В первом случае $\tilde{E} = 1$. Кривая $\tilde{E}(r)$, имеющая $\tilde{E}_{max} = 1$, соответствует $\tilde{L}_{cr} = 2$ (см. рис. 17). Максимум этой кривой лежит при $r = 2r_g$. Значит, этот радиус является минимальным для периастров орбит частиц с $v_\infty = 0$, приходящих к черной дыре и снова уходящих на бесконечность. При $\tilde{L} \leqslant 2$ происходит гравитационный захват. Следовательно, прицельное расстояние, соответствующее захвату, $b_{cr} = \tilde{L}_{cr}/\tilde{E} = 2r_g(v_\infty/c)$. Сечение захвата нерелятивистской частицы

$$\sigma_{нерел} = \pi b_{cr}^2 = 4\pi(v_\infty/c)^2 r_g^2. \tag{2.9.1}$$

Для ультрарелятивистской частицы $b_{cr} = 3\sqrt{3}\, r_g/2$ и сечение захвата

$$\sigma_{рел} = \frac{27}{4}\pi r_g^2. \tag{2.9.2}$$

В связи с возможностью гравитационного захвата не всякая частица, имеющая скорость больше второй космической, улетает в бесконечность. Для этого надо еще, чтобы угол ψ между направлением на центр черной дыры и траекторией движения был больше некоторого критического значения ψ_{cr}. Этот критический угол для скорости, равной второй космической, дается выражением

$$\operatorname{tg}\psi_{cr,2косм} = \pm\frac{2\sqrt{(1 - r_g/r)r_g/r}}{\sqrt{1 - 4r_g/r(1 - r_g/r)}}. \tag{2.9.3}$$

Знак плюс выбирается для $r > 2r_g$ ($\psi_{cr} < 90°$), знак минус – для $r < 2r_g$ ($\psi_{cr} > 90°$).

Критический угол для ультрарелятивистской частицы определяется выражением

$$\operatorname{tg}\psi_{cr,рел} = \pm\frac{\sqrt{1 - r_g/r}}{\sqrt{r_g/r - 1 + \frac{4}{27}(r/r_g)^2}}. \tag{2.9.4}$$

Знак плюс выбирается для $r > 1{,}5\, r_g$, знак минус – для $r < 1{,}5\, r_g$.

§ 2.10. Движение частиц с учетом гравитационного излучения

Небесная механика в релятивистской теории отличается от ньютоновской, помимо уже рассмотренных особенностей, еще излучением гравитационных волн ускоренно движущимся телом. Вследствие этого энергия $\tilde{E}$ и угловой момент $\tilde{L}$ не являются строгими интегралами движения.

Излучение гравитационных волн вызывает торможение движущейся частицы (потерю энергии и углового момента). Сила торможения связана со взаимодействием пробной частицы массы m с собственным гравитационным полем и пропорциональна m^2, в то время как взаимодействие с внешним полем пропорционально mM. Поэтому при малых m/M сила "лучистого трения" является малой поправкой к основной силе и движение пробной частицы мало отличается от движения по геодезической.

Однако за длительные промежутки времени эти малые изменения могут, накапливаясь, приводить к существенному отклонению движения частицы от первоначальной траектории.

Мы рассмотрим изменение сечения захвата черной дырой пробной частицы, летящей из бесконечности, при учете гравитационного излучения и процесс постепенного захвата тела, движущегося по круговым орбитам [Зельдович, Новиков (1964*, 1971*)].

Расчет гравитационного излучения проводится методом анализа малых возмущений метрики Шварцшильда [Зерилли (1970а), Девис и др. (1971)]. Он показывает, что оценки изменения движения, сделанные по теории слабого поля и для нерелятивистских скоростей, во всех интересных случаях являются хорошим приближением*).

Рассмотрим случай изменения сечения захвата для частицы, летящей из бесконечности. Гравитационное излучение, происходящее главным образом в периастре орбиты, приводит к тому, что частица после облета черной дыры может уже не удалиться снова в бесконечность (как было бы без излучения), а перейти на связанную вытянутую орбиту, двигаясь по которой, она снова вернется к черной дыре, снова излучит в периастре и т.д., пока не упадет в нее. С учетом этой возможности сечение захвата для частицы масс m, имеющей скорость v_∞ на бесконечности, дается следующей приближенной формулой:

$$\sigma_{\text{грав.изл}} \approx \pi\left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2 (2x)^{2/7} r_g^2, \qquad x \gg 2^6, \tag{2.10.1}$$

где $x = \dfrac{c^2}{v_\infty^2}\dfrac{m}{M}$. При $x \lesssim 2^6$ сечение совпадает с (2.9.1) для нерелятивистской частицы.

После первого облета черной дыры на расстоянии r_1 в периастре частица удаляется на максимальное расстояние (апоастр), определяемое приближенной формулой

$$l_{\max} \approx \frac{r_g}{2\left[\dfrac{m}{M}\left(\dfrac{r_g}{r_1}\right)^{3/5} - \dfrac{v_\infty^2}{2c^2}\right]}. \tag{2.10.2}$$

Для малых r_1 при последующих облетах $l_{\max}$ быстро уменьшается. В конце концов частица падает в черную дыру.

Рассмотрим теперь влияние гравитационного излучения на круговое движение частицы. Если частица движется при $r \gg r_g$, в результате излучения радиус орбиты постепенно уменьшается по следующему закону [Ландау, Лифшиц (1973*)]:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{8}{5}c\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{r_g}{r}\right)^3. \tag{2.10.3}$$

Так продолжается до последней устойчивой круговой орбиты с $r = 3r_g$. На этой орбите энергия связи $E \approx 0{,}057\, mc^2$ (см. с. 33). Она высвечивается в течение всего предыдущего движения. За один оборот на критической окружности $r = 3r_g$ высвечивается примерно $\Delta E \approx 0{,}1\, mc^2 (m/M)$. Затем частица переходит на спиральную орбиту падения к дыре, совершая еще $\approx (M/m)^{1/3}$ оборотов вокруг нее. Количество излученной при этом энергии много меньше излученной ранее (до достижения $r = 3r_g$).

*) Сам процесс излучения в теории сильного поля черной дыры рассмотрен в следующей главе.