем перколяции для любого скалярного поля. Хорошо известно, что для случайного гауссова поля уровень перколяции соответствует уровню, при котором кривая генуса пересекает нуль. В случае релеевского распределения это условие означает также, что уровень p_0 соответствует контуру перколяции.

Введём, как и для поля анизотропии, комбинацию независимых случайных величин q, u и их первую и вторую производные $q_i, u_i, q_{ij}, u_{ij}, (q_{ij}=Q_{ij}/\sigma_2, u_{ij}=U_{ij}/\sigma_2,\ i=1,2)$, где σ_2 – спектральный параметр, определённый как $\sigma_2^2=\left\langle Q_{ii}^2\right\rangle=\left\langle U_{ii}^2\right\rangle$. Эти величины подчиняются следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&p^2=q^2+u^2,\\
&p_i=qq_i+uu_i,\\
&\gamma p_i p_j+p_{ij}=\gamma(q_iq_j+u_iu_j)+qq_{ij}+uu_{ij},\\
&\left\langle qu\right\rangle=\left\langle q_iu_j\right\rangle=\left\langle q_{ij}u_{kl}\right\rangle=\left\langle qu_i\right\rangle-\left\langle q_iu\right\rangle=0,\\
&\left\langle qq_{ij}\right\rangle=\left\langle uu_{ij}\right\rangle=-\frac{\gamma}{2}\delta_{ij}, \qquad\qquad (7.72)\\
&\left\langle q_iq_j\right\rangle=\left\langle u_iu_j\right\rangle=-\frac{1}{2}\delta_{ij},\\
&\left\langle q_{ij}q_{kl}\right\rangle=\frac{1}{8}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ij}\delta_{kl}),\\
&\gamma=\frac{\sigma_l^2}{\sigma_0\sigma_2}.
\end{aligned}$$

Совместная функция распределения F для величин q, q_i, q_{ij}, u, u_i, u_{ij} выбирается гауссовой в соответствии с гипотезой о нормальном распределении возмущений метрики, скорости и плотности материи,

$$Fdqdudq_i du_i dq_{ij} du_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{12}\det M}} e^{-\frac{A}{2}} dqdudq_i du_i dq_{ij} du_{ij}, \quad (7.73)$$

$$A = \upsilon \times m^{-1} \times \upsilon^T,$$

где M – ковариантная матрица, а A – квадратичная форма 12-мерного вектора $\upsilon(q, q_i, q_{ij}, u, u_i, u_{ij})$. Подстановка p, p_i, p_{ij} в уравнение (7.73) из уравнения (7.72) и интегрирование по шести переменным даёт объединённую вероятность $fdpdp_i dp_{ij}$ того, что величины p, p_i, p_{ij} лежат в интервале от p, p_i, p_{ij} до $p + dp$, $p_i + dp_i$, $p_{ij} + dp_{ij}$.

По аналогии с [BE] дифференциальная плотность точек экстремумов подчиняется уравнению

$$n_{\text{ext}}(p) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \int \left|\det(p_{ij})\right| f\,\delta(p_1)\delta(p_2) dp_{ij}, \quad (7.74)$$

где n_{ext} – плотность экстремумов. Эти экстремумы могут быть максимумами, минимумами или седловыми точками, зависящими от пределов интегрирования по du_{ij}. Эти пределы определяются величинами $tr(p_{ij})$ и $\det(p_{ij})$ матрицы вторых производных (p_{ij}).

Из определений (7.71) и (7.74) найдём, что кривая генуса подчиняется следующему уравнению:

$$g(p) = n_{\max}(p) + n_{\min}(p) - n_{\text{sad}}(p) = \quad (7.75)$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \int \det(p_{ij}) f(p, p_i = 0, p_{ij}) dp_{ij}.$$

Проинтегрировав его, получаем

$$g(p) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2}\right)^2 (p^2 - 3) e^{-\frac{p^2}{2}} \quad (7.76)$$

Тогда кривая генуса имеет вид

$$G(p) = \frac{1}{4\pi r_c^2}(p^2 - 1) e^{-\frac{\nu^2}{2}}. \quad (7.77)$$

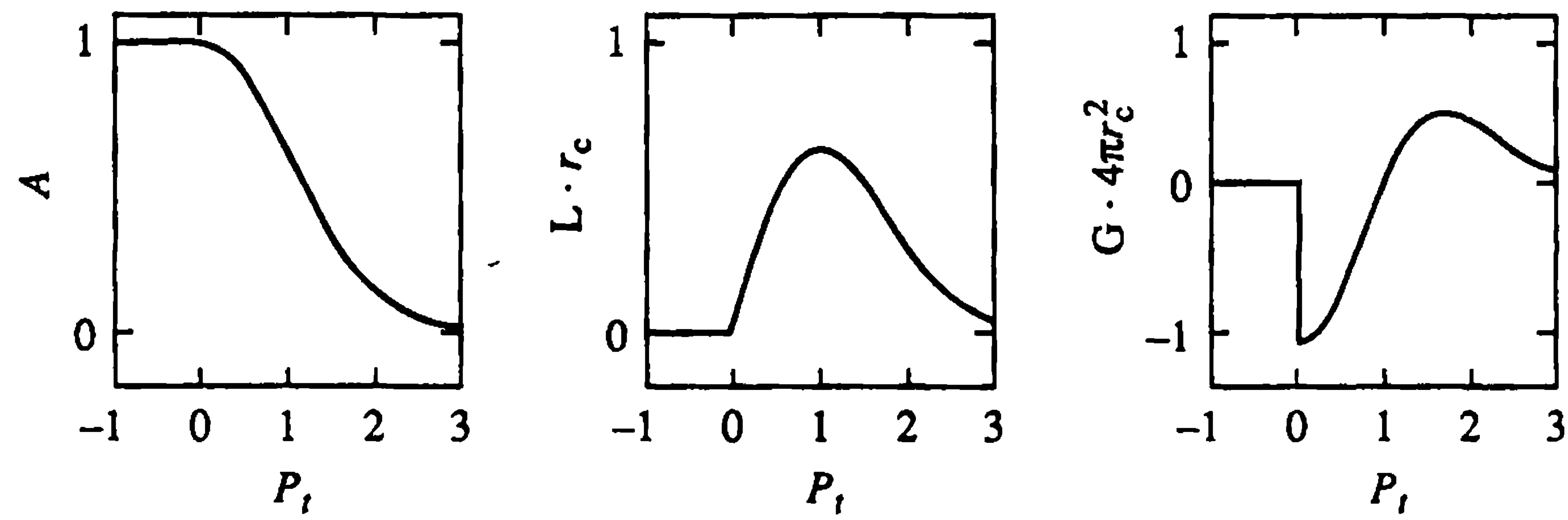

Рис. 7.26. Функционалы Минковского A, L и G для поля поляризации реликтового излучения. G не является непрерывной функцией в точке $p_t = 0$ из-за наличия особых точек. Порог дан в единицах σ_0

Условие $G(p) = 0$ даёт нам значение p_0:

$$p_0 = 1. \tag{7.78}$$

Таким образом, принципиальным и важнейшим отличием поля модуля поляризации от поля анизотропии является сдвиг уровня перколяции с $p_0 = 0$ (типичного для гауссова поля) до $p_0 = 1$, отражающий особенности релеевского распределения. Обратимся к анализу Функционалов Минковского для карт модуля "вектора" поляризации.

Геометрическая интерпретация ФМ на двумерной карте очень проста. Будем рассматривать интенсивность поляризации как двумерную поверхность в трёхмерном пространстве, как это сделано в предыдущем разделе. Если мы рассечём эту поверхность на некотором уровне p_t, то площадь карты разделится на две части: одна из них – это часть, где поляризация выше некоторого порога p_t, а другая – где поляризация ниже его, $p < p_t$. Для двумерного распределения ФМ соответствуют следующим величинам:

1. A – часть площади карты, где $p > p_t$.

2. L – длина границы между частями, где $p < p_t$ и $p > p_t$ на единицу площади.

3. $G = N_{\max} + N_{\min} - N_{\mathrm{sad}}$ – эйлеровы характеристики на единицу площади (эквивалент генуса).

Следовательно, порог – это независимая переменная, от которой зависят все эти функционалы. Фактически третий функционал уже рассматривался нами выше при анализе уровня перколяции. Первый функционал – это $\exp\left(-\frac{\nu}{2}\right)^2$ Второй функкционал имеет вид [Naselsky, D. Novikov, 1998]

$$L = \frac{1}{r_c} p_t e^{-\frac{v_t^2}{2}} \tag{7.79}$$

На рис. 7.26 приведены ФМ для поля поляризации реликтового излучения. Функционалы для распределения Релея равны нулю при $p_t < 0$. Эти функционалы могут быть использованы для описания морфологии поля поляризации реликтового излучения таким же образом, как и для анизотропии реликтового излучения (Winitzki, Kosowski 1997).