7.2. Спектральные параметры гауссова поля анизотропии

В этом разделе мы введём основные характеристики случайного гауссова поля анизотропии, предполагая рассмотреть статистические свойства поля поляризации в следующих параграфах этой главы. В основе нашего анализа лежит обобщение идеи Райса [Rice, 1944, 1945] описания свойств одномерных шумов, данное в работе [Bardeen et al., 1986] для трёхмерных и в работе [Bond, Efstathiou, 1987] – для двумерных гауссовых полей.

Для удобства чтения сначала мы суммируем основные определения и свойства гауссовых статистик анизотропии реликтового излучения, частично уже использованных ранее. Следуя работе [Bond, Efstathiou, 1987], рассмотрим распределение температуры реликтового излучения на небесной сфере. Предположим, что это поле является случайным двумерным гауссовым полем на сфере. Это поле полностью характеризуется спектром мощности C_l. Используя это описание можно предположить хорошо известное выражение для температуры реликтового излучения

$$T(\vec{q}) = \langle T(\vec{q})\rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^m C_l^{\frac{1}{2}} Y_l^m(\vec{q}), \tag{7.1}$$

где q – единичный вектор, тангенциальный к направлению движения фотонов, a_l^m – независимые случайные гауссовы числа, $\langle T(\vec{q})\rangle$ – усреднённая температура реликтового излучения, такая, что $\langle T(\vec{q})\rangle = \frac{1}{4\pi}\int T(\vec{q})d\Omega$, Y_l^m – сферические гармоники. Введём следующее выражение для анизотропии реликтового излучения: $\Delta T(\vec{q}) = \left(T(\vec{q}) - \langle T(\vec{q})\rangle\right)/\langle T(\vec{q})\rangle$. Двухточечная корреляционная функция $C(\theta)$ может быть найдена с помощью усреднения $T(\vec{q})\times T(\vec{q}')$ по всему небу при условии, что угол между направлениями $\vec{q}$ и $\vec{q}'$ остаётся постоянным:

$$C_{\text{obs}}(\theta) = \langle \Delta T(\vec{q})\cdot \Delta T(\vec{q}')\rangle, \qquad \vec{q}\cdot\vec{q}' = \cos\theta. \tag{7.2}$$

Принимая во внимание уравнение (7.2) и то, что $\left\langle a_l^m a_{l'}^{m'}\right\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$, получаем

$$C_{\text{obs}}(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_l^m\right)^2 C_l P_l(\cos\theta). \tag{7.3}$$

Среднее значение наблюдательной корреляционной функции имеет вид

$$C(\theta) = \overline{C_{\text{obs}}(\theta)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta). \tag{7.4}$$

Наряду с анализом свойств сигнала ΔT на небесной сфере важнейшую роль в изучении анизотропии реликтового излучения играет так называемое "flat sky"-приближение, когда малый участок сферы можно приближённо считать плоским. Это приближение позволяет использовать технику Фурье-анализа на плоскости, что значительно упрощает математическую сторону проблемы. В то же время "flat sky"-приближение вносит определённые погрешности в статистические характеристики сигнала, которые необходимо принимать во внимание даже при отсутствии посторонних шумов различной природы.

Следуя работе [Abbott, Wise, 1984], рассмотрим влияние конечного размера рассматриваемой области на свойства наблюдаемой корреляционной функции. Учтём, что наблюдаемая корреляционная функция отличается от своего среднего по ансамблю приблизительно на величину дисперсии, обусловленную "cosmic variance"[2]:

$$D_0(\theta) = \overline{C^2_{\text{obs}}(\theta)} - \overline{C_{\text{obs}}}^2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sum_l (2l+1) C_l^2 P_l^2(\cos\theta). \tag{7.5}$$

Нижний индекс 0 в левой части означает, что это значение получено усреднением по всему небу. Значение $D_0(\theta)$ достаточно мало для $\theta \sim 1°$, но если мы будем рассматривать лишь небольшую часть неба, то эта величина вырастает до

$$D_\Omega(\theta) \sim \sqrt{\frac{4\pi}{\Xi}} D_0(\theta), \tag{7.6}$$

где Ξ – площадь рассматриваемой области в долях 4π. Как видно из уравнения (7.6), при уменьшении $\Xi \to 0$ неопределённость в поведении C_l возрастает как $\Xi^{1/2}$, что автоматически приводит к погрешности $\delta C_l / C_l \simeq (\Xi l)^{-1/2}$ ([Abbott, Wise, 1984; Knox, 1995]). Таким образом "flat sky"-приближение описывает общие характеристики спектра $C(l)$ с погрешностью $\delta C_l / C_l \ll 1$ лишь для мультиполей с номером $l\Xi \gg 1$.

[2] Этот термин отражает тот факт, что при анализе статистических свойств ΔT-сигнала мы имеем лишь одну его реализацию на небесной сфере и не можем осуществить усреднение по ансамблю реализаций.

Если мы исследуем только маленький кусочек неба, то его геометрия приблизительно плоская, и мы можем ввести декартовы координаты (x, y) и представить $\Delta T(x, y)$ как сумму ряда Фурье [Bond, Estathiou, 1987]

$$\Delta T(x,y)=\sum_{ij} a_{ij}C^{\frac{1}{2}}(k)\cos\left(2\pi\frac{ix+iy}{L}+\varphi_{ij}\right), \tag{7.7}$$

где $C(k)$ – спектр мощности, $k=\frac{2\pi}{L}\sqrt{i^2+j^2}$, a_{ij} – независимые случайные гауссовы величины, φ_{ij} – случайные фазы, равномерно распределённые в интервале $(0,2\pi)$, $L \approx \Xi^{1/2}$ – угловой размер исследуемой области.

Корреляционная функция $C_{\rm obs}(r)=\langle\Delta T(x,y)\cdot\Delta T(x',y')\rangle$ может быть получена усреднением по квадрату $L\times L$ подобно уравнению (7.2),

$$C_{\rm obs}(r)=\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}^2C(k)J_0(kr), \tag{7.8}$$

где $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ Формально после усреднения по ансамблю реализаций получим

$$C(r)=\overline{C_{\rm obs}(r)}=\frac{1}{2}\sum_{ij} C(k)J_0(kr), \tag{7.9}$$

где k определено выше как функция от k и j. Уравнение (7.9) находится в хорошем согласии с уравнением (7.4), так как если $\theta \ll \pi$, то $P_l(\cos\theta) \approx J_0(l\theta)$ и $l\theta \approx kr$.

Таким образом, возмущения ΔT могут быть описаны уравнением (7.7), где $C(k) \approx C_l$, $k \sim l/\xi_n$ (ξ_n – современный горизонт при $z = 0$). Очевидно, что наблюдательная корреляционная функция отличается от средней по ансамблю на величину дисперсии

$$D(r)=\overline{C_{\rm obs}^2(r)}-(\overline{C_{\rm obs}(r)})^2=\frac{1}{2}\sum_{ij} C^2(k)J_0^2(kr). \tag{7.10}$$

Для $r \ll L$ корреляционная функция и её дисперсия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} &C(r)=\pi\int kC(k)J_0(kr)dk,\\ &D(r)=\pi\int kC^2(k)J_0^2(kr)dk,\\ &C_{\rm obs}(r)\sim C(r)\pm\sqrt{D(r)}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

С помощью уравнений (7.11) введём спектральные параметры подобно тому, как это сделано в работе [Bond, Estathiou, 1987]:

$$\sigma_0^2 = \pi \int kC(k)dk,$$
$$\sigma_1^2 = \pi \int k^3 C(k)dk, \qquad (7.12)$$
$$\sigma_2^2 = \pi \int k^5 C(k)dk,$$
$$R_* = \sigma_1 / \sigma_2, \qquad r_c = \sigma_0 / \sigma_1, \qquad \gamma = \sigma_1^2 /(\sigma_0 \sigma_2).$$

Как видно из (7.12), спектральные параметры полностью определяются значениями корреляционной функции и её второй и четвёртой производных по r, взятыми в точке $r = 0$,

$$\sigma_i^2 = (-1)^i (i!) 2^{2i} \left. \frac{d^i C(\omega)}{d\omega^i} \right|_{\omega=0}, \qquad (7.13)$$

где $\omega = 2\sin\frac{\theta}{2}$. Таким образом, спектральные параметры σ_i^2 являются моментами спектра $C(l)$ и, как было показано в работах [Bardeen et al., 1986; Bond, Efstathiou, 1987], они полностью определяют локальную топологию карт анизотропии реликтового излучения. Остановимся на этом аспекте проблемы более подробно.

7.3. Локальная топология случайного гауссова поля анизотропии. Статистика пиков

Напомним, что гауссово случайное поле – это то поле, для которого совместная гауссова вероятность распределения случайных переменных x_i даётся выражением

$$P(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \frac{e^{-Q}}{((2\pi)^n \det M)^{1/2}} dx_1 \ldots dx_n,$$
$$2Q = \sum_{ij} \Delta x_i (M^{-1})_{ij} \Delta x_j. \qquad (7.14)$$

Для определения матрицы ковариаций M_{ij} в уравнении (7.14) нужны только средние значения случайных величин $\langle x_i \rangle$ и их дисперсии

$$M_{ij} = \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle, \qquad \Delta x_i = x_i - \langle x_i \rangle. \qquad (7.15)$$

Предположим, что случайный гауссов процесс уже реализо-