подобно тому, как это сделано в работе [Bond, Estathiou, 1987]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_0^2 = \pi \int kC(k)dk, \\
&\sigma_1^2 = \pi \int k^3 C(k)dk, \\
&\sigma_2^2 = \pi \int k^5 C(k)dk, \\
&R_* = \sigma_1 / \sigma_2, \qquad r_c = \sigma_0 / \sigma_1, \qquad \gamma = \sigma_1^2 / (\sigma_0 \sigma_2).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Как видно из (7.12), спектральные параметры полностью определяются значениями корреляционной функции и её второй и четвёртой производных по r, взятыми в точке $r = 0$,

$$\sigma_i^2 = (-1)^i (i!) 2^{2i} \left. \frac{d^i C(\omega)}{d\omega^i} \right|_{\omega=0}, \tag{7.13}$$

где $\omega = 2\sin\frac{\theta}{2}$. Таким образом, спектральные параметры σ_i^2 являются моментами спектра $C(l)$ и, как было показано в работах [Bardeen et al., 1986; Bond, Efstathiou, 1987], они полностью определяют локальную топологию карт анизотропии реликтового излучения. Остановимся на этом аспекте проблемы более подробно.

7.3. Локальная топология случайного гауссова поля анизотропии. Статистика пиков

Напомним, что гауссово случайное поле – это то поле, для которого совместная гауссова вероятность распределения случайных переменных x_i даётся выражением

$$\begin{aligned}
&P(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \frac{e^{-Q}}{((2\pi)^n \det M)^{1/2}} dx_1 \ldots dx_n, \\
&2Q = \sum_{ij} \Delta x_i (M^{-1})_{ij} \Delta x_j .
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Для определения матрицы ковариаций M_{ij} в уравнении (7.14) нужны только средние значения случайных величин $\langle x_i \rangle$ и их дисперсии

$$M_{ij} = \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle, \qquad \Delta x_i = x_i - \langle x_i \rangle. \tag{7.15}$$

Предположим, что случайный гауссов процесс уже реализовался на сфере, как это имеет место в данных по анизотропии реликтового излучения, измеренных COBE. В целом реализация анизотропии выглядит как совокупность светлых и тёмных зон, соответствующих максимумам (светлые зоны) и минимума (тёмные зоны) сигнала $\Delta T/T$. Как связно количество этих зон со свойствами спектра гауссова распределения $\Delta T/T$? Каковы наибольшие (положительные) и наименьшие (отрицательные) значения $\Delta T/T$ на карте? Какова структура сигнала в окрестности точек максимумов и минимумов $\Delta T/T$? Эти и другие вопросы составляют суть проблемы исследования локальной топологии поля анизотропии, на которые современная теория случайных полей даёт вполне определённые ответы. Почему так важно исследовать локальную топологию сигнала? Очевидно, что тестируя его топологические особенности можно подтвердить или опровергнуть гипотезу о нормальности (гауссовости) распределения анизотропии. Более того, в ряде случаев можно классифицировать и устранить возможные источники негауссовых искажений сигнала (эффекты систематики, проявления галактических и внегалактических помех и т.д.), тем самым приблизившись вплотную к решению задачи об определении статистической природы первичных неоднородностей метрики, плотности и скорости материи по данным об анизотропии реликтового излучения.

Возникает вопрос: а почему не воспользоваться такими стандартными тестами детектирования негауссовости сигнала, как анализ трёхточечной корреляционной функции или биспектр или моменты более высокого порядка?[3]. Ответ оказывается на удивление прост. Не только можно, но и необходимо воспользоваться этими стандартными тестами при изучении статистических свойств реализаций случайных полей. На практике, однако, отрицательные или положительные результаты применения этих тестов едва ли могут считаться окончательными, так как только бесконечное число n-точечных корреляционных функций может подтвердить или опровергнуть гипотезу о гауссовой природе сигнала. Распределение может выглядеть гауссовым вплоть до очень высоких моментов, а затем стать негауссовым. Примеры такого рода аномалий хорошо известны (см., например, [Kendall, Stuart, 1977]). Именно поэтому любые дополнительные статистики и тесты, которые оказываются

[3] Детальный анализ этих методов дан в работах [Peebles, 1983; Heavens, Sneth, 1999].

чувствительными к различным свойствам гауссова процесса, взаимно дополняют друг друга и позволяют вплотную приблизиться к решению проблемы.

В качестве первого и одного из важнейших шагов в изучении локальной структуры карт анизотропии реликтового излучения мы рассмотрим статистику пиков $\Delta T/T$, впервые предложенную в качестве одного из критических тестов на гауссовость первичного сигнала в работах [Заботин, Насельский, 1985; Sazin, 1985]. Детальная разработка теории пиков в распределении $\Delta(T\theta,\ \varphi)$ (для гауссова сигнала) была дана в работе [Bond, Efstathiou, 1987] и обобщена для конкретных негауссовых полей в работе [Coles, Barrow, 1987]. Следуя работам [Bardeen et al., 1986] (в дальнейшем [BBKS]) и [Bond, Efstathiou, 1987] (в дальнейшем [BE]), будем трактовать распределение пиков $\Delta T/T$ на сфере как случайный точечный процесс, характеризуемый плотностью вероятности

$$n_{pk} = \sum_{p} \delta\left(\vec{q} - \vec{q}_{p}\right), \tag{7.16}$$

где $\vec{q}$ – координаты произвольной точки на сфере, а $\vec{q}_p$ – позиции точек экстремумов распределения $\Delta T(\vec{q})$: $\vec{\nabla}\left(\Delta T(\vec{q})\right) = 0$; $\vec{\nabla}$ – оператор градиента на сфере.

Рассмотрим поведение поля анизотропии в окрестности точки экстремума. Следуя BBKS, введём обозначение $\xi(\vec{q}) \equiv \nabla\left(\Delta T(\vec{q})\right)$ и разложим $\left(\Delta T(\vec{q})\right)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta T(\vec{q}) = \left(\Delta T\left(\vec{q}_p\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_{ij} \xi_{ij}\left(\vec{q} - \vec{q}_p\right)_i\left(\vec{q} - \vec{q}_p\right)_j. \tag{7.17}$$

Аналогичные действия произведём и для градиента поля,

$$\eta(\vec{q}) \simeq \sum_{ij} \xi_{ij}\left(\vec{q} - \vec{q}_p\right)_j, \tag{7.18}$$

где ξ_{ij} – матрица вторых производных по переменной $\vec{q}$ от $\Delta T(\vec{q})$. Считая матрицу ξ_{ij} несингулярной в точке $\vec{q} = \vec{q}_p$, найдём компоненты вектора $\left(\vec{q} - \vec{q}_p\right)$ из уравнения (7.18),

$$\left(\vec{q} - \vec{q}_p\right)_i \simeq \xi^{-1}\left(\vec{q}_p\right)\eta_i(\vec{q}), \tag{7.19}$$

где $\xi^{-1}\left(\vec{q}_p\right)$ – матрица, обратная к матрице ξ_{ij}. Комбинируя уравнения (7.16) и (7.19) и учитывая свойства δ-функции, получим [BBKS]

$$\left\langle n_{pk}(\vec{q})\right\rangle = \left\langle\left|\det\xi^{-1}(\vec{q})\right|\delta^{(2)}\left[\vec{\eta}(\vec{q})\right]\right\rangle =$$

$$= \int d(dT)d^6\xi\left|\det\xi^{-1}(\vec{q})\right|P\left(\Delta T,\vec{\xi}=0,\xi\right), \tag{7.20}$$

где $P\left(\Delta T,\vec{\xi}=0,\xi\right)$ – совместная функция распределения анизотропии ΔT и её первых и вторых производных, взятых в точке $\vec{\xi}=\{\xi_i\}=0$. Однородность и изотропия поля ΔT означает в среднем, что среднее число пиков не зависит от координат на сфере. Следуя [BE], введём безразмерную переменную $\nu \equiv \Delta T/\sigma_0$, где σ_0 определена в уравнениях (7.12), (7.13) и является корнем квадратным из дисперсии ΔT.

Определим функции $N_{max}(\nu)d\nu$ и $N_{min}(\nu)d\nu$ как плотность числа максимумов и минимумов ΔT на карте анизотропии, амплитуда которых заключена в интервале $\nu \div (\nu + d\nu)$. Отсылая читателя, интересующегося деталями расчётов, к оригинальным статьям [BBKS] и [BE], приведём окончательные выражения для $N_{max}(\nu)d\nu$ и $N_{min}(\nu)d\nu$ [D. Novikov, Jørgensen, 1966a, b]:

$$N_{max}(\nu)d\nu - \frac{1}{2\pi\theta_*^2}\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right)\frac{d\nu}{(2\pi)^{1/2}}G(\gamma,\gamma\nu), \tag{7.21}$$

$$G(\gamma,x_*) \equiv (x_*^2-\gamma^2)\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{x_*}{[2(1-\gamma^2)]^{1/2}}\right\}\right]+$$

$$+x_*(1-\gamma^2)\frac{\exp\{-x_*^2/[2(1-\gamma^2)]\}}{[2\pi(1-\gamma^2)]^{1/2}}+$$

$$+\frac{\exp[-x_*^2/(3-2\gamma^2)]}{(3-2\gamma^2)^{1/2}}\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{x_*}{[2(1-\gamma^2)(3-2\gamma^2)]^{1/2}}\right\}\right].$$

Здесь $\operatorname{erfc}(x) = 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x dte^{-t^2}$, $\theta_* = \sqrt{2}\sigma_1/\sigma_2$, а σ_1, σ_2 и γ определены в уравнениях (7.12), (7.13):

$$(N_{max}+N_{min})(\nu)d\nu =$$

$$= \frac{\gamma^2}{2\pi\theta_*^2}\frac{\exp(-\nu^2/2)}{(2\pi)^{1/2}}\left\{\nu^2-1+\frac{\exp[-x_*^2/(3-2\gamma^2)]}{\gamma^2(3-2\gamma^2)^{1/2}}\right\}. \tag{7.22}$$

Интегрирование уравнений (7.21), (7.22) в пределах от ν_t до ∞, где $\nu = \nu_t$ – произвольно взятый уровень, даёт среднее число максимумов и минимумов, имеющих амплитуду выше порога ν_t [BBKS; BE]:

$$n_{\max}(\nu_t)+n_{\min}(\nu_t)=\frac{\gamma^2}{(2\pi)^{3/2}\theta_*^2}\nu_t e^{-\frac{\nu_t^2}{2}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi\sqrt{3\theta_*^2}}\operatorname{erfc}\left\{\frac{\nu_t}{[2(1-2\gamma^2/3)]^{1/2}}\right\} \qquad (7.23)$$

Если $\nu_t \to -\infty$, то полное число экстремумов на карте анизотропии будет равно [BE]

$$n_{pk}(-\infty)=\frac{1}{4\pi\sqrt{3}}\theta_*^{-2}(\text{ср}^{-1}). \qquad (7.24)$$

Соотношения (7.21)÷(7.24) открывают важное направление исследования гауссовой природы сигнала, основанное на подсчёте концентрации максимумов и минимумов на картах анизотропии для различных космологических моделей.

В то же время уравнения (7.21)÷(7.24) нуждаются в небольшой модификации, учитывающей реальные параметры эксперимента. В самом "простом" случае, когда свойства сигнала определяются первичной анизотропией реликтового излучения, сглаженной антенной приёмника и инструментальными шумами, спектральные параметры претерпевают модификацию. Предположим, что функция пропускания антенны имеет гауссову форму с характерным угловым масштабом θ_A, а инструментальный шум является "белым" шумом, для которого спектр $C_{l(\text{noise})}$ не зависит от l. Следуя работе [Barreiro et al., 1997], определим полную корреляционную функцию для смеси первичной анизотропии и шума в следующем виде:

$$C(\alpha,\sigma)=\frac{1}{4\pi}\sum_l (2l+1)\left[C_l e^{-l(l+1)\theta_A^2}+C_N\right]P_l(\cos\theta). \qquad (7.25)$$

Тогда с учётом определения (7.13) все спектральные параметры случайного гауссова поля анизотропии реликтового излучения, включая и внешние инструментальные шумы, будут функциями θ_A и C_N. Следуя [Barreiro et al., 1997], введём амплитуду шума $A_N(10')$, характеризующую уровень шума, сглаженного по масштабу $10'$ с помощью гауссова фильтра. Не вдаваясь в детализацию конкретных экспериментов, выберем три значения[4]

[4] Заметим, что параметр $A_N(10')$ характеризует уровень флуктуаций $\Delta T/T$ и поэтому безразмерен.

Таблица 7.1

PWHM	Ω	θ_c (arcmin)	γ	θ_* (arcmin)	θ_c (arcmin)	γ	θ_* (arcmin)	θ_c (arcmin)	γ	θ_* (arcmin)
5′…	0,1	8,6	0,53	4,5	5,7	0,44	2,5	3,6	0,61	2,2
5′…	0,3	11,1	0,45	5,0	5,9	0,40	2,3	3,5	0,61	2,2
5′	1,0	15,0	0,40	6,1	6,1	0,37	2,3	3,6	0,60	2,1
10′…	0,1	15,0	0,49	7,4	12,8	0,45	5,7	8,4	0,54	4,5
10′…	0,3	17,0	0,52	8,9	13,7	0,42	5,8	8,5	0,53	4,5
10′…	1,0	22,0	0,43	9,4	16,0	0,34	5,5	8,9	0,50	4,4
20′…	0,1	32,3	0,44	14,2	29,7	0,42	12,3	21,1	0,45	9,6
20′…	0,3	30,2	0,48	14,6	28,0	0,45	12,7	20,5	0,48	9,7
20′…	1,0	35,9	0,49	17,5	32,9	0,42	13,9	23,0	0,43	9,9

Таблица 7.2

FWHM	ν	$\Omega = 0,1$	$\Omega = 0,3$	$\Omega = 1$	$\Omega = 0,1$	$\Omega = 0,3$	$\Omega = 1$	$\Omega = 0,1$	$\Omega = 0,3$	$\Omega = 1$
5′…	3	4541	2912	1657	11019	10965	10459	25147	25883	25962
5′…	3,5	1011	636	357	2401	2362	2228	5674	5842	5794
5′…	4	174	108	60	407	397	271	986	1016	1007
10′	3	1518	1106	753	2192	1953	1615	4727	4660	4295
10′…	3,5	335	258	164	479	423	341	1055	1038	949
10′…	4	57	44	28	81	72	56	182	179	163
20′…	3	335	379	267	419	452	339	795	832	690
20′…	3,5	74	84	59	91	99	73	174	183	150
20′	4	13	14	10	15	17	12	30	31	25

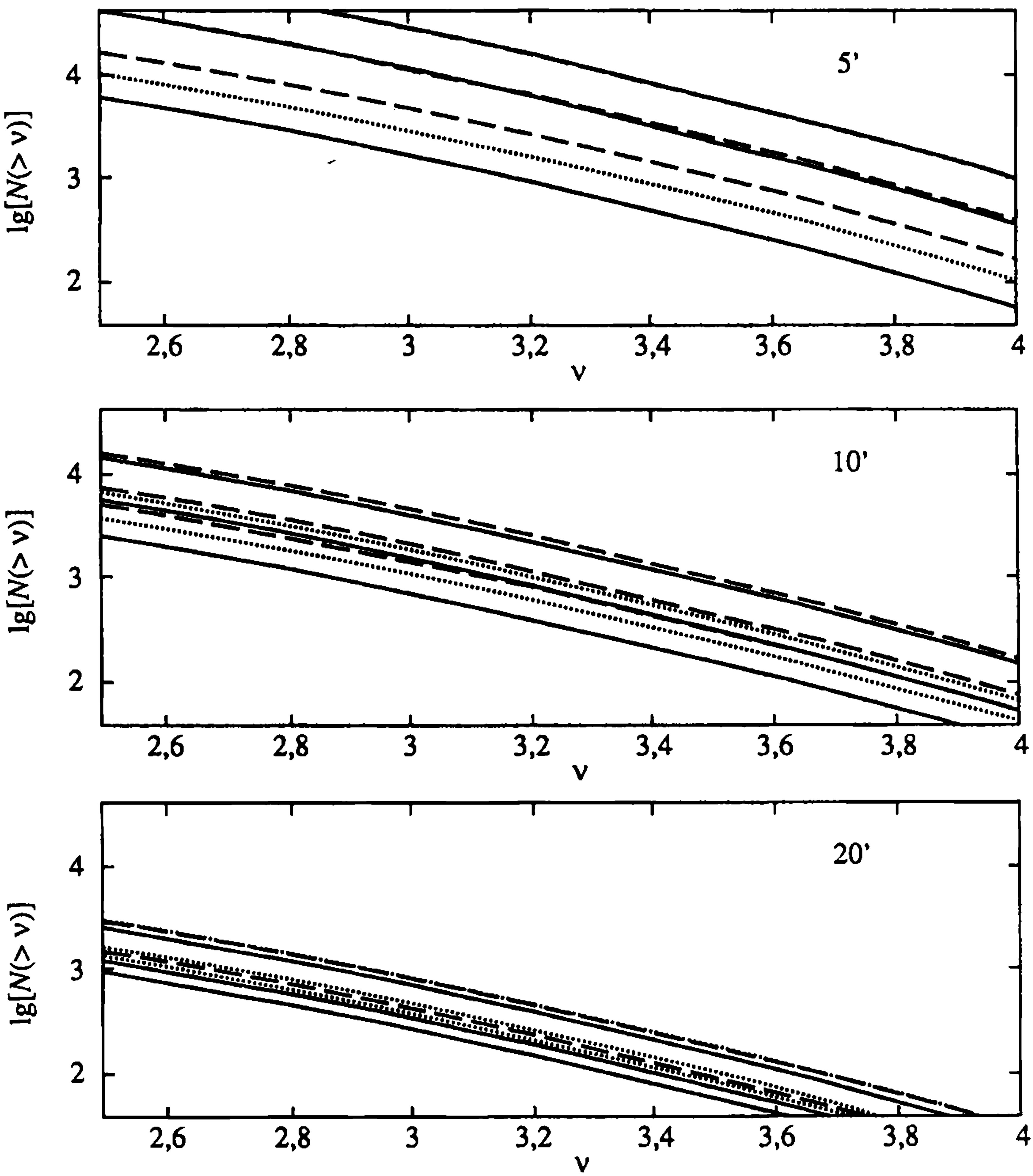

Рис. 7.1. Зависимость логарифма числа пиков выше некоторого уровня сечения карты ν от высоты сечения для различного углового разрешения антенны. Штриховая и пунктирная линии соответствуют открытым моделям Вселенной ($\Omega = 0{,}1$ и $0{,}3$ соответственно), сплошная линия соответствует плоской модели Вселенной. Каждая совокупность из трёх различных линий на каждом рисунке соответствует значениям $A_{(N)} = (3,\ 1,\ 0) \cdot 10^{-5}$ (сверху вниз)

$A_N(10') = (0,\ 1,\ 3) \cdot 10^{-5}$. Случай $A_N(10') = 0$ относится к "идеальному" эксперименту, не искажающему свойства первичного сигнала на масштабе $10'$ и выше. Два других значения модулируют эффект зашумления карты на уровнях, близких к амплитудам первичного сигнала. Зафиксируем далее три модели Вселенной с $\Omega_{\rm tot} = 1$, $\Omega_{\rm tot} = 0{,}3$ и $\Omega_{\rm tot} = 0{,}1$ при плотности барионов $\Omega_b = 0{,}05$ и постоянной Хаббла $h = 0{,}5$. Скрытую массу считаем “холодной” и начальные возмущения полагаем адиабатическими со спектром Харрисона–Зельдовича.

Как ведут себя концентрации максимумов поля анизотропии $N_{\max}(\nu_t)$ для этих трёх космологических моделей? В табл. 7.1 [Barreiro et al., 1997] приведена сводка спектральных параметров для различных значений θ_A и $A_N(10')$. Связь между θ_A и шириной диаграммы направленности антенны на половине её амплитуды (FWHN) даётся следующим соотношением: $\theta_A =$ $= 0{,}425$ FWHM.

Необходимо отметить, что по мере уменьшения разрешающей способности антенны (увеличение FWHM) количество пиков на сфере уменьшается почти на три порядка (табл. 7.2). В то же время статистический разброс в числе пиков $\Delta n \sim \sqrt{N}$ при FWHM = 5′ оказывается несущественным для “идеального” эксперимента ($A_N(10') = 0$) и становится определяющим при $A_N(10') = 10^{-5}$ и $A_N(10') = 3\ \ 10^{-5}$. Заметим, что параметры планируемого эксперимента PLANCK при анализе статистики пиков приближаются к параметрам “идеального” эксперимента. В остальных моделях свойства сигнала определяются шумом, который собственно и приводит к примерному равенству числа пиков на сфере. На рис. 7.1 приведено распределение плотности пиков поля анизотропии в рассматриваемых моделях в зависимости от ν_t, FWHM и уровня шума [Barreiro et al., 1997]. В табл. 7.2 суммированы результаты, приведённые на рис. 7.1.

7.4. Структура сигнала в области максимумов и минимумов анизотропии реликтового излучения

Наряду с предсказанием среднего числа экстремумов случайного гауссова поля анизотропии теория позволяет рассчитать и наиболее вероятную структуру поля ΔT в окрестности точки максимума или минимума [BBKS, BE]. Следуя [BH], выберем полярную систему координат $\left(\overline{\omega} = 2\sin\frac{\theta}{2};\, \varphi\right)$ с центром в точке максимума поля $\Delta T(q_i)$ и воспользуемся приближением “flat sky” для описания структуры ΔT в окрестности этой точки. Будем считать, что высота пика равна ν. Тогда распределение поля в